

Dopplereffekt

Schülerexperiment im Normalunterricht

Thomas Kuster

15. Juni 2007

0 Information

Zeit Doppellektion

Unterrichtsstufe 3. Klasse Gymnasium

Voraussetzung Wellen ($f\lambda = c$), Schall, Schallgeschwindigkeit (c), Unterschied: Ton, Klang

Ziel Dopplereffekt (bewegte Quelle) quantitativ verstehen

0.1 Organisation und Lektionsablauf

Die Lernaufgabe ist zweigeteilt in einen theoretischen und einen praktischen Teil. Die beiden Teile sind so aufgebaut, dass es keine Rolle spielt welche zuerst bearbeitet wird. Die eine Hälfte der Klasse bearbeitet den theoretischen Teil während die anderen den praktischen Teil (Experiment) bearbeitet, jeweils in 3er Gruppen. Der Ablauf der Lektion ist Tabelle 1 dargestellt.

0.2 Material

0.2.1 Theorie

- Zirkel
- Abspielgerät mit einer Aufnahme eines vorbeifahrenden Feuerwehrautos

Tabelle 1: Lektionsablauf

Inhalt	Material	Unterrichtsmethode	Zeit
Einführung Information und Gruppeneinteilung	Wandtafel	Frontalunterricht	5–10'
Lernaufgabe Theorie, Abschnitt 1	siehe Abschnitt 0.2	Lernaufgabe selbständiges erarbeiten der Theorie	≈40'
Lernaufgabe Experiment, Abschnitt 2	siehe Abschnitt 0.2	Schülerexperiment	≈40'

0.2.2 Experiment

- Velo evtl. mit Tachometer
- Stoppuhr
- Messband oder bereits abgemessene Strecke
- Gashupe/Gasfanfare (gibt es in Segelgeschäften oder Fussball Fanshops)
- Gerät um den Klang aufzunehmen. Die Aufnahme sollte anschliessend in einem Audioprogramm bearbeitet werden können.
 - Laptop mit Mikrofon
 - Filmkamera
 - Digitalkamera mit Videofunktion
 - MP3-Player mit Aufnahmefunktion
- Computer mit Audioprogramm (Frequenzanalyse) z. B. Audacity¹ (steht unter der GPL² und ist für Linux, MAC und Windows verfügbar)

¹<http://audacity.sourceforge.net/>

²GNU General Public License, Lizenz für freie Software: <http://www.fsf.org/licenses/gpl.html>

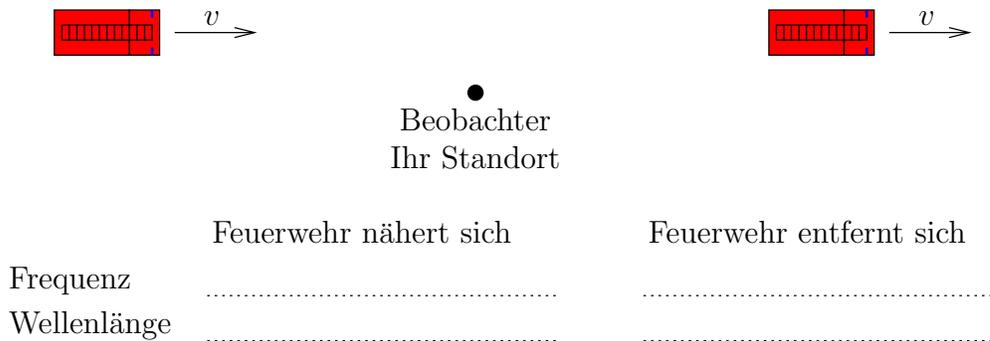


Abbildung 1: Feuerwehr fährt mit Signalhorn vorbei.

1 Dopplereffekt bewegte Quelle: Theorie

Kontrollieren Sie die Aufgaben **nach** dem Bearbeiten selber mit der bereitliegenden Lösung.

