

Musterlösung, Herbst 2000

Marcel Bieri

1. Aufgabe Mit der Bezeichnung $F(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(\sin x_1 + \sqrt{x_2 + 1}) \\ \frac{1}{5}(\cos x_1 + x_2^2) \end{pmatrix}$ können wir die gegebene Gleichung schreiben als $x = F(x)$.

- a) Um zu zeigen, dass es auf I genau einen Fixpunkt gibt, muss man gemäss dem Banach'schen Fixpunktsatz zwei Dinge zeigen: Erstens muss F eine Selbstabbildung sein, und zweitens muss F auch noch eine Kontraktion sein. Dass F eine Selbstabbildung ist, ist klar, denn z.B. für $F_1(x)$ haben wir $\min F_1(x) = \frac{1}{6}(-1 + \sqrt{0+1}) = 0$ sowie $\max F_1(x) = \frac{1}{5}(1 + \sqrt{1+1}) < 1$. Analog für $F_2(x)$. Um einzusehen, dass F eine Kontraktion ist, berechnen wir eine (Operator-)Norm von $F'(x)$ und zeigen, dass diese kleiner eins ist (vgl. Schrankensatz Analysis I).

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cos x_1 & \frac{1}{12\sqrt{x_2+1}} \\ -\frac{1}{5} \sin x_1 & \frac{2x_2}{5} \end{pmatrix}$$

Berechne nun z.B. $\|F'\|_\infty = \max\{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}, \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\} = \frac{3}{5} < 1$ (die ∞ -Norm ist die Zeilensummennorm). Damit ist Teil a) gezeigt.

- b) Hier benutzen wir die a-priori Fehlerabschätzung des Banach'schen Fixpunktsatzes. Für $x, y \in I$ gilt $\|x - y\|_\infty = \max\{\pi, x\} = \pi$. Damit ergibt sich

$$\ln \left(\frac{10^{-6}}{\pi} (1 - \alpha) \right) \frac{1}{\alpha} \leq n$$

wobei $\alpha = \|F'\|_\infty = \frac{3}{5}$. Durch Auflösen erhält man $n \geq 32$.

2. Aufgabe

- a) Gemäss der Vorlesung ist die Lösung dann nicht eindeutig, falls die Matrix A *nicht vollen Rang besitzt*. Dies ist dann der Fall, falls sich der dritte Spaltenvektor als Linearkombination der ersten zwei schreiben lässt, d.h.

$$\beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha - 1 \\ 1 + \alpha \end{pmatrix} \quad (1)$$

Aus den ersten zwei Zeilen der Vektoren folgt sofort $\beta = 0.5$ sowie $\gamma = \alpha$. Damit schreibt sich (1) wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha - 1 \\ 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha - 1 \\ 1 + \alpha \end{pmatrix}$$

Die Bedingung für $\text{Rang } A < 3$ lautet also $1 + \alpha = 2\alpha$ und somit $\alpha = 1$.

- b) Die Cholesky-Zerlegung berechnen wir mit Hilfe der LU- resp. LDU-Zerlegung von $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -\frac{1}{4} & \frac{11}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

Die LU-Zerlegung lautet somit:

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{11} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{11}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

Durch Abspalten der Diagonalmatrix $D = \text{diag}(u_{11}, u_{22}, u_{33})$ erhält man die LDU-Zerlegung der Matrix A:

$$A = LD\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{11} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dabei ist die auftretende Diagonalmatrix D positiv definit, das heisst der Ausdruck $\sqrt{D}$ ist wohldefiniert und wir setzen

$$R^T = L\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{11}{2}} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{\frac{8}{11}} & \sqrt{\frac{3}{11}} \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$A = R^T R = \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{11}{2}} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{\frac{8}{11}} & \sqrt{\frac{3}{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{8} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{11}{2}} & \sqrt{\frac{8}{11}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{11}} \end{pmatrix}$$

die Cholesky-Zerlegung der Matrix $A^T A$.

Anmerkung: Die Voraussetzung, dass A vollen Rang besitzt, ist wesentlich für die Verwendung der Normalengleichungen, da ansonsten $A^T A$ singulär ist. Falls A nicht vollen Rang besitzt gibt es andere Methoden zum lösen des Ausgleichsproblems, z.B. Singulärwertzerlegung von A und errechnen der Pseudoinversen zu A (siehe Numerik II).

3. Aufgabe Man soll zeigen dass zu den gegebenen Daten, der interpolierende periodische Spline gleich dem natürlichen Spline ist. Der „Witz“ dieser Aufgabe ist, dass man realisiert, dass es nicht nötig ist, zweimal den Spline $s(x)$ auszurechnen und anschliessend zu vergleichen. Sondern es reicht einfach zu zeigen, dass die Momente des periodischen Splines an den Rändern verschwinden, d.h. $M_0 = M_3 = 0$. Denn das ist genau die Zusatzbedingung an den natürlichen Spline. Also stellen wir das Gleichungssystem für den interpolierenden Spline auf. Dazu müssen wir zuerst die dividierten Differenzen 2. Ordnung berechnen. Das dazu gehörige Schema lautet:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & & \\ & & 1 & \\ 1 & 1 & & -1.5 \\ & & -2 & \\ 2 & -1 & & 1.5 \\ & & 1 & \\ 3 & 0 & & 0 \\ & & 1 & \\ 4 & 1 & & \end{array}$$

Damit erhalten wir folgendes Gleichungssystem für die Momente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mittels der Gauss-Elimination sehen wir dann schnell, dass $M_3 = 0$ gilt. Natürlich ist dann wegen der Periodizität auch $M_0 = 0$. Also stimmen periodischer und natürlicher Spline überein.

