

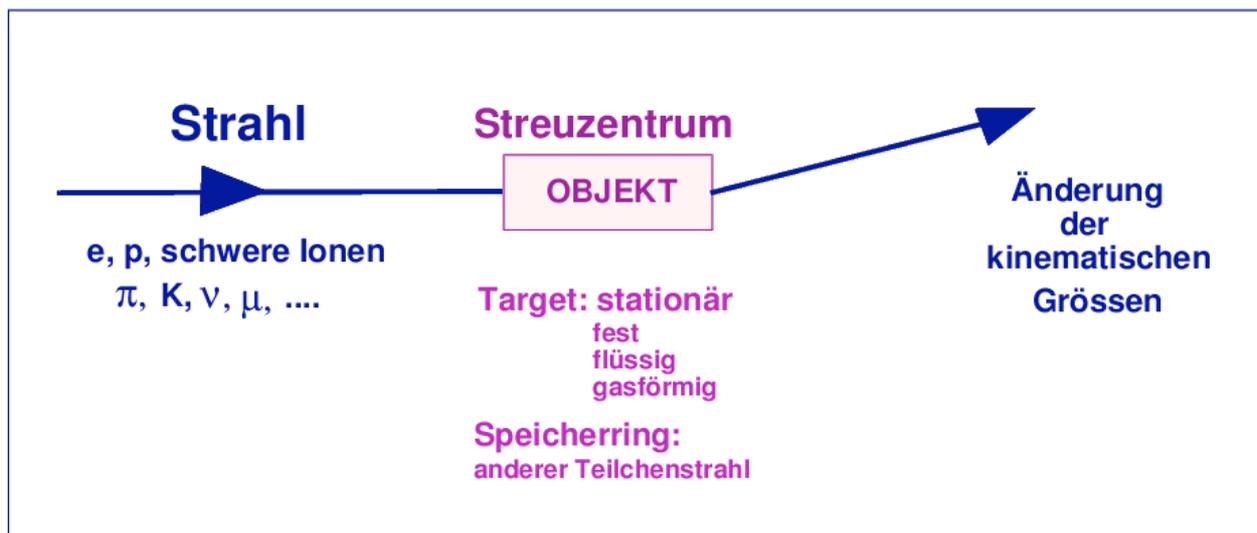
KAPITEL 2 :

Theoretische Konzepte

- 2.1 Einleitung: Streuexperimente**
- 2.2 Wirkungsquerschnitt**
- 2.3 Fermi Goldene Regel**
- 2.4 Wechselwirkungen - Kräfte**
- 2.5 Feynman Diagramme**
- 2.6 Teilchen und Antiteilchen**
- 2.7 Relativistische Wellengleichung für freie Teilchen**

Streuexperimente spielen wichtige Rolle in der Kern- und Teilchenphysik

- Details über Wechselwirkungen zwischen Teilchen
- Information über innere Struktur der Kerne und ihre Bausteine



Teilchenstrahlen sind

- "Sonden": zur Untersuchung der Struktur des Streuzentrums
- "Energiequellen": um beim Beschuss des Streuzentrums angeregte Zustände oder neue Teilchen zu erzeugen

Ausschlaggebende Grösse zur Erzeugung neuer Teilchen oder angeregter Zustände:

$$\text{Schwerpunktenergie: } E_{\text{CM}} = \sqrt{s}$$

Relativistische Transformationen

- Für die meisten Prozesse in der Teilchenphysik: Teilchen haben $v \sim c$
- Gesetze müssen invariant sein unter Lorentz-Transformationen (relativistische Kinematik !)
- Hier verwendete **Notation**: seien A und B zwei **Vierer-Vektoren**. Das Skalarprodukt ist definiert als

$$A \cdot B = A^\mu g_{\mu\nu} B^\nu = A_\nu B^\nu = A^\mu B_\mu = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$$

$\mu, \nu = 0$: Energie (oder Zeit) Komponente
 $\mu, \nu = 1, 2, 3$: Impuls (oder Raum) Komponente
 Konvention : **Summation über gleiche Indizes!**