1.1 Einführung

Wie ändert sich die Frequenz (Klanghöhe) und Wellenlänge des Signalhorn, wenn ein Feuerwehrauto an Ihnen vorbei fährt. Falls Sie nicht wissen wie sich der Klang ändert, hören Sie sich die bereitgestellte Aufnahme an. Tragen Sie Ihre Aussage in [Abbildung 1](#) ein.

1.2 Wellenlängenänderung

Wir wollen nun verstehen wie dieser Effekt zustande kommt. Die Quelle (das Feuerwehrauto) bewegt sich entlang einer Gerade mit der Geschwindigkeit v . Der Schall bewegt sich mit der Schallgeschwindigkeit c und die Quelle sendet einen Ton aus mit der Frequenz f .

Damit alles in [Abbildung 2](#) eingezeichnet werden kann, nehmen wir folgende Geschwindigkeiten an:

$$v = 1 \text{ Häusschen/Zeiteinheit}$$

$$c = 2 \text{ Häusschen/Zeiteinheit}$$

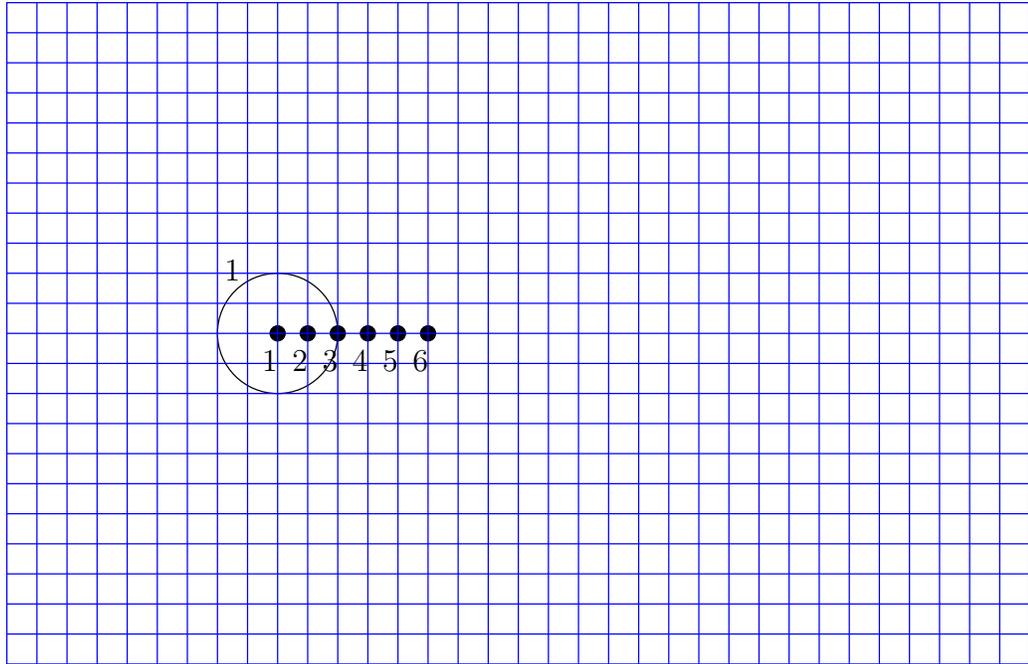


Abbildung 2: Herleitung des Dopplereffekt

Die Quelle sende zudem mit einer Wellenlänge³ von λ_Q von 2 Häusschen, für die Frequenz gilt somit:

$$f_Q = \frac{c}{\lambda_Q} = \frac{2 \text{ Häusschen/Zeiteinheit}}{2 \text{ Häusschen}} = 1 \frac{1}{\text{Zeiteinheit}}$$

Zum Zeitpunkt 0 wurde am Ort 0 ein Wellenmaxima ausgesendet. Dieses ist zum Zeitpunkt 1 an der eingezeichneten Stelle. Da sich das Wellenmaxima zum Zeitpunkt 1 an dieser Stelle befindet wird es mit 1 bezeichnet.

