

1. Vordiplom, Herbst 2001

Prof. R. Jeltsch

1. Aufgabe (6 Punkte)Gegeben sei die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \alpha\beta & 0 \\ 0 & \alpha - 2 & 0 & \alpha(\alpha - 2) \\ \alpha\beta & 0 & \alpha^2\beta + 1 & 0 \\ 0 & \alpha(\alpha - 2) & 0 & \alpha^2(\alpha - 2) + \frac{\beta}{(\alpha - 2)^3} \end{pmatrix}$$

- Für welche Werte von α und β ist A positiv definit?
- Berechnen Sie die Determinante von A
- Für $\alpha = 1$, $\beta = 2$ und $b = (4, -3, 7, -7)^T$ berechne man die Lösung von $Ax = b$.
- Welche Vorteile hat die L-D-L^T-Zerlegung gegenüber der L-U-Zerlegung?

2. Aufgabe (6 Punkte)

Gesucht ist die Näherungslösung des nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{5}(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2 &= e^{-x_1} \end{aligned}$$

- Schreiben Sie zunächst das Gleichungssystem in in Fixpunktproblem um, und zeigen Sie mit dem Banach'schen Fixpunktsatz, dass die Fixpunktiteration $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$ für die spezielle Fixpunktvorschrift Φ für alle Startwerte $x^{(0)} \in D := [0, 1] \times [0, 1]$ in der Maximumnorm konvergiert.
- Führen Sie, ausgehend von $x^{(0)} = (1, 1)^T$, einen Iterationsschritt aus.
- Wieviele Iterationsschritte sind höchstens notwendig, um eine Näherung mit der Genauigkeit $\varepsilon = 10^{-2}$ zu gewinnen?

3. Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben sind die folgenden Daten

i	0	1	2	3	4
x_i	1	3	4	7	8
f_i	9	19	30	87	254

 $P_{i,i+k}$ bezeichne das Interpolationspolynom zu den Daten $(x_i, f_i), \dots, (x_{i+k}, f_{i+k})$.

- Stellen Sie zu den gegebenen Daten (mit der angegebenen Reihenfolge) das vollständige Schema der dividierten Differenzen auf. Geben Sie das Polynom $P_{0,4}$ explizit an.

- b) Begründen Sie unter Zuhilfenahme des Schemas aus a), dass im vorliegenden Fall gilt:

$$P_{0,2}(x) = P_{0,3}(x)$$

- c) Berechnen Sie die Differenz $P(x) - P_{0,4}(x)$, wobei P das Interpolationspolynom bezeichne, welches über $P(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, 4$ hinaus noch $P(2) = 62$ erfüllt.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Es sei die Quadraturformel

$$Q(f) := 2hf(0) + \alpha h^2(f'(h) - f'(-h)) \quad (1)$$

für das Intervall $[-h, h]$ gegeben:

$$I(f) := \int_{-h}^h f(x)dx = Q(f) + R(f)$$

- a) Bestimmen Sie α so, dass die Quadraturformel $Q(f)$ die Ordnung 4 hat. Betrachten Sie dazu $I(x^p)$ und $Q(x^p)$ für $p \in \mathbb{N}_0$.
- b) Der Fehler habe die Darstellung

$$R(f) = ch^5 f^{(q)}(\xi) \quad \text{für ein } \xi \in [-h, h]$$

1. Bestimmen Sie die Konstanten c und q .
2. Wir unterteilen das Intervall $[0, 1]$ in Teilintervalle der Länge $2h = \frac{1}{n}$, $t_k = 2kh$, $k = 0, 1, \dots, n$. Geben Sie die summierte Quadraturformel $Q_n(f)$ an, wobei auf jedem Teilintervall $[t_{k-1}, t_k]$ eine Quadraturformel wie in (1) verwendet wird.

5. Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben sind die Punkte

i	1	2	3
x_i	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
y_i	0	41	3

Diese Punkte (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$ sollen gemäss theoretischen Überlegungen auf der Kurve

$$\alpha x^2 + \beta y = \frac{91}{55}$$

liegen. Die Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sollen optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadratmethode bestimmt werden.

- a) Wie lautet ein gleichwertiges lineares Ausgleichsproblem?
- b) Bestimmen Sie eine least-squares-Lösung mit QR-Zerlegung mittels Householder-Transformationen. Gehen Sie dabei *nicht* zu den Normalengleichungen über.

Hinweis: Rechnen Sie weitgehendst mit Brüchen! Führen Sie nur einen Householder-Schritt durch!

6. Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'''(t) + y'(t) = ty(t);$$

$$y(2) = 0, \quad y'(2) = 1, \quad y''(2) = 2.$$

- a) Transformieren Sie dieses Problem auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.
- b) Bestimmen Sie approximativ die Lösung des transformierten Systems mit einem Schritt des impliziten Euler-Verfahrens an der Stelle $t = 2.5$.
- c) Worin besteht geometrisch gesehen der Unterschied zwischen dem expliziten und dem impliziten Euler-Verfahren?

Bitte begründen Sie Ihre Ergebnisse ausreichend.

Numerische Resultate sind auf 4 Dezimalstellen zu runden.

Jede richtige Aufgabe gibt 6 Punkte, für die Note 4 reichen 18 Punkte.