Lösungen: Übungsblatt 1 zur Quantenelektronik I

Aufgabe 1 Wellengleichung für das Magnetfeld

- a) Aus den Maxwell-Gleichungen mit $j = 0$ und $\rho_{\text{frei}} = 0$ haben wir

$$\text{rot rot } \vec{B} = \mu\mu_0\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E} = -\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}.$$

Andererseits gilt $\text{rot rot } \vec{B} = \text{grad div } \vec{B} - \text{div grad } \vec{B}$, wobei $\text{div grad } \vec{B} = \Delta \vec{B}$ und $\text{div } \vec{B} = 0$.

Aus beidem zusammen folgt die gesuchte Wellengleichung $\Delta \vec{B} - \mu\mu_0\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = 0$.

- b) Die Ausbreitung erfolgt in y-Richtung, was man am Term $\sin(\omega t - ky + \varphi)$ sieht: z. B. für einen Wellenberg ist $\omega t - ky$ konstant, also muss y mit t zunehmen.

Für die Berechnung des E-Felds wählen wir den Ansatz $\vec{E} = E_0 \sin(\omega t - ky + \varphi) \vec{e}_z$ und

verwenden $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$:

Aus $B_x = B_0 \sin(\omega t - ky + \varphi)$ folgt $\frac{\partial B_x}{\partial t} = B_0 \omega \cos(\omega t - ky + \varphi)$.

Ausdem ist $(\text{rot } \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -E_0 k \cos(\omega t - ky + \varphi)$.

Aus der x-Komponente von $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$ erhalten wir damit $E_0 = B_0 \omega / k = \frac{B_0}{\sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}}$.

Der Poynting-Vektor ist $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = E_0 \frac{B_0}{\mu\mu_0} \vec{e}_y$ für die Momente mit maximalen

Feldern, oder die Hälfte davon im zeitlichen Mittel.

Aufgabe 2 Feldstärke in Laserpulsen

- a) Aus $P(t) = \iint I(x, y, t) dx dy = 2\pi P(t) N \int_0^\infty \exp\left(-2 \frac{r^2}{w^2}\right) r dr = 2\pi P(t) N \frac{w^2}{4}$ ergibt

sich $N = (\pi w^2 / 2)^{-1}$.

- b) Die halbe Spitzen-Leistung ergibt sich für $(t / \tau)^2 = \ln 2$, also $t = \pm \tau \cdot \sqrt{\ln 2}$. Also ist die Halbwertsbreite $\tau_{\text{FWHM}} = \tau \cdot 2\sqrt{\ln 2} \approx 1.665 \cdot \tau$.

- c) Die Spitzen-Intensität ist $I_p = N \cdot P(0) = \frac{2P(0)}{\pi w^2} \approx 2.5 \cdot 10^{24} \text{ W/m}^2 = 2.5 \cdot 10^{20} \text{ W/cm}^2$.

Wegen $I_p = \langle |\vec{E} \times \vec{H}| \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$ ist die zugehörige Feldstärke $E = \sqrt{2I_p \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}} \approx$

44 TV/m. Das Elektron dagegen sieht die Feldstärke $E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^2} \approx 0.145 \text{ TV/m}$ vom

Atomkern, also deutlich weniger. Bei einer Intensität von ca. $2.8 \cdot 10^{15} \text{ W/cm}^2$ wird eine elektrische Feldstärke erreicht, die der inneratomaren entspricht.

- d) Der Strahlungsdruck ist $2I_p / c \approx 1.7 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$. Der Faktor 2 kommt daher, dass der Impuls des Lichts bei der Reflektion nicht vernichtet, sondern umgekehrt wird.
- e) Unter der Annahme eines 100 fs Rechteckspulses bewegt sich der Spiegel aus dem Ruhezustand um $s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 = \frac{1}{2} \frac{p \cdot A}{m} t^2 \approx 1.7 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}$. Trotz des enormen Strahlungsdrucks bewegt sich der Spiegel also auf Grund der kurzen Pulsdauer so gut wie gar nicht.