Zeichnen Sie nun alle Wellenmaxima zum Zeitpunkt 2 ein. An welcher Stelle befindet sich das Wellenmaxima welches am Ort 0 ausgesendet wurde, an welcher Stelle dasjenige welches am Ort 1 ausgesandt wurde? Zeichnen Sie die Wellenmaxima für die nächsten paar Zeitpunkte ein.

Mit Hilfe Ihrer Skizze können Sie nun eine Formel für die Wellenlänge λ_{B_v} die ein stehender Beobachter vor der Quelle war nimmt herleiten.

³Strecke von Wellenmaxima bis Wellenmaxima

1.3 Frequenzänderung

Schreiben Sie die erhaltene Formel so um, dass Sie aus der ausgesendeten Frequenz die erhaltene Frequenz berechnen können.

1.4 Nachlaufende Welle, Quelle entfernt sich

Sie haben sich nun überlegt wie sich die Wellenlänge und die Frequenz ändert, wenn sich die Quelle dem Beobachter nähert. Leiten Sie nun jeweils die Formel her für die Wellenlänge (λ_{B_n}) und die Frequenz (f_{B_n}), wenn sich die Quelle vom Beobachter entfernt.

1.5 Frequenzverhältnis

Bei einem vorbeifahrenden Feuerwehrauto kann nur der Frequenzunterschied gemessen werden. Leiten Sie eine Formel her, mit der Sie die Geschwindigkeit berechnen können wenn sie nur f_{B_v} und f_{B_n} kennen.

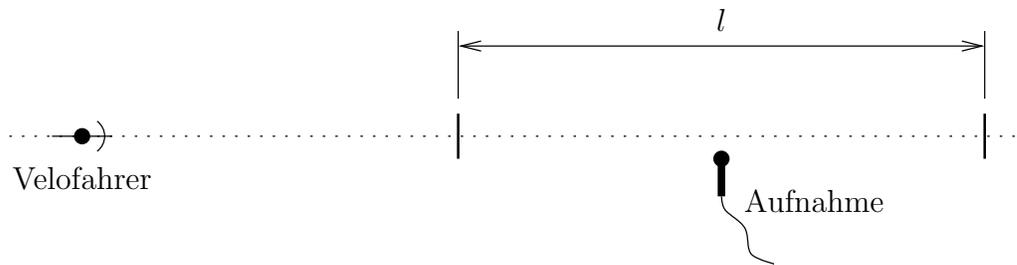


Abbildung 3: Versuchsaufbau

2 Dopplereffekt bewegte Quelle: Experiment

Bearbeiten Sie Abschnitt 2.4 nur, wenn Ihnen dazu genügend Zeit bleibt.

Lesen Sie bevor Sie mit dem Versuch anfangen diese ganze Anleitung durch (bis und mit Abschnitt 2.4). Ziel des Versuch ist es den Klang der Gashupe des Velofahrers welcher mit konstanter Geschwindigkeit vorbeifährt aufzunehmen und gleichzeitig die Geschwindigkeit des Velofahrers zu messen. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 3 skizziert.

2.1 Vorbereitung

- Messen Sie eine Strecke l ab.
- Positionieren Sie das Aufnahmegerät in der Mitte dieser Strecke

2.2 Versuch durchführen

- Velofahrer durchfährt die Strecke l mit möglichst hoher und konstanter Geschwindigkeit und bestätigt dabei die Gashupe. Verfügt das Velo über einen Tachometer sollte sich der Velofahrer zudem die Geschwindigkeit auf der Strecke l merken.
- Die anderen Gruppenmitglieder erstellen gleichzeitig eine Aufnahme und stoppen die benötigte Zeit für die Strecke l .

Wiederholen Sie den Versuch 3 mal und notieren Sie die Werte in Tabelle 2.

