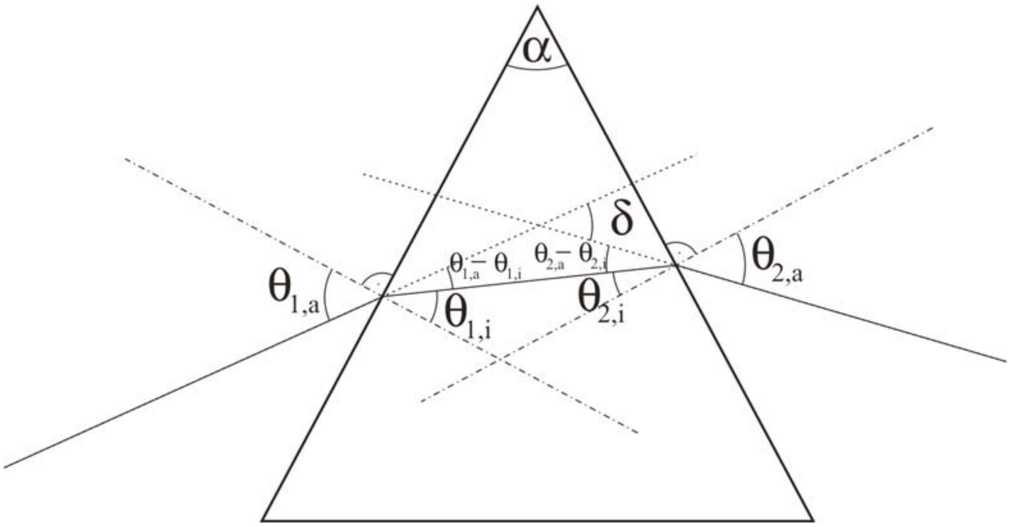
Lösungen: Übungsblatt 5 zur Quantenelektronik I

Aufgabe 1 Brewsterwinkel beim Prisma



a) Die Welle muss parallel zur Einfallsebene polarisiert sein (p-Polarisation). Nur für diese Polarisationsrichtung existiert der Brewsterwinkel.

b) Fällt der Strahl in obiger Skizze von links auf das Prisma ein, dann muss für die Minimierung der Reflexionsverluste $\theta_{1,a} = \theta_B = \arctan n$ gelten (Grenzfläche Luft/Glas). Ebenso muss der Strahl an der zweiten Grenzfläche unter Brewsterwinkel einfallen: $\theta_{2,i} = \arctan\frac{1}{n}$ (Grenzfläche Glas/Luft).

In der Vorlesung wurde im Abschnitt 3.3 gezeigt, dass $\theta_B + \theta_B' = \frac{\pi}{2}$.

Somit muss $\theta_{1,i} = \frac{\pi}{2} - \theta_{1,a} = \frac{\pi}{2} - \arctan n$ gelten.

Ganz allgemein ist bekannt, dass $\arctan\frac{1}{x} = \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ für positive x gilt.

Daraus folgt $\theta_{1,i} = \arctan\frac{1}{n} = \theta_{2,i}$. Ganz analog ergibt sich, dass $\theta_{1,a} = \theta_{2,a}$, womit gezeigt wurde, dass der Strahlengang durch das Prisma symmetrisch sein muss.

Alternativ hätte man auch mit der Zeitumkehrinvarianz der Wellengleichung argumentieren können, dass wenn der Strahl in einer Propagationsrichtung nur Brewsterwinkel "sieht", dann muss er auch in der entgegengesetzten, zeitumgekehrten Richtung nur Brewsterwinkel "sehen". Somit müssen die inneren und äusseren Einfallswinkel jeweils gleich sein und damit der Strahlengang durch das Prisma symmetrisch sein.

c) Aus obiger Skizze sieht man, dass $\alpha = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{1,i}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{2,i}\right) = \theta_{1,i} + \theta_{2,i} = 2\theta_B'$.

Ähnlich findet man $\pi - \delta = \pi - \left(\theta_{1,a} - \theta_{1,i}\right) - \left(\theta_{2,a} - \theta_{2,i}\right)$ und damit

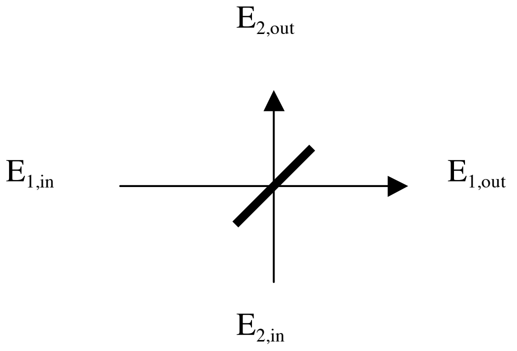
$\delta = \left(\theta_{1,a} - \theta_{1,i}\right) + \left(\theta_{2,a} - \theta_{2,i}\right) = 2\theta_B - 2\theta_B' = 4\theta_B - \pi$.

