Lösungen

1. Brechung der Symmetrie von SU(3) (flavour) und SU(2)(isospin)

a) Mit der Annahme der genauen SU (2) Isospinsymmetrie (folglich $m_u = m_d \neq m_s$) und mit den Hadronen Wellenfunktionen aus Aufgabe 2 von Übungsplat 5, erhält man die folgende Formeln:
für $\frac{1}{2}^+$ octet:

$$\begin{aligned} m_{(p,n)} &= m_0 + 3m_u && (1)\\ m_{(\Sigma^+,\Sigma^0,\Sigma^-)} &= m_0 + 2m_u + m_s && (2)\\ m_{\Lambda^0} &= m_0 + 2m_u + m_s && (3)\\ m_{(\Xi^0,\Xi^-)} &= m_0 + m_u + 2m_s && (4)\end{aligned}$$

für $\frac{3}{2}^+$ decuplet:

$$\begin{aligned} m_{(\Delta^{++},\Delta^+,\Delta^0,\Delta^-)} &= m_0 + 3m_u && (5)\\ m_{(\Sigma^{*+},\Sigma^{*0},\Sigma^{*-})} &= m_0 + 2m_u + m_s && (6)\\ m_{(\Xi^{*0},\Xi^{*-})} &= m_0 + m_u + 2m_s && (7)\\ m_{\Omega^-} &= m_0 + 3m_s && (8)\end{aligned}$$

b) Aus den vorhergehenden Formeln, erhält man die folgenden Relationen zwischen Massen von Baryonen mit unterschiedlichem Isospinwert (die aber dem gleichen SU(3) Multiplet gehören):

$$\frac{m_{(\Sigma^+,\Sigma^0,\Sigma^-)} + 3m_{\Lambda^0}}{2} = m_{(p,n)} + m_{(\Xi^0,\Xi^-)} \quad (9)$$

$$m_{\Omega^-} - m_{(\Xi^{*0},\Xi^{*-})} = m_{(\Xi^{*0},\Xi^{*-})} - m_{(\Sigma^{*+},\Sigma^{*0},\Sigma^{*-})} = m_{(\Sigma^{*+},\Sigma^{*0},\Sigma^{*-})} - m_{(\Delta^{*++},\Delta^{*+},\Delta^{*0},\Delta^{*-})} \quad (10)$$

Diese Relationen sind im Einklang mit den Experimenten. Z.B. die linke Seite von Formel (9) ergibt sich zu $\simeq 2.23GeV$, und die rechte Seite zu $\simeq 2.25GeV$.

c) Wenn Sie annehmen, dass die zustzliche Barionenmasseverschiebung nur vom $\Delta I = 1$ Brechungsterm $\mathcal{H}^{(1)}$ im Hamiltonian $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(1)}$ kommt, dann erhalten Sie mit dem W-R Theorem und den Tabellenwerten der CG Koeffizienten:

- für $I = \frac{1}{2}$ isospin doublet (p, n) von $\frac{1}{2}^+$ hadron flavour octet:

$$\delta m_p =< p|\mathcal{H}^{(1)}|p >=< \frac{1}{2}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\frac{1}{2}|1, 0 > \delta m_N = -\sqrt{\frac{1}{2}}\delta m_N \quad (11)$$

$$\delta m_n =< n|\mathcal{H}^{(1)}|n >=< \frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}|1, 0 > \delta m_N = \sqrt{\frac{1}{2}}\delta m_N \quad (12)$$

wobei δm_N das I_3 unabhängig reduzierte Matrixelement ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} m_p &= m_p^{(0)} - \delta m^{(1)} && (13)\\ m_n &= m_n^{(0)} + \delta m^{(1)} && (14)\end{aligned}$$

- für $I = 1$ isospin quartet $(\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-)$ von $\frac{3}{2}^+$ hadron flavour decuplet:

$$\delta m_{\Delta^{++}} =< \frac{3}{2}\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\frac{3}{2}|1, 0 > \delta m_\Delta = -\sqrt{\frac{3}{5}}\delta m_\Delta \quad (15)$$

$$\delta m_{\Delta^+} =< \frac{3}{2}\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\frac{1}{2}|1, 0 > \delta m_\Delta = \sqrt{\frac{1}{15}}\delta m_\Delta \quad (16)$$

$$\delta m_{\Delta^0} =< \frac{3}{2} - \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}|1, 0 > \delta m_\Delta = -\sqrt{\frac{1}{5}}\delta m_\Delta \quad (17)$$

$$\delta m_{\Delta^-} =< \frac{3}{2} - \frac{3}{2}, \frac{3}{2} - \frac{3}{2}|1, 0 > \delta m_\Delta = \sqrt{\frac{3}{15}}\delta m_\Delta \quad (18)$$

und:

$$\begin{aligned} m_{\Delta^{++}} &= m_{\Delta^{++}}^{(0)} + 3\delta m_\Delta^{(1)} && (19)\\ m_{\Delta^+} &= m_{\Delta^+}^{(0)} + \delta m_\Delta^{(1)} && (20)\\ m_{\Delta^0} &= m_{\Delta^0}^{(0)} - \delta m_\Delta^{(1)} && (21)\\ m_{\Delta^-} &= m_{\Delta^-}^{(0)} - 3\delta m_\Delta^{(1)} && (22)\end{aligned}$$

