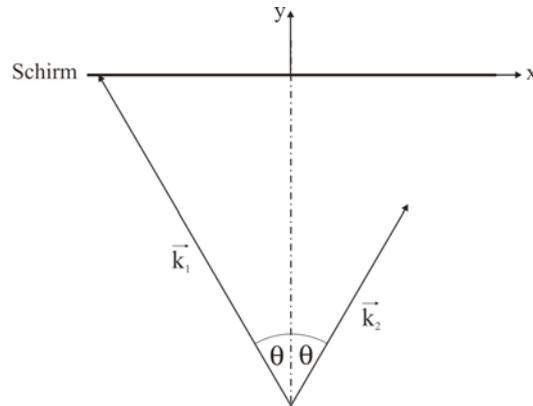


Lösungen: Übungsblatt 6 zur Quantenelektronik I

Aufgabe 1 Interferenz nichtkollinearer Wellen unterschiedlicher Frequenz



- a) Die elektrischen Felder schreiben wir als $E_1(\vec{r}, t) = A_1 e^{i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r} + \varphi_1)}$ und $E_2(\vec{r}, t) = A_2 e^{i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r} + \varphi_2)}$ mit (nach Wahl des obigen Koordinatensystems)

$$\vec{k}_1 = k_1 \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_1 = \frac{\omega_1}{c}), \quad \vec{k}_2 = k_2 \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_2 = \frac{\omega_2}{c}) \quad \text{und} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Somit ist das Interferenzmuster gegeben durch

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2Z} |E_1 + E_2|^2 = \frac{1}{2Z} (E_1 + E_2)(E_1^* + E_2^*) \\ &= \frac{1}{2Z} \left(A_1 e^{i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r} + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r} + \varphi_2)} \right) \left(A_1 e^{-i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r} + \varphi_1)} + A_2 e^{-i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r} + \varphi_2)} \right) \\ &= \frac{1}{2Z} \left(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\left((\omega_1 - \omega_2)t + (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \vec{r} + (\varphi_1 - \varphi_2) \right) \right) \end{aligned}$$

Die Intensitätsverteilung auf dem Schirm ($y = 0$) ist damit

$$I_x = \frac{1}{2Z} \left(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\left((\omega_1 - \omega_2)t + \sin\theta \cdot (k_2 + k_1)x + (\varphi_1 - \varphi_2) \right) \right)$$

und senkrecht dazu ($x = 0$)

$$I_y = \frac{1}{2Z} \left(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\left((\omega_1 - \omega_2)t + \cos\theta \cdot (k_2 - k_1)y + (\varphi_1 - \varphi_2) \right) \right).$$

- b) Modulationsperiode: $\Lambda = \frac{2\pi}{\Delta k_x} = \frac{2\pi}{\sin\theta \cdot (k_2 + k_1)}$

Das Interferenzmuster bewegt sich in der Zeit um eine Modulationsperiode, in der sich der Term $(\omega_1 - \omega_2)t$ um 2π verändert. Somit ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$v = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\frac{2\pi}{\Lambda}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\sin\theta \cdot (k_1 + k_2)} = c \cdot \frac{\omega_1 - \omega_2}{\sin\theta \cdot (\omega_1 + \omega_2)}.$$

- c) Wie oben benutzen wir $I = \frac{1}{2Z} |E_1 + E_2|^2$ und erhalten durch Einsetzen:

