

Musterlösung, Herbst 2001

Marcel Bieri

1. Aufgabe

- a) Gemäss einem Satz aus der Vorlesung ist A genau dann positiv definit, wenn die Cholesky-Zerlegung von A existiert. Also schauen wir, für welche α, β die Cholesky-Zerlegung machbar ist. Dazu berechnen wir die L-D-L^T-Zerlegung von A . Nach einer kleinen Rechnung (wobei sich die meisten α 's und β 's wunderbar wegkürzen) erhält man zunächst die L-U-Zerlegung von A :

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 & \alpha\beta & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & 0 & \alpha(\alpha - 2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta}{(\alpha-2)^3} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Damit ist die Diagonalmatrix D gegeben durch $D = \text{diag}(\beta, \alpha - 2, 1, \frac{\beta}{(\alpha-2)^3})$. Damit die Cholesky-Zerlegung existiert, muss gemäss Konstruktion $\sqrt{D}$ definiert sein, d.h. D darf nur positive Elemente aufweisen. Daraus erhalten wir sofort Bedingungen für α und β , nämlich

$$\begin{aligned} \alpha &\geq 2 \\ \beta &\geq 0 \end{aligned}$$

- b) $\det(A) = \det(LDL^T) = \det(L)^2 \cdot \det(D) = \det(D) = \frac{\beta^2}{(\alpha-2)^2}$.
- c) Durch einsetzen von $\alpha = 1, \beta = 2$ in (1) erhalten wir das Gleichungssystem $LUx = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystem erhalten wir einfach durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen. Konkret: Wir lösen zunächst das Gleichungssystem $Ly = b$ (Vorwärtseinsetzen) und erhalten als $y = (6, -3, 1, -4)^T$ und danach das Gleichungssystem $Rx = y$ (Rückwärtseinsetzen). Daraus erhalten wir die Lösung des ganzen Gleichungssystems $x = (2, 1, 1, 2)^T$.

- d) Die L-D-L^T-Zerlegung besitzt einen wesentlichen Vorteil gegenüber der L-U-Zerlegung. Sie erhält eine wichtige Eigenschaft der Matrix A — die Symmetrie. Die L-D-L^T-Zerlegung ist nämlich ebenfalls symmetrisch, während dies die L-U-Zerlegung in der Regel nicht ist. Daraus folgt z.B. auch, dass die L-D-L^T-Zerlegung nur halb so viel Speicherplatz braucht (man muss ja nur *eine* Dreiecksmatrix speichern) wie die LU-Zerlegung.

2. Aufgabe

a) Das Fixpunktproblem lautet

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{5}(x_1^2 + x_2^2) \\x_2 &= \frac{1}{2}e^{-x_1}\end{aligned}$$

Gemäss dem Banach'schen Fixpunktsatz müssen wir zeigen, dass Φ eine Selbstabbildung auf $I = [0, 1]^2$ ist und zudem eine Kontraktion. Das erstere zu zeigen ist nicht weiter schwer. Um die Kontraktion zu zeigen berechnen wir wiederum zunächst die Ableitung von Φ

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}x_1 & \frac{2}{5}x_2 \\ -\frac{1}{2}e^{-x_1} & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus erhalten wir $\|\Phi'\|_\infty = \max(\frac{4}{5}, \frac{1}{2}) = \frac{4}{5} < 1$. Also ist Φ eine Kontraktion mit der Kontraktionskonstanten $\alpha = \frac{4}{5}$.

b) Man erhält $x^{(1)} = \Phi(x^{(0)}) = (\frac{2}{5}, \frac{1}{2e})^T$.

c) Mit der a-priori Fehlerabschätzung

$$\|x^{(n)} - x\|_\infty \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$$

wobei $\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = 0.816$, erhalten wir durch Auflösen $n \geq 26.94$ also brauchen wir 27 Schritte.

