

1. Vordiplom, Herbst 2000

Prof. R. Jeltsch

1. Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben ist die Fixpunktgleichung

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{\sin x_1}{6} + \frac{\sqrt{x_1^2 + 1}}{6} \\x_2 &= \frac{\cos x_1}{5} + \frac{x_2^2}{5}\end{aligned}$$

- Zeigen Sie: Im Gebiet $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$ gibt es genau einen Fixpunkt.
- Wieviele Iterationen sind maximal notwendig, um den Fixpunkt bis auf einen absoluten Fehler von 10^{-6} in der Maximumnorm zu bestimmen?

2. Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ -2 & 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 2 & 1 + \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Für welche Werte von α ist die Lösung im Sinn der kleinsten Quadrate nicht eindeutig?
- Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix $A^T A$ für $\alpha = 0$.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Es sei $s(x)$ der periodische kubische interpolierende Spline zu den Daten

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

mit der Periode 3. Zeigen Sie, dass s gleichzeitig der natürliche interpolierende Spline zum gegebenen Datensatz ist.

Hinweis: Man braucht $s(x)$ nicht auszurechnen.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Gesucht ist eine Quadraturformel

$$A(f(-1) + f(1)) + Bf(x_1)$$

für $\int_{-1}^1 f(x)dx$, welche für alle Polynome bis zum Grad m (mit m möglichst gross) exakt ist.

- Bestimmen Sie A, B und x_1 .
- Bestimmen Sie m .
- Bestimmen Sie den *exakten* Wert von $\int_0^2 |x - 1|^3 dx$ mit Hilfe der in a) bestimmten Formel.

5. Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y - t \\ \dot{y} &= x - y^2 + t\end{aligned}$$

mit dem Anfangswert $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

- a) Berechnen Sie eine Näherung für $x(1)$, $y(1)$ mit einem Schritt des expliziten Eulerverfahrens.
- b) Approximieren Sie $x(1)$, $y(1)$ durch einen Zeitschritt der Trapezregel. Schreiben Sie das nichtlineare Gleichungssystem für $x(1)$, $y(1)$ auf. Führen Sie einen Newtonschritt für dieses Gleichungssystem durch. Wählen Sie als Startwert $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

6. Aufgabe (6 Punkte)

Die Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 kann mit

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

approximiert werden.

- a) Bestimmen Sie die Entwicklung des Fehlers bis zu Termen der Ordnung h^6 . Nehmen Sie an, dass die Funktion genügend glatt sei.
- b) Approximieren Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \exp(x)$ an der Stelle 0 mit den Schrittweiten $h = 1, 2, 4$. Verbessern Sie diese 3 Näherungen durch ein geeignetes Extrapolationsschema.

Bitte begründen Sie Ihre Ergebnisse ausreichend.

Numerische Resultate sind auf 4 Dezimalstellen zu runden.

Jede richtige Aufgabe gibt 6 Punkte, für die Note 4 reichen 18 Punkte.