2. Nicht-abelsche SU(3)

Die Gell-Mann Matrizen (Generatoren) sind gegeben durch:

$$\left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2}\right] = i\sum_k f_{ijk}\frac{\lambda_k}{2}. \quad (23)$$

a) Zeigen Sie, dass die Struktur-Konstanten f_{abc} total antisymmetrisch sind.
Wie für die Pauli-Matrizen gilt: $Tr(\lambda_a\lambda_b) = 2\delta_{ab}$ mit (23) erhält man $Tr(\lambda_c[\lambda_a, \lambda_b]) = 4if_{abc}$. Antisymmetrisch in a, b ist klar. Für b, c gilt:

$$4if_{acb} = Tr(\lambda_b[\lambda_a, \lambda_c]) - Tr(\lambda_c[\lambda_a, \lambda_b]) = -4if_{abc}, \quad (24)$$

da $Tr(ABC) = Tr(CAB)$.

b) Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit Abzisse (λ_3) und Ordinate (λ_8) und tragen Sie die Punkte

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

ein, wobei

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

c) Bestimmen Sie λ_1 und λ_2 sowie die Transformation $G \rightleftarrows R$. (Tipp: λ_1, λ_2 und λ_3 sind ähnlich zu den Pauli-Matrizen.)
Pauli-Matrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Die Gell-Mann Matrizen sind eine Erweiterung auf 3x3-Matrizen der Pauli-Matrizen, somit erhalten wird:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Die Transformation erhält man durch eine einfachen Linearkombination von λ_1 und λ_2:

$$\frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2) \begin{pmatrix} G \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ G \end{pmatrix} \tag{29}$$

3. Parton-Verteilungen

a) Verwende $q^p(x) = q_v^p(x) + q_s^p(x)$ für $q = u, \bar{u}, d, \bar{d}, s, \bar{s}$, sowie $q_s^p(x) = \bar{q}_s^p(x)$ und $s_v^p(x) = \bar{s}_v^p(x) = 0$:

$$F_2^{ep} = x\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 u_v^p(x) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 d_v^p(x) + \left(\frac{4}{3}\right) q_s^p(x)\right) \tag{30}$$

b) Isospinsymmetrie:

$$d_v^p(x) = u_v^n(x) \tag{31}$$
$$u_v^p(x) = d_v^n(x) \tag{32}$$
$$u_s^p(x) = d_s^p(x) = s_s^p(x) = u_s^n(x) = d_s^n(x) = s_s^n(x) \tag{33}$$
$$\bar{u}_s^p(x) = \bar{d}_s^p(x) = \bar{s}_s^p(x) = \bar{u}_s^n(x) = \bar{d}_s^n(x) = \bar{s}_s^n(x) \tag{34}$$

c) Aus a) und b):

$$F_2^{en} = x\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 d_v^p(x) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 u_v^p(x) + \left(\frac{4}{3}\right) q_s^p(x)\right) \tag{35}$$

d) Wenn wir die beiden Strukturfunktionen voneinander abziehen, werden wir den Beitrag der Seequarks los:

$$F_2^{ep} - F_2^{en} = x\frac{1}{3}\left(u_v^p(x) - d_v^p(x)\right) \tag{36}$$

Wie erwartet, hat die Verteilung einen Peak bei $\frac{1}{3}$, jedes der Valenzquarks trägt also im Mittel $\frac{1}{3}$ des Protonimpulses.

e) Für kleine Impulsanteile x dominieren die Seequarks. Die Seeverteilung ist für beide Nukleonen dieselbe, wir erwarten also, dass $F_2^{en}/F_2^{ep} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Im entgegengesetzten Fall dominieren die Valenzquarks (ein einzelnes Quark trägt einen Grossteil des Gesamtimpulses, für den See bleibt nichts mehr übrig):

$$\frac{F_2^{en}}{F_2^{ep}} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \frac{u_v^p + 4d_v^p}{4u_v^p + d_v^p} \tag{37}$$

f) Wenn wir über die Diffenz der Quark- und Antiquarkverteilungen integrieren, so heben sich die Beiträge des Sees weg (es gibt gleich viele See-Antiquarks wie See-Quarks). Übrig bleibt die Wahrscheinlichkeit, bei irgendeinem Impuls ein Valenzquark zu finden, d.h. die Anzahl der Valenzquarks.

$$\int_0^1 [u(x) - \bar{u}(x)]dx = \int_0^1 u_v(x)dx = 2\ (p),\ 1\ (n) \tag{38}$$
$$\int_0^1 [d(x) - \bar{d}(x)]dx = \int_0^1 d_v(x)dx = 1\ (p),\ 2\ (n) \tag{39}$$
$$\int_0^1 [s(x) - \bar{s}(x)]dx = \int_0^1 s_v(x)dx = 0 \tag{40}$$