

Lösungen: Übungsblatt 7 zur Quantenelektronik I

Aufgabe 1 Weisslicht-Interferometer

- a) Für eine monochromatische Lichtquelle mit Frequenz ν wäre das Detektorsignal proportional zu $\cos^2 k\delta = \cos^2\left(\frac{2\pi\nu}{c}\delta\right)$. Bei der breitbandigen Quelle tragen die einzelnen Frequenzkomponenten unabhängig voneinander zur detektierten Intensität bei. Also werden einfach alle diese Leistungen addiert bzw. aufintegriert wie angegeben.

- b) Das detektierte Signal ist

$$P_{\text{det}} = \frac{P_{\text{in}}}{\Delta\nu\sqrt{\pi}} \cdot \int \exp\left[-\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu}\right)^2\right] \cos^2\left(\frac{2\pi\nu}{c}\delta\right) d\nu =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{P_{\text{in}}}{\Delta\nu\sqrt{\pi}} \cdot \int \exp\left[-\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu}\right)^2\right] \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi\nu}{c}\delta\right)\right) d\nu.$$

Der erste Teil ("1+") ergibt integriert die halbe eingestrahelte Leistung P_{in} . Für den Rest führen wir die Substitution $u = \nu - \nu_0$ durch und wenden das Additionstheorem für den Kosinus an:

$$P_{\text{det}} = \frac{1}{2} P_{\text{in}} + \frac{1}{2} \frac{P_{\text{in}}}{\Delta\nu\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{u}{\Delta\nu}\right)^2\right] \left(\cos\frac{4\pi\nu_0}{c}\delta \cdot \cos\frac{4\pi u}{c}\delta - \sin\frac{4\pi\nu_0}{c}\delta \cdot \sin\frac{4\pi u}{c}\delta\right) du$$

Hier trägt der sin-Term aus Symmetriegründen nichts zum Integral bei, während wir für den cos-Term die angegebene Integrationsformel verwenden. Damit kommen wir schliesslich zu

$$P_{\text{det}} = \frac{1}{2} P_{\text{in}} + \frac{1}{2} P_{\text{in}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{2\pi\delta \Delta\nu}{c}\right)^2\right] \cdot \cos\frac{4\pi\nu_0}{c}\delta.$$

(Bem.: Anstatt die angegebene Integrationsformel zu benutzen, könnte man auch die cos-Funktion in exp-Funktionen zerlegen.)

Und damit zu

$$P_{\text{det}} = \frac{1}{2} P_{\text{in}} \cdot \left(1 + \exp\left[-\left(\frac{2\pi\delta \Delta\nu}{c}\right)^2\right] \cdot \cos\frac{4\pi\nu_0}{c}\delta\right).$$

Daraus sehen wir sofort, dass wir bei Variation von δ eine starke Oszillation von P_{det}

bekommen, solange $\frac{2\pi|\delta|\Delta\nu}{c} \ll 1$, während der Interferenzkontrast für $\frac{2\pi\delta \Delta\nu}{c} \gg 1$

verschwindet. Je grösser $\Delta\nu$, desto früher verschwindet der Kontrast mit zunehmendem $|\delta|$.

- c) Wir haben gesehen, dass im Falle von zwei Spiegeln ein Interferenzsignal nur auftritt, wenn der Weglängenunterschied δ genügend klein ist. Ersetzen wir den einen Spiegel durch ein Bauteil, welches mehrere Reflexionen von verschiedenen Orten entlang des Strahls erzeugt, so bekommen wir eine Oszillation bei Variation von δ immer nur dann, wenn der Referenzspiegel an einer Stelle steht, dessen Position der einer reflektierenden Stelle im Bauteil entspricht. Im konkreten Fall haben wir eine Bandbreite

$$\Delta\nu = \left(\frac{c}{1545 \text{ nm}} - \frac{c}{1575 \text{ nm}} \right) \frac{1}{2\sqrt{\ln 2}} = 2.2 \text{ THz. (Man beachte, dass } \Delta\nu \text{ nicht die volle}$$

Halbwertsbreite der spektralen Leistungsdichte darstellt; die Klammer in der vorangehenden Gleichung entspricht der Halbwertsbreite des Gauss-Peaks.) Die

Ortsauflösung ergibt sich aus $\delta = \frac{c}{2\pi \Delta\nu} = 21 \text{ } \mu\text{m}$.

Eine Laufzeitmessung mit derselben Auflösung müsste ca. $\frac{2\delta}{c} = 140 \text{ fs}$ Zeitauflösung

haben (Hinweis: Der Weglängenunterschied δ wird zweimal durchlaufen). Das wäre mit optischen Methoden im Prinzip möglich, aber relativ aufwändig. Für die Weisslicht-Interferometrie wird kein Ultrakurzpuls-Laser benötigt, sondern nur ein einfacher Erbium-Faserverstärker als breitbandige Lichtquelle (sogenannte ASE-Quelle, ASE = "Amplified Spontaneous Emission").

Aufgabe 2 Matrix-Methode für die Berechnung von Vielschichtsystemen

- a) Wir verwenden die Beziehungen $E_{2+} = t_{12}E_{1+} - rE_{2-}$ und $E_{1-} = t_{21}E_{2-} + rE_{1+}$ mit den

Koeffizienten $t_{12} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$, $t_{21} = \frac{2n_2}{n_1 + n_2}$ und $r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$, die sich leicht aus den

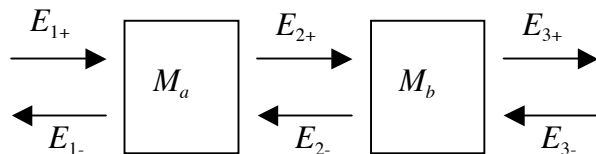
Formeln im Skript (Abschnitt 3.2.3) herleiten lassen. Durch einfache Umformung

erhalten wir $E_{2+} = (t_{12} + \frac{r^2}{t_{21}})E_{1+} - \frac{r}{t_{21}}E_{1-}$ und $E_{2-} = -\frac{r}{t_{21}}E_{1+} + \frac{1}{t_{21}}E_{1-}$. Daraus ergeben

sich die Koeffizienten $a = t_{12} + \frac{r^2}{t_{21}}$, $b = c = -\frac{r}{t_{21}}$ und $d = \frac{1}{t_{21}}$. Durch die

Brechungsindizes ausgedrückt ist dies $a = d = \frac{n_1 + n_2}{2n_2}$, $b = c = \frac{n_2 - n_1}{2n_2}$.