4. Aufgabe

- a) Gesucht ist eine Quadraturformel mit 3 Unbekannten, die für Polynome von möglichst hohem Grad exakt ist. Im Vektorraum der Polynome auf $[-1, 1]$ bilden die Monome (Polynome der Form $p(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$) eine Basis. Wir setzen also $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$ und fordern dass die Quadraturformel für diese 3 Polynome exakt ist, d.h. $\int_{-1}^1 f_i(x) dx = A(f_i(-1) + f_i(1)) + Bf_i(x_1)$, $i = 1, 2, 3$. Durch einsetzen und ausrechnen erhalten wir das folgende Gleichungssystem:

$$2 = 2A + B \quad (2)$$

$$0 = Bx_1 \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} = 2A + Bx_1^2. \quad (4)$$

Falls $B = 0$, so folgt aus (2) $2A = 2$ und aus (4) folgt $2A = \frac{2}{3}$. Also ist $B \neq 0$. Dann aber folgt aus (3) dass $x_1 = 0$ ist. Durch einsetzen dieser Lösung in (2) und (4) erhalten wir $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{4}{3}$

- b) Aus Teil a) wissen wir schon, dass die Quadraturformel für Polynome zweiten Grades exakt ist. Allerdings ist es möglich, dass sie auch noch für Polynome höheren Grades exakt ist. In der Tat erhalten wir für $f_4(x) = x^3$, $f_5(x) = x^4$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^3 dx &= 0, & \frac{1}{3}(f_4(-1) + f_4(1)) + \frac{4}{3}f_4(0) &= 0 \\ \int_{-1}^1 x^4 dx &= \frac{2}{5}, & \frac{1}{3}(f_5(-1) + f_5(1)) + \frac{4}{3}f_5(0) &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Also ist sie sogar für Polynome vom Grad 3 exakt, d.h. $m = 3$.

- c) Mittels der Transformation $x = y + 1$ und durch Anwenden der in a) gefundenen Quadraturformel (da sie ja für Polynome 3. Grades exakt ist) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^2 |x-1|^3 dx &= \int_{-1}^1 |y|^3 dy \\ &= \frac{1}{3}(1+1) + 0 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

5. Aufgabe

- a) Das explizite Eulerverfahren lautet $z^{(m+1)} = z^{(m)} + hf(z^{(m)})$, wobei hier $z = (x, y)^T$ ist. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} x(1) &= x(0) + 1 \cdot (x(0) + y(0) - 0) = 3 & \text{und} \\ y(1) &= y(0) + 1 \cdot (x(0) - y(0)^2 + 0) = 1 \end{aligned}$$

- b) Die Trapezregel lautet $z^{(m+1)} = z^{(m)} + \frac{h}{2}(f(z^{(m+1)}) + f(z^{(m)}))$. Das Gleichungssystem sieht also wie folgt aus:

$$\begin{aligned}x(1) &= 1 + \frac{1}{2}(1 + x(1) + y(1)) \\y(1) &= 1 + \frac{1}{2}(1 + x(1) - y(1)^2)\end{aligned}$$

ist also von der Form $F(x, y) = 0$ mit

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y^2 - y \end{pmatrix}$$

Um das Newtonverfahren anwenden zu können, berechnen wir zunächst noch die Ableitung von F

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -y - 1 \end{pmatrix}$$

und deren Inverse

$$(F'(x, y))^{-1} = \frac{2}{y + 0.5} \begin{pmatrix} -y - 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Nun setzen wir alles in das Newtonverfahren $z(1) = z(0) - (F'(z(0)))^{-1}F(z(0))$ ein und erhalten

$$\begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \begin{pmatrix} -2 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 16 \\ 7 \end{pmatrix}$$

6. Aufgabe

- a) Der Fehler ist gegeben durch

$$R(h) = \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - f'(x_0) \right| \quad (5)$$

Durch einsetzen der Taylorapproximationen

$$\begin{aligned}f(x_0 + h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_0) \\&\quad + \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x_0) + \frac{h^6}{720}f^{(6)}(x_0) + \frac{h^7}{5040}f^{(7)}(x_0) + o(h^8) \\f(x_0 - h) &= f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_0) \\&\quad - \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x_0) + \frac{h^6}{720}f^{(6)}(x_0) - \frac{h^7}{5040}f^{(7)}(x_0) + o(h^8)\end{aligned}$$

und anschliessendes kürzen erhält man die Fehlerentwicklung für (5)

$$R(h) = \frac{h^2}{6} + \frac{h^4}{120} + \frac{h^6}{5040} + o(h^8)$$

- b) Als Approximationen erhalten wir der Reihe nach

$$\begin{aligned}h = 4 \quad f'(0) &\approx \frac{e^4 - e^{-4}}{8} = \frac{1}{4} \sinh(4) (= T_{00}) \\h = 2 \quad f'(0) &\approx \frac{e^2 - e^{-2}}{4} = \frac{1}{2} \sinh(2) (= T_{10}) \\h = 1 \quad f'(0) &\approx \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = \sinh(1) (= T_{20})\end{aligned}$$

Da die Schrittweiten jeweils halbiert werden und der Fehler eine gerade Potenzreihenentwicklung besitzt, benutzen wir als Extrapolationsschema das Romberg-Schema mit den oben bezeichneten T_{00}, T_{10}, T_{20} . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}T_{01} &= T_{10} + \frac{T_{10} - T_{00}}{4 - 1} = 0.14373 \\T_{11} &= T_{20} + \frac{T_{20} - T_{10}}{4 - 1} = 0.96247\end{aligned}$$

und schliesslich als extrapolierte Wert

$$T_{02} = T_{11} + \frac{T_{11} - T_{01}}{16 - 1} = 1.01705$$