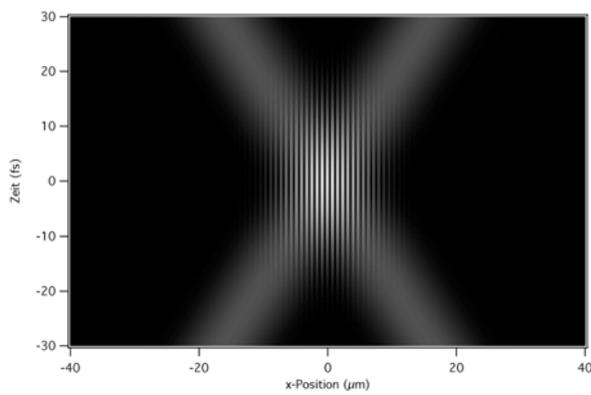
$$I = \frac{1}{2Z} \left(A_1^2 e^{-2\Gamma \left(t - \frac{1}{v_s} \frac{\vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \vec{r} \right)^2} + A_2^2 e^{-2\Gamma \left(t - \frac{1}{v_s} \frac{\vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \vec{r} - \tau \right)^2} + 2A_1 A_2 e^{-\Gamma \left(t - \frac{1}{v_s} \frac{\vec{k}_1}{|\vec{k}_1|} \vec{r} \right)^2} e^{-\Gamma \left(t - \frac{1}{v_s} \frac{\vec{k}_2}{|\vec{k}_2|} \vec{r} - \tau \right)^2} \cos\left((\omega_1 - \omega_2)t + (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \vec{r} + (\varphi_1 - \varphi_2) \right) \right)$$

und damit für die Intensitätsverteilung auf dem Schirm ($y = 0$)

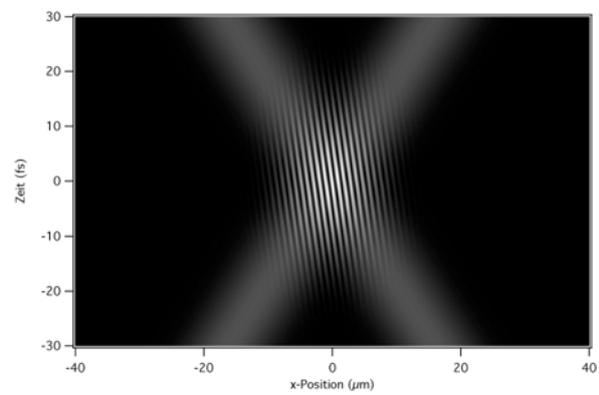
$$I_x = \frac{1}{2Z} \left(A_1^2 e^{-2\Gamma \left(t + \frac{x \sin \theta}{v_g} \right)^2} + A_2^2 e^{-2\Gamma \left(t - \frac{x \sin \theta}{v_g} - \tau \right)^2} + 2A_1 A_2 e^{-\Gamma \left(t + \frac{x \sin \theta}{v_g} \right)^2} e^{-\Gamma \left(t - \frac{x \sin \theta}{v_g} - \tau \right)^2} \cos \left((\omega_1 - \omega_2)t + \sin \theta \cdot (k_2 + k_1)x + (\varphi_1 - \varphi_2) \right) \right)$$

Man sieht, dass in dem zeitlichen und örtlichen Bereich, in dem die beiden Gausspulse überlappen, zeitlich veränderliche Interferenzstreifen (wie in a)) auftreten. Das Verhältnis von A_1 zu A_2 bestimmt den maximalen Kontrast des Interferenzmusters. Der Winkel θ bestimmt die Modulationsperiode und mit der Verzögerung τ lässt sich das Auftreten der Interferenzen nicht nur zeitlich verändern, sondern das Muster verschiebt sich auch noch seitwärts auf dem Schirm. Sind die Frequenzen ω_1 und ω_2 unterschiedlich, so erscheinen die Streifen in einem "Intensität vs. Zeit"-Graphen gekippt.