Tabelle 2: Messresultate und Auswertung

	Versuch 1	Versuch 2	Versuch 3
Ort			
Datum			
Uhrzeit			
Länge l			
Benötigte Zeit t			
Tachometeranzeige v_T			
Dateiname der Aufnahme			
Geschwindigkeit v_{SU}			
Intervall (Name)			
Frequenzverhältnis des Intervalls f_v			
Gemessene Frequenz vorlaufende Welle f_v			
Gemessene Frequenz nachlaufende Welle f_n			
Gemessenes Frequenz- verhältnis (f_v/f_n)			
Geschwindigkeit v_{DEI}			
Geschwindigkeit v_{DEG}			

2.3 Auswertung

Berechnen Sie die Geschwindigkeit (v_{SU}) auf Grund der gestoppten Zeit und tragen Sie diese in Tabelle 2 ein.

Öffnen Sie die Datei im Audioprogramm Audacity und speichern Sie sie unter einem anderen Namen⁴. Isolieren Sie die interessante Stelle (Anfang und Ende wegschneiden, evtl. auch den Übergang).

Beim Abspielen sollte nun das Intervall gut hörbar sein. Schätzen Sie das Intervall mit Hilfe der Tabelle 4 ab. Notieren Sie das Intervall und das dazugehörige Frequenzverhältnis (Proportionen in der Tabelle 3) in Tabelle 2

Zur Überprüfung bzw. falls Sie das Intervall nicht hören, können Sie eine Frequenzanalyse durchführen. Gehen Sie dazu wie folgt vor: markieren Sie einen Bereich in dem sich die Hupe nähert (überprüfen mit Play), wählen Sie dann Analyse \rightarrow Spektrum (Frequenzanalyse). Skizzieren Sie grob das Spektrum und notieren Sie sich die Frequenz eines deutlichen Maxima (wenn Sie mit Maus über das Spektrum fahren wird die Spitze angezeigt). Markieren Sie nun einen Bereich in dem die Hupe sich entfernt und führen Sie ebenfalls eine Frequenzanalyse durch. Suchen Sie die selbe Spitze und notieren Sie sich diesen Wert. Tragen Sie die Werte und auch das Verhältnis in Tabelle 2 ein.

Falls Sie den theoretischen Teil noch nicht bearbeitet haben, bearbeiten Sie nun diesen Teil und bearbeiten Sie dann den Abschnitt 2.3.1.

2.3.1 Geschwindigkeit aus dem Frequenzverhältnis berechnen

Berechnen Sie mit der im theoretischen Teil (Abschnitt 1.5) hergeleiteten Formel die Geschwindigkeit des Velofahrers. Tragen Sie die Werte in Tabelle 2 ein, dabei steht v_{DE_I} für die Geschwindigkeit welche aus dem geschätzten Intervall berechnet wurde und v_{DE_G} für diejenige aus dem gemessenen Frequenzverhältnis.

2.4 Interpretation

Sie haben für die Geschwindigkeit mehrere Werte (v_{SU}, v_{DE}). Welcher Wert denken Sie entspricht am genauestem dem tatsächlichen Wert und wieso? Wo sehen Sie Probleme und mögliche Fehlerquellen bei den einzelnen Messverfahren?