d) $\theta_{1,a} = \theta_B = \arctan n \approx 55.5^\circ$

$$\alpha = 2\theta_B' = 2\arctan\frac{1}{n} \approx 68.9^\circ$$

$$\delta = 4\theta_B - \pi = 4\arctan n - \pi = 42.1^\circ$$

Aufgabe 2 Strahlteiler



Wir stellen den teildurchlässigen Spiegel z. B. unter 45^0 zu den beiden Strahlen auf, die einen Winkel von 90^0 einschliessen.
Offensichtlich hängen die transmittierten und reflektierten Amplituden linear von den Amplituden der Eingänge ab, sind also durch Gleichungen der gegebenen Form miteinander verbunden.

a) Wir setzen $E_{2,\text{in}} = 0$ und fordern, dass die Summe der austretenden Leistungen der eingestrahlten Leistung entspricht: $\left|E_{1,\text{out}}\right|^2 + \left|E_{2,\text{out}}\right|^2 = \left|E_{1,\text{in}}\right|^2$, also $|a|^2 + |c|^2 = 1$ und entsprechend $|b|^2 + |d|^2 = 1$.

b) Mit $a = d = t$ und $b = c = r$ sind die obigen Bedingungen offensichtlich erfüllt, falls $|t|^2 + |r|^2 = 1$. Allerdings ist Energieerhaltung trotzdem nicht gegeben. Dazu nehmen wir an, dass $E_{1,\text{in}} = E_{2,\text{in}} = 1$, und erhalten

$$\left|E_{1,\text{out}}\right|^2 + \left|E_{2,\text{out}}\right|^2 = (t+r)^2 + (r+t)^2 = 2\cdot(t^2 + r^2 + 2rt) = 2(1+2rt) \neq 2 = \left|E_{1,\text{in}}\right|^2 + \left|E_{2,\text{in}}\right|^2 .$$

Das lässt sich beheben, indem man eines der Vorzeichen dreht, z. B. $E_{1,\text{out}} = tE_{1,\text{in}} + rE_{2,\text{in}}$ und $E_{2,\text{out}} = -rE_{1,\text{in}} + tE_{2,\text{in}}$. Dann gilt nämlich

$$\left|E_{1,\text{out}}\right|^2 + \left|E_{2,\text{out}}\right|^2 = (t+r)^2 + (-r+t)^2 = 2\cdot(t^2 + r^2) = 2 = \left|E_{1,\text{in}}\right|^2 + \left|E_{2,\text{in}}\right|^2 .$$

Dieses Resultat bedeutet, dass einer der Strahlen bei der Reflexion einen Phasensprung von π erfährt, der andere dagegen nicht. Diese zunächst erstaunlich erscheinende Asymmetrie wird verständlich, wenn man sich ein genaueres Bild z. B. von einem Spiegel macht, der aus einer dielektrischen Spiegelschicht auf einem Glassubstrat besteht. (Die Rückseite sollte entspiegelt sein.) Dann trifft nämlich einer der einfallenden Strahlen aus Luft auf die Spiegelschicht, während der andere aus dem Glas kommt. Der benötigte Phasensprung ist konsistent mit den in Kapitel 3, Abschnitt 3.2.3, Tabelle 1 erhaltenen Phasensprüngen.
Übrigens wäre auch $E_{1,\text{out}} = tE_{1,\text{in}} + irE_{2,\text{in}}$ und $E_{2,\text{out}} = irE_{1,\text{in}} + tE_{2,\text{in}}$ ($i =$ imaginäre Einheit) eine mögliche Lösung.

Aufgabe 3 Reflexion an einer Metalloberfläche

a) Gemäss Skript (siehe Abschnitt 3.2.3) gilt bei senkrechtem Einfall

$$R = \left|\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right|^2 = \left|\frac{1-n}{1+n}\right|^2 .$$

Für $\omega > \omega_{pl}$ ist $n(\omega) = n_r + i n_i = \sqrt{1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}}$ reell, also $R = \left(\frac{1-n_r}{1+n_r}\right)^2$.

Für $\omega < \omega_{pl}$:

$$R = \left|\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right|^2 = \left|\frac{1-n}{1+n}\right|^2 = \left|\frac{1-in_i}{1+in_i}\right|^2 = \frac{(1-in_i)(1+in_i)}{(1+in_i)(1-in_i)} = 1 .$$

Aus diesem Grund haben Metalle für Frequenzen unterhalb der Plasmafrequenz ausgezeichnete Reflexionseigenschaften und werden deshalb für Spiegelbeschichtungen verwendet. Der genaue Wert der Plasmafrequenz bestimmt über diese Reflexionseigenschaften übrigens auch die wahrgenommene Farbe eines Metalls.

b) $\omega_{pl} = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e}} \approx 1.38 \cdot 10^{16}\, s^{-1}$

$$\lambda_{pl} = \frac{2\pi c}{\omega_{pl}} = 136.3 \text{ nm}$$

$R(\lambda = 125 \text{ nm}) \approx 18.5\%$ ($n(125 \text{ nm}) = n_r(125 \text{ nm}) \approx 0.3988$)

$R(\lambda = 145 \text{ nm}) = 1$