3. Aufgabe

a) Das Schema der dividierten Differenzen lautet:

$$\begin{array}{ccccccc}1 & 9 & & & & & \\ & & 5 & & & & \\3 & 19 & & 2 & & & \\ & & 11 & & 0 & & \\4 & 30 & & 2 & & 1 & \\ & & 19 & & 7 & & \\7 & 87 & & 37 & & & \\ & & 167 & & & & \\8 & 254 & & & & & \end{array}$$

Damit lautet gemäss der Newton-Vorwärtsformel das gesuchte Polynom

$$\begin{aligned}P_{0,4} &= 9 + 5(x-1) + 2(x-1)(x-3) + (x-1)(x-3)(x-4)(x-7) \\ &= x^4 - 15x^3 + 77x^2 - 148x + 94\end{aligned}$$

b) Nach der Newtonformel entsteht $P_{0,3}$ aus $P_{0,2}$ durch

$$P_{0,3} = P_{0,2} + \gamma_3(x-1)(x-3)(x-4)$$

wobei $\gamma_3 = f[1, 3, 4, 7]$ die dritte dividierte Differenz ist. Aber gemäss dem Schema in a) ist diese eben genau gleich 0. Also folgt $P_{0,2} = P_{0,3}$.

- c) Um $P(x)$ auszurechnen müssen wir dem Schema aus a) eine weitere Schrägzeile unten anfügen:

1	9				
		5			
3	19		2		
		11		0	
4	30		2	1	
		19		7	1
7	87		37	2	
		167		5	
8	254		27		
		32			
2	62				

Dann berechnet sich $P(x)$ wie folgt

$$P(x) = P_{0,4}(x) + 1(x-1)(x-3)(x-4)(x-7)(x-8)$$

Also haben wir für die Differenz:

$$P(x) - P_{0,4}(x) = (x-1)(x-3)(x-4)(x-7)(x-8)$$

Anmerkung: In dieser Aufgabe sieht man einen wesentlichen Vorteil der Newton-Interpolation z.B. gegenüber der Lagrange-Interpolation. Falls man nämlich eine neue Stützstelle hinzufügt, muss man nicht das ganze Interpolationspolynom neu berechnen, sondern einfach im Schema der dividierten Differenzen eine Schrägzeile hinzufügen und danach kann man das neue Interpolationspolynom aus dem alten durch hinzufügen eines weiteren Terms berechnen.

Vielleicht ist in der Vorlesung auch der Eindruck entstanden, die Stützstellen müssten im Schema der div. Diff. in aufsteigender Reihenfolge stehen — dies ist eben auch nicht der Fall, wie man in dieser Aufgabe sieht.

4. Aufgabe

- a) Eine Quadraturformel hat Ordnung 4, wenn sie Polynome bis zum Grade 3 noch exakt integriert. Für die Monome bis zum Grad drei erhalten wir die folgende Tabelle zum Vergleich:

$f(x)$	$\int_{-h}^h f(x)$	$Q(f)$
1	$2h$	$2h$
x	0	0
x^2	$2\frac{h^3}{3}$	$4\alpha h^3$
x^3	0	0

Daraus sehen wir, dass $Q(f)$ genau dann von Ordnung 4 ist, falls $\alpha = \frac{1}{6}$ ist.

- b) 1. Wir setzen für $f(x)$ resp. $f'(x)$ im folgenden seine Taylorentwicklung um den Nullpunkt bis zum Grade 4 ein und erhalten damit

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{-h}^h (f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + x^3 6f'''(0) + \frac{x^4}{24}f^{(4)}(\xi))dx \\ &= 2hf(0) + \frac{h^3}{3}f''(0) + \frac{h^5}{60}f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(f) &= 2hf(0) + \frac{h^2}{6}(f'(0) + hf''(0) + \frac{h^2}{2}f'''(0) + \frac{h^3}{6}f^{(4)}(\xi) - f'(0) \\ &\quad + hf''(0) - \frac{h^2}{2}f'''(0) + \frac{h^3}{6}f^{(4)}(\xi)) \\ &= 2hf(0) + \frac{h^3}{3}f''(0) + \frac{h^5}{18}f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

Damit erhalten $R(f) = I(f) - Q(f) = -\frac{7}{180}h^5 f^{(4)}(\xi)$. Also ist $c = -\frac{7}{180}$ und $q = 4$.