- b) Wenn Absorption auftritt, müssen wir die komplexen Brechungsindizes einsetzen: $n_1 \rightarrow \bar{n}_1 = n_1 - i\alpha_1/k = n_1 - i\alpha_1\lambda/2\pi$ und entsprechend für n_2 . Dies ändert die Reflexions- und Transmissions-Koeffizienten.
- c) In diesem Fall werden die "+"- und "-"-Komponenten nicht miteinander gekoppelt. Für ein nicht absorbierendes Medium haben wir lediglich Phasenfaktoren für die Propagation durch das Medium; mit Absorption kommen noch entsprechende Abschwächungsfaktoren hinzu. Verwenden wir die Vorzeichenkonvention aus dem Skript, erhalten wir damit $a = \exp(-ik_n L_d - \alpha L_d)$, $b = c = 0$ und $d = \exp(+ik_n L_d + \alpha L_d)$ mit $k_n = 2\pi n/\lambda$. Hier wird also k_n aus dem reellen Brechungsindex berechnet; alternativ könnten wir den komplexen Brechungsindex einsetzen und den Term mit α weglassen.
- d) Matrizen wie oben hergeleitet verknüpfen die Amplituden der nach links und rechts laufenden Wellen auf beiden Seiten eines "Elements" (Grenzfläche oder Schicht). Betrachten wir zunächst ein System aus zwei Elementen mit Matrizen M_a bzw. M_b , wie rechts gezeichnet.



Wir haben dann $\begin{pmatrix} E_{3+} \\ E_{3-} \end{pmatrix} = M_b \cdot \begin{pmatrix} E_{2+} \\ E_{2-} \end{pmatrix} = M_b \cdot M_a \cdot \begin{pmatrix} E_{1+} \\ E_{1-} \end{pmatrix}$. Das Gesamtsystem wird also beschrieben durch die Matrix $M = M_b \cdot M_a$ (nicht umgekehrt!). Für ein dielektrisches Vielschichtsystem haben wir dann ein Produkt von vielen Matrizen, die abwechselnd eine Grenzfläche und eine Schicht beschreiben.

Für die Berechnung der Reflektivität und Transmission gehen wir aus von der Matrix

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ für das Gesamtsystem und bezeichnen die Amplituden auf beiden Seiten

wieder mit E_{1+} , E_{1-} , E_{2+} und E_{2-} . Wenn z. B. ein Strahl von links aus Luft auf eine Spiegelschicht auftritt, die auf einem Substrat aufgebracht ist, ist $n_1 \approx 1$ und n_2 der Brechungsindex des Substrats. Wir setzen nun zunächst $E_{1+} = 0$ und erhalten $E_{2-} = dE_{1-}$,

woraus sich die Leistungs-Transmission $T = \frac{\frac{1}{2Z_1}|E_{1-}|^2}{\frac{1}{2Z_2}|E_{2-}|^2} = \frac{n_1|E_{1-}|^2}{n_2|E_{2-}|^2} = \frac{n_1}{n_2|d|^2}$ ergibt. Dies

gilt zunächst für die Transmission "von rechts nach links". Für die andere Richtung erhält

man auf ähnliche Weise $T = \frac{n_2|E_{2+}|^2}{n_1|E_{1+}|^2} = \frac{n_2}{n_1|a - bc/d|^2}$ (wobei wir $E_{2-} = 0$ gesetzt

haben); man kann zeigen, dass diese beiden Formeln für jedes Vielschichtsystem die

gleichen Resultate bringen. Die Reflektivität "von rechts" ist $R_2 = \frac{|E_{2+}|^2}{|E_{2-}|^2} = \left| \frac{b}{d} \right|^2$, und

diese stimmt für absorbierende Schichtsysteme im allgemeinen *nicht* überein mit der Reflektivität R_1 "von links", die wir folgendermassen erhalten: Wir setzen

$E_{2-} = cE_{1+} + dE_{1-} = 0$, so dass $R_1 = \frac{|E_{1+}|^2}{|E_{1-}|^2} = \left| \frac{c}{d} \right|^2$. Diese Asymmetrie der Reflektivitäten,

die natürlich nur für ein absorbierendes System auftreten kann, können wir leicht an einem Beispiel finden: Nehmen wir einen hochreflektierenden Spiegel und links davon einen Absorber. Diese Anordnung ist von rechts, aber nicht von links hoch reflektierend, während die Transmission in beiden Richtungen gleich ist. Ein praktisches Beispiel hierfür sind verspiegelte Sonnenbrillen.

Zur Berechnung der Gruppenlaufzeit: Aus den Matrixkomponenten lässt sich auch die Phasenverschiebung des transmittierten und des reflektierten Strahls berechnen (schliesslich gibt einem die Matrix auch die komplexen Amplituden-Reflexions- und Transmissionskoeffizienten). Daraus erhält man durch numerisches Differenzieren nach der Kreisfrequenz die Gruppenlaufzeit. Höhere Dispersionsordnungen können analog erhalten werden.