⁴Dadurch steht Ihnen, wenn etwas schief geht, das Original noch zur Verfügung

Tabelle 3: Intervall. Quelle http://de.wikipedia.org/wiki/Intervall_%28Musik%29

Intervall	Proportionen	Spezialnamen	Näherung	zwölfstufig
Prime	$\frac{1}{1}$	reine Prime	0 Cent	0 Cent
übermäßige Prime	$\frac{25}{24}$ $\frac{135}{128}$	kleiner chromatischer Halbton großer chromatischer Halbton	71 Cent 92 Cent	100 Cent
kleine Sekunde	$\frac{256}{243}$ $\frac{16}{15}$	Leimma diatonisch-rein	90 Cent 112 Cent	100 Cent
große Sekunde	$\frac{10}{9}$ $\frac{9}{8}$	kleiner Ganzton großer Ganzton	182 Cent 204 Cent	200 Cent
kleine Terz	$\frac{6}{5}$	reine kleine Terz	316 Cent	300 Cent
große Terz	$\frac{5}{4}$	reine große Terz	386 Cent	400 Cent
Quarte	$\frac{4}{3}$	reine Quarte	498 Cent	500 Cent
übermäßige Quarte	$\frac{45}{32}$ $\frac{7}{5}$ $\frac{729}{512}$	diatonisch-rein Huygens Tritonus	590 Cent 582 Cent 612 Cent	600 Cent
verminderte Quinte	$\frac{64}{45}$ $\frac{10}{7}$	diatonisch-rein Euler	610 Cent 617 Cent	600 Cent
Quinte	$\frac{3}{2}$	reine Quinte	702 Cent	700 Cent
kleine Sexte	$\frac{8}{5}$	reine kleine Sexte	814 Cent	800 Cent
große Sexte	$\frac{5}{3}$	reine große Sexte	884 Cent	900 Cent
kleine Septime	$\frac{16}{9}$ $\frac{7}{4}$	diatonisch-rein Naturseptime	996 Cent 986 Cent	1000 Cent
große Septime	$\frac{15}{8}$	diatonisch-rein	1088 Cent	1100 Cent
Oktave	$\frac{2}{1}$	reine Oktave	1200 Cent	1200 Cent

Tabelle 4: Merkhilfen, Intervall. Quelle http://de.wikipedia.org/wiki/Intervall_%28Musik%29

Intervall	steigend	fallend
übermäßige Prime = chromatischer Halbton	The Entertainer (Scott Joplin)	der Beginn der Ouvertüre des Musicals Das Phantom der Oper von Andrew Lloyd Webber
kleine Sekunde = diatonischer Halbton	Kommt ein Vogel geflogen	Vom Himmel hoch, da komm ich her (Mendelssohn) Für Elise (Beethoven)
große Sekunde	Alle meine Entchen	Schlaf, Kindlein, schlaf
kleine Terz	Ein Vogel wollte Hochzeit machen Macht hoch die Tür	Hänschen klein Kuckuck, Kuckuck, ruft's aus dem Wald
große Terz	Oh, when the saints go marching in Alle Vögel sind schon da	Swing low, sweet chariot Nun ruhen alle Wälder (Dur) Beethovens Schicksalssinfonie: G-G-G-Es (indifferent, s. u.)
Quarte	O Tannenbaum Wir kamen einst von Piemont Love Me Tender (Elvis Presley)	Morgen, Kinder, wird's was geben Auf, du junger Wandersmann
Tritonus	Maria (West Side Story) Titelmelodie von Die Simpsons („ The Simpsons “)	In „Kommt ein Vogel geflogen“: ...von der Mut-ter einen Gruß
Quinte	Wach auf, meins Herzens Schöne Morgen kommt der Weihnachtsmann (C-C-G-G)	On a wagon (Donna donna) Ick heff mol en Hamburger Veermaster sehn
kleine Sexte	When Israel was in Egypt's land	Schicksalsmelodie
große Sexte	Dies Bildnis ist bezaubernd schön Ein Prosit der Gemütlichkeit Arrivederci Roma Go West (Village People) My Bonnie is over the ocean	Nobody knows the trouble I've seen Winde weh'n, Schiffe geh'n
kleine Septime	There's a place for us (<i>Somewhere</i> aus West Side Story) Zogen einst fünf wilde Schwäne (Refrain: „Sing, sing“)	In „Bunt sind schon die Wälder“: ...und der He- erbst be -ginnt
große Septime	<i>O terra, addio</i> , Schlussduett aus Aida	Die Hütte auf Hühnerfüßen (Mussorgski - Bilder einer Ausstellung)
Oktave	Somewhere over the rainbow	Mainzer Narrhallamarsch

A Lösungen (Theorie)