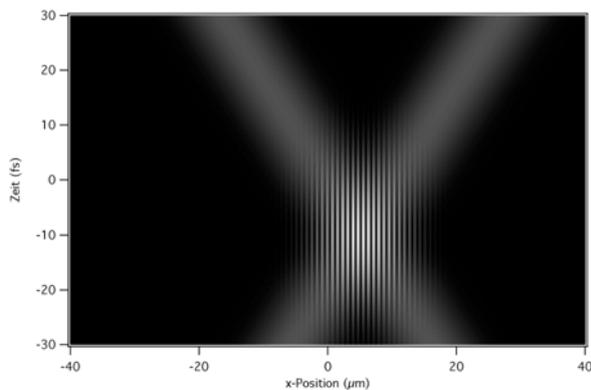
Unten sind ein paar Beispiele zu sehen, die für folgende Parameter (falls nicht anders angegeben) gerechnet wurden: $A_1 = A_2 = 1$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, 20 fs Pulsdauer, $\tau = 0$ fs, $v_g = 0.9c$, 800 nm Zentralwellenlänge und $\theta = 30^\circ$.



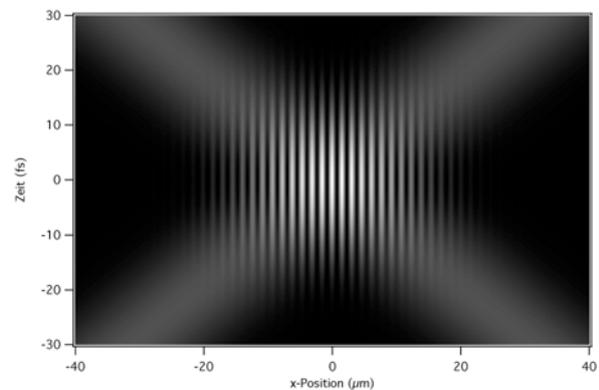
Parameter wie oben angegeben



Zentralwellenlänge eines Pulses = 1200 nm



Zeitverzögerung $\tau = 20$ fs



Einfallswinkel $\theta = 15^\circ$

Hinweis: In einem Medium mit intensitätsabhängigem Brechungsindex kann ein solch vorübergehendes Interferenzmuster dazu verwendet werden, um mittels Beugung (siehe Kapitel 5) an der entstehenden Brechungsindexmodulation optische Signale mit Femtosekunden Zeitauflösung zu schalten.

Aufgabe 2 Michelson-Interferometer

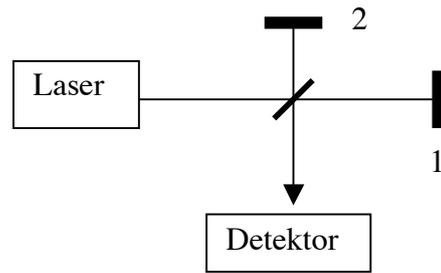
- a) Die komplexen Amplitudenbeiträge der beiden Arme am Detektor sind

$$E_1 = \frac{1}{2} E_0 e^{-2ikL_1} \quad \text{und} \quad E_2 = \frac{1}{2} E_0 e^{-2ikL_2}, \quad \text{wenn}$$

wir hier nicht interessierende Phasensprünge am Strahlteiler ignorieren. Die detektierte Leistung ist proportional zum Betragsquadrat der Summe der E -Felder. Damit ergibt sich $P_{\text{det}} \propto (1 + \cos 2k\delta)$ (mit $\delta = L_2 - L_1$) oder

$$\text{genauer } P_{\text{det}} = \frac{P_{\text{laser}}}{2} \cdot (1 + \cos(2k\delta)) = P_{\text{laser}} \cdot \cos^2(k\delta). \quad \text{Also kommen je nach Weg-}$$

unterschied 0 % bis 100 % der Leistung am Detektor an; der Rest geht zurück zum Laser.