2. Betrachten wir zunächst nur das Intervall $[t_{k-1}, t_k]$. Wir erhalten dafür

$$\begin{aligned} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)dx &= \int_{-h}^h f\left(\frac{t_k - t_{k-1}}{2} + x\right)dx \\ &\approx 2hf\left(\frac{t_k - t_{k-1}}{2}\right) + \frac{h^2}{6}(f'(t_k) - f'(t_{k-1})) \quad (2) \end{aligned}$$

Um die Summierte Form $Q_n(f)$ zu erhalten, summieren wir nun die Ausdrücke (2) über sämtliche $k = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} Q_n(f) &= 2h \sum_{k=1}^n f\left(\frac{t_k - t_{k-1}}{2}\right) + \frac{h^2}{6} \sum_{k=1}^n (f'(t_k) - f'(t_{k-1})) \\ &= 2h \sum_{k=1}^n f((2k-1)h) + \frac{h^2}{6}(f'(1) - f'(0)) \end{aligned}$$

5. Aufgabe

- a) Einsetzen der gegebenen Daten in die theoretische Kurve ergibt ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{91}{55} \\ \frac{1}{3}\alpha + 41\beta &= \frac{91}{55} \\ \frac{1}{2}\alpha + 3\beta &= \frac{91}{55} \end{aligned}$$

Das dazu gehörige lineare Ausgleichsproblem lautet dann wie folgt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 41 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_x - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{91}{55} \\ \frac{91}{55} \\ \frac{91}{55} \end{pmatrix}}_b = \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}}_r$$

oder in Kurzform $Ax - b = r$.

- b) Wir führen eine QR-Zerlegung der Matrix A mittels Householder-Transformation durch. Dazu berechnet man gemäss Vorlesung zunächst den Vektor $v_1 = a_1 + \text{sign}(a_{11})\|a_1\|_2 e_1$ und erhält dafür $v_1 = (\frac{13}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})^T$. Daraus erhält man den Vektor

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|_2} = \sqrt{\frac{18}{91}} \begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Mit seiner Hilfe berechnet man sich dann die erste Housholder-Matrix

$$Q_1 = I - 2u_1 u_1^T = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{87}{91} & -\frac{6}{91} \\ -\frac{3}{7} & -\frac{6}{91} & \frac{82}{91} \end{pmatrix}$$

Gemäss dem Hinweis sollte es das eigentlich schon gewesen sein, also prüfen wir nach, ob $Q_1 A = R$ tatsächlich eine obere Dreiecksmatrix ist:

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & -13 \\ 0 & 39 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Demnach haben wir die QR-Zerlegung der Matrix A schon gefunden und sie lautet

$$A = QR = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{87}{91} & -\frac{6}{91} \\ -\frac{5}{7} & -\frac{6}{91} & \frac{82}{91} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & -13 \\ 0 & 39 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir die Lösung des Ausgleichsproblems als Lösung des Gleichungssystems, welches aus den ersten 2 Zeilen von $Rx = Qb$ besteht

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{6} & -13 \\ 0 & 39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{68}{35}, \beta = \frac{1}{39}.$$

6. Aufgabe

- a) Mit Hilfe der Substitution $z = (z_1, z_2, z_3)^T = (y, y', y'')^T$ transformieren wir die Differentialgleichung dritter Ordnung auf ein äquivalentes System von Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= z_3 \\ z_3' &= -z_2 + tz_1 \end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung $z^{(0)} = z(2) = (0, 1, 2)^T$.

- b) Das implizite Eulerverfahren lautet $z^{(1)} = z^{(0)} + hf(t_1, z^{(1)})$. Wenden wir dieses auf das obige System an, erhalten wir folgendes (lineare) Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} z_1^{(1)} &= 0.5z_2^{(1)} \\ z_2^{(1)} &= 1 + 0.5z_3^{(1)} \\ z_3^{(1)} &= 2 - 0.5z_2^{(1)} + 1.25z_1^{(1)} \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Systems lautet $z_1^{(1)} = 1.0667, z_2^{(1)} = 2.1333, z_3^{(1)} = 2.2667$. Damit ist $y(2.5) = 1.0667$.

- c) Der Unterschied zwischen dem expliziten und dem impliziten Verfahren liegt in den Steigungen der Streckenzüge. Bei beiden Verfahren geht man pro Zeitschritt von einem bekannten Punkt x_0 der bis anhin berechneten Lösungskurve aus, und zieht von diesem eine Strecke in Richtung der vermeintlichen Lösungskurve. Beim expliziten Verfahren zieht man nun die Strecke in Richtung der momentanen Tangente, beim impliziten Verfahren in Richtung der Tangente im nächsten Punkt (welchen man natürlich noch nicht kennt).
Anmerkung: Beide Verfahren haben zwar dieselbe Fehlerordnung (nämlich 1), jedoch erweist sich das implizite Verfahren in vielen Fällen als besser, z.B. bei steifen Differentialgleichungen (siehe Numerik II). Der implizite Euler ist im übrigen auch A-stabil.