A.1 Einführung

Zusammenhanf Frequenz und Wellenlänge:

$$f\lambda = c$$

	Feuerwehr nähert sich	Feuerwehr entfernt sich
Frequenz	Höher	Tiefer
	$f_v > f_n$	
Wellenlänge	$\lambda_v < \lambda_n$	

A.2 Wellenlängenänderung

Variablen:

v_Q : Geschwindigkeit der Feuerwehr

v_B : Geschwindigkeit des Beobachters (Sie bewegen sich nicht)

f_Q : Frequenz des Signalhorns

f_B : Frequenz beim Beobachter

Bekannt:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (1)$$

Wie lange dauert eine Periode:

$$T = \frac{1}{f} \quad (2)$$

$$T_Q = \frac{1}{f_Q} \quad (3)$$

Beachten Sie für die folgenden Schritte auch die Abbildungen 4 und 5. Welche Strecke wird in dieser Zeit (T_Q) zurück gelegt (Quelle bewegt sich gleichmässig):

$$v_Q = \frac{s}{\Delta t} = \frac{s}{T_Q} \quad (4)$$

$$s = v_Q T_Q \quad (5)$$

Quelle nähert sich Wellenlänge verkürzt sich aus Sicht des Beobachters um die zurückgelegte Strecke (s):

$$\lambda_B = \lambda_Q - s \quad (6)$$

$$\stackrel{(5)}{=} \lambda_Q - v_Q T_Q \quad (7)$$

A.3 Frequenzänderung

Gleichung (7) in Frequenzen ausdrücken (Gleichung (1) verwenden):

$$\frac{c}{f_B} = \frac{c}{f_Q} - v_Q T_Q \quad (8)$$

$$\stackrel{(3)}{=} \frac{c}{f_Q} - v_Q \frac{1}{f_Q} \quad (9)$$

$$= \frac{c}{f_Q} - \frac{v_Q}{f_Q} \quad (10)$$

$$= \frac{c - v_Q}{f_Q} \quad (11)$$

Gleichung (11) nach f_B auflösen:

$$c = \frac{c - v_Q}{f_Q} f_B \quad (12)$$

$$f_B = f_Q \frac{c}{c - v_Q} \quad (13)$$

A.4 Nachlaufende Welle, Quelle entfernt sich

In diesem Fall vergrößert sich die Wellenlänge aus Sicht des Beobachters. In Gleichung (7) wird das Minus zu einem Plus. Für das Ergebnis (Gleichung 13) folgt somit:

$$f_B = f_Q \frac{c}{c + v_Q} \quad (14)$$

Sie können sich dies auch Anhand der Abbildung 4 und 5 überlegen. Die Quelle schwingt mit der Schwingungsdauer T_Q . Während der Zeit T_Q bewegt sich die Quelle um eine Strecke $v_Q T_Q$ nach rechts und die 3. Wellenfront pflanzt sich um einen Abstand $c T_Q$ fort. Der Abstand zwischen der 3. Wellenfront (Kreis um Punkt 3 als Mittelpunkt) und der 4. Wellenfront (Punkt 4) ist vor der Quelle λ_v , nach der Quelle λ_n . Daraus folgt: $\lambda_n > \lambda > \lambda_v$ mit $\lambda_v = (c - v_Q) T_Q$ und $\lambda_n = (c + v_Q) T_Q$.