- b) Wir modulieren die optische Weglängendifferenz, indem wir z. B. einen Spiegel auf einem vibrierenden Piezo montieren. (Alternativ könnten wir z. B. einen elektro-optischen Modulator in einem Arm installieren.) Die Amplitude der Vibration sei klein gegenüber einer Wellenlänge, damit das Interferenzmuster erhalten bleibt. Die Frequenz sei deutlich höher als die Frequenz der zu erwartenden Längenänderungen. Das Detektorsignal ist dann $P_{\text{det}}(t) \propto 1 + \cos(2k\delta + a \cdot \sin(\omega t - \varphi))$. Für kleine Amplitude a erhalten wir durch Taylor-Entwicklung der Funktion $\cos(2k\delta + x)$ in erster Ordnung um $x = 0$

$P_{\text{det}}(t) \propto 1 + \cos(2k\delta) - a \cdot \sin(2k\delta) \cdot \sin(\omega t - \varphi)$. Durch zeitliches Mitteln des Signals erhalten wir $\cos(2k\delta)$. Multiplizieren wir dagegen den oszillierenden Anteil elektronisch mit der ursprünglichen Modulation $\sin(\omega t - \varphi)$ und mitteln das Ergebnis, so erhalten wir eine Grösse proportional zu $a \cdot \sin(2k\delta)$. Da wir nun $\cos(2k\delta)$ und $\sin(2k\delta)$ kennen, können wir daraus den Phasenwinkel $2k\delta$ modulo 2π ermitteln. Auf diese Weise arbeiten industrielle Interferometer, die bei einer beliebigen (nur nicht zu schnellen) Vor- und Zurückbewegung eines Maschinenteils die Position auf Bruchteile eines Mikrometers genau messen können.

Bem.: Es genügt nicht, einfach die Amplitude der Modulation zu messen (statt des Verfahrens mit der Multiplikation), da man so nur $|\sin(2k\delta)|$ erhalten würde.

- c) Mit dem Verfahren aus Teil b) erhalten wir den Phasenwinkel nur modulo 2π , weil das Detektorsignal periodisch ist. Verwendet man zwei Wellenlängen gleichzeitig und detektiert die Signale zu beiden Wellenlängen mit verschiedenen Detektoren (unter Verwendung geeigneter Filter), so kann man zwei Werte $k_1\delta$ und $k_2\delta$ mit zwei unterschiedlichen (bekannten) k -Werten messen. Daraus lässt sich δ dann eindeutig ermitteln, zumindest innerhalb eines gewissen Längenbereichs.

Aufgabe 3 "Phased-Array"-Antenne

- a) In grossem Abstand von der Anlage haben wir am Empfänger von jeder einzelnen Antenne eine ebene Welle, und die Amplituden aller drei Beiträge sind etwa gleich, während die Phasen unterschiedlich sind. In Beobachtungsrichtung (Winkel φ , s. Zeichnung) ist die Phase des Beitrags von der oberen Antenne gegenüber dem der mittleren Antenne um $kd \sin \varphi + \omega \delta t$ verschoben, während für die untere Antenne der ganze Term das gegensätzliche Vorzeichen gilt. Damit ist die Intensität proportional zu $|1 + \exp[i(kd \sin \varphi + \omega \delta t)] + \exp[-i(kd \sin \varphi + \omega \delta t)]|^2 = |1 + 2 \cos(kd \sin \varphi + kc \delta t)|^2$.

- b) Die \cos -Funktion hat ein Maximum beim Argument 0, also für $d \sin \varphi = -c\delta t$, welches sich also offensichtlich durch Einstellung von δt ändern lässt. Ein kleiner Wert von d führt zu einer schwachen Winkelabhängigkeit. Ein sehr grosser Wert von d (mit $kd \gg 1$) ist aber ebenfalls ungünstig, weil dann viele Maxima auftreten. Am besten ist also eine Wahl von $kd \approx \pi/2$, was gleichbedeutend ist mit $d \approx \lambda/4$. Eine noch stärker gerichtete Abstrahlcharakteristik erreicht man durch Verwendung einer grösseren Anzahl von Einzelantennen.
- c) In der Tat lässt sich dieses Prinzip auch für Empfänger verwenden: Man führt die Signale aller drei Antennen elektronisch zusammen, nachdem man jeder eine entsprechende Zeitverzögerung aufgeprägt hat. Dadurch lässt sich die Empfindlichkeit für bestimmte Richtungen maximieren, ohne dass die Antenne bewegt wird.