Lösungen: Übungsblatt 1 zur Quantenelektronik

Aufgabe 1 Wellengleichung für das Magnetfeld

a) Aus den Maxwell-Gleichungen mit $j = 0$ und $\rho_{\text{frei}} = 0$ haben wir

$$\text{rot rot } \vec{B} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E} = -\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} .$$

Andererseits gilt $\text{rot rot } \vec{B} = \text{grad div } \vec{B} - \text{div grad } \vec{B}$, wobei $\text{div grad } \vec{B} = \Delta\vec{B}$ und $\text{div } \vec{B} = 0$.

Aus beidem zusammen folgt die gesuchte Wellengleichung $\Delta\vec{B} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = 0$.

b) Die Ausbreitung erfolgt in y-Richtung, was man am Term $\sin(\omega t - ky + \varphi)$ sieht: z. B. für einen Wellenberg ist $\omega t - ky$ konstant, also muss y mit t zunehmen.

Für die Berechnung des E-Felds wählen wir den Ansatz $\vec{E} = E_0 \sin(\omega t - ky + \varphi)\vec{e}_z$ und verwenden $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$:

Aus $B_x = B_0 \sin(\omega t - ky + \varphi)$ folgt $\frac{\partial B_x}{\partial t} = B_0\omega \cos(\omega t - ky + \varphi)$.

Aussdem ist $(\text{rot } \vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -E_0 k \cos(\omega t - ky + \varphi)$.

Aus der x-Komponente von $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$ erhalten wir damit $E_0 = B_0\omega / k = \frac{B_0}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}$.

Der Poynting-Vektor ist $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = E_0 \frac{B_0}{\mu\mu_0} \vec{e}_y$ für die Momente mit maximalen Feldern, oder die Hälfte davon im zeitlichen Mittel.

Aufgabe 2 Feldstärke in Laserpulsen

a) Aus $P(t) = \iint I(x,y,t)\, dx\, dy = 2\pi P(t) N \int_0^\infty \exp\left(-2\, \frac{r^2}{w^2}\right) r\, dr = 2\pi P(t) N \frac{w^2}{4}$ ergibt sich $N = \left(\pi w^2 / 2\right)^{-1}$.

b) Die halbe Spitzen-Leistung ergibt sich für $(t/\tau)^2 = \ln 2$, also $t = \pm\tau \cdot \sqrt{\ln 2}$. Also ist die Halbwertsbreite $\tau_{\text{FWHM}} = \tau \cdot 2\sqrt{\ln 2} \approx 1.665 \cdot \tau$.

c) Die Spitzen-Intensität ist $I_{\text{p}} = N \cdot P(0) = \frac{2P(0)}{\pi w^2} \approx 2.5{\cdot}10^{24}$ W/m^2 = $2.5{\cdot}10^{20}$ W/cm^2.

Wegen $I_{\text{p}} = \left\langle \left|\vec{E} \times \vec{H}\right| \right\rangle = \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$ ist die zugehörige Feldstärke $E = \sqrt{2 I_{\text{p}} \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}} \approx$ 44 TV/m. Das Elektron dagegen sieht die Feldstärke $E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \approx 0.145$ TV/m vom

Atomkern, also deutlich weniger. Bei einer Intensität von ca. $2.8 \cdot 10^{15}\, W/cm^2$ wird eine elektrische Feldstärke erreicht, die der inneratomaren entspricht.

d) Der Strahlungsdruck ist $2I_\mathrm{p} / c \approx 1.7 \cdot 10^{16}$ Pa. Der Faktor 2 kommt daher, dass der Impuls des Lichts bei der Reflektion nicht vernichtet, sondern umgekehrt wird.

e) Unter der Annahme eines 100 fs Rechteckspulses bewegt sich der Spiegel aus dem Ruhezustand um $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 = \frac{1}{2}\frac{p \cdot A}{m}t^2 \approx 1.7 \cdot 10^{-3}\,\text{Å}$. Trotz des enormen Strahlungsdrucks bewegt sich der Spiegel also auf Grund der kurzen Pulsdauer so gut wie gar nicht.