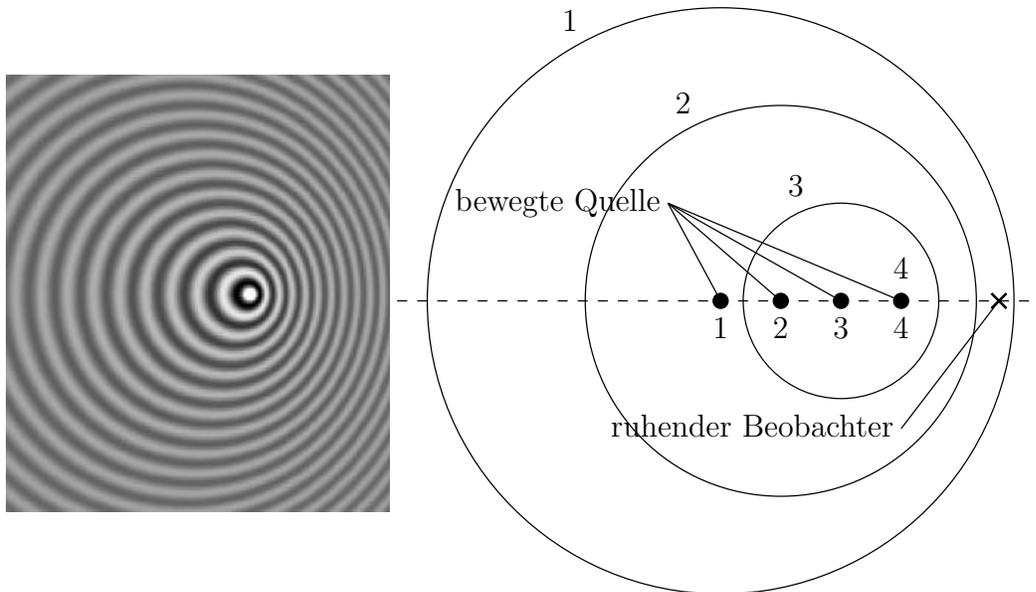


Abbildung 4: Bewegte Quelle. Die Nummern der Wellenfronten entsprechen den Positionen der Quelle, wo die Welle ausgestrahlt wurde.

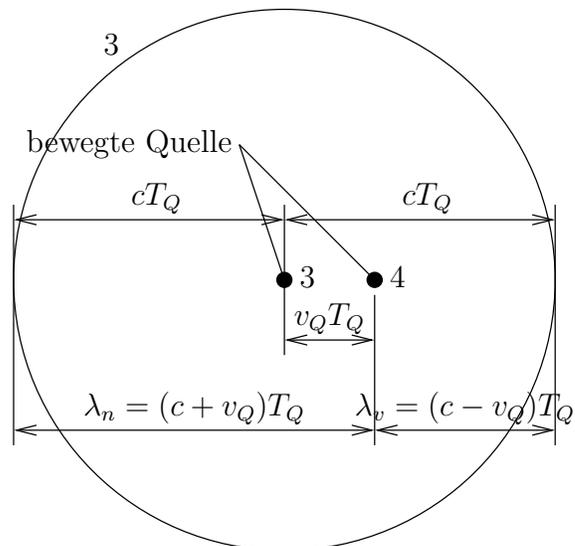


Abbildung 5: Die Quelle schwingt mit der Schwingungsdauer T_Q . Während der Zeit T_Q bewegt sich die Quelle um eine Strecke $v_Q T_Q$ nach rechts.

A.5 Frequenzverhältnis

Gleichung aufstellen für das Frequenzverhältnis und lösen nach v_Q :

$$\frac{f_{B_v}}{f_{B_n}} = \frac{\overbrace{cf_Q}^{\text{Gleichung (13)}}}{\underbrace{cf_Q}_{\text{Gleichung (14)}}} = \frac{cf_Q(c + v_Q)}{cf_Q(c - v_Q)} = \frac{c + v_Q}{c - v_Q} \quad (15)$$

Die Gleichung (15) nach v_Q lösen (mit $p = \frac{f_{B_v}}{f_{B_n}}$):

$$\frac{f_{B_v}}{f_{B_n}} = p = \frac{c + v_Q}{c - v_Q} \quad (16)$$

$$p(c - v_Q) = c + v_Q \quad (17)$$

$$pc - pv_Q = c + v_Q \quad (18)$$

$$pc - c = v_Q + pv_Q \quad (19)$$

$$c(p - 1) = v_Q(1 + p) \quad (20)$$

$$\frac{c(p - 1)}{1 + p} = v_Q \quad (21)$$