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots \text{Metrischer Tensor}$$

- Energie-Impuls Vierervektor: p^μ mit $\mu = 0, 1, 2, 3$

Mit unserer Notation:

$$\left. \begin{array}{l} p^0 = E/c \\ p^1 = p_x \\ p^2 = p_y \\ p^3 = p_z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dots \text{E oder Zeitkomponente} \\ \dots \vec{p} \text{ oder Raumkomponente} \end{array}$$

- Relativistische Beziehung: $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$

Relativistisch invariante Grösse ($c = 1$):

$$p^2 = p \cdot p = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad (\text{Masse}^2 !)$$

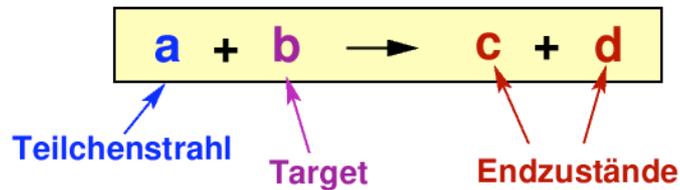
- Lorentz-Transformation: (betrachten Boost in z Richtung) :

$$p'^\mu = \Lambda_\nu^\mu p^\nu$$

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Zweiteilchenreaktion

Betrachte Zweiteilchenreaktion:



LABORSYSTEM	SCHWERPUNKTSSYSTEM
<p>Target ruht: $\vec{p}_b^{\text{LAB}} = 0$ $E_b^{\text{LAB}} = m_b c^2$</p>	<p>$\vec{p}_a^{\text{CM}} + \vec{p}_b^{\text{CM}} = 0$</p>

- Zweiteilchenreaktion:** $a + b \longrightarrow c + d$

Definitionen $p := (p_a + p_b)$, $s := p^2$, $M :=$ Gesamtmasse des Systems a,b

$$p^2 = M^2 c^4 = (E_a + E_b)^2 - (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2 \cdot c^2 \quad \text{Lorentz-invariant}$$

$$s = (E_a^{\text{CM}} + E_b^{\text{CM}})^2 = (E_{\text{CM}})^2 \quad (\text{Gesamtenergie im CM-System})^2$$

- Für $E_{a,b} \gg m_a c^2, m_b c^2$ d.h. $E_{a,b} \approx |\vec{p}_{a,b}|$:

Stationäres Target: $\sqrt{s} = \sqrt{2E_a^{\text{LAB}} m_b c^2}$

Speicherring: $\sqrt{s} = \sqrt{4E_a E_b}$ $\sqrt{s} = 2E$ für $E_a \simeq E_b, a = b$

→ effiziente Nutzung der Strahlenergie

2.2 Wirkungsquerschnitt

Mass für die Wahrscheinlichkeit einer Reaktion (damit Mass für die Stärke einer Wechselwirkung)
Abhängig von Art der kollidierenden Teilchen und der Kräfte, die zwischen ihnen wirken

Geometrischer Reaktionsquerschnitt : $\sigma_b = \frac{\dot{N}}{\Phi_a \cdot N_b}$

Gesamtzahl der Targetteilchen:
 $N_b = n_b A d$
 n_b : Dichte der Targetteilchen

Fluss Φ_a :
 $\Phi_a = \frac{\Delta N_a}{\Delta t A} = \frac{\dot{N}}{A} = n_a v_a$
mit $n_a = \frac{\Delta N_a}{\Delta x A} = \frac{\Delta N_a}{\Delta V}$

Reaktionsrate $\dot{N} = \Phi_a N_b \sigma_b$

A ...Frontfläche ● ... σ_b
überlagern nicht

- **Totaler Wirkungsquerschnitt σ_{tot}**

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\text{Reaktionsrate}}{\text{Fluss} \times \text{Zahl der Streuzentren}}$$

σ_{tot} ist physikalische Grösse mit Dimension einer Fläche:

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{elast}} + \sigma_{\text{inelast}}$$

$$1 \text{ barn} = 1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$$

- **Differentieller WQ** $\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}$ $\sigma_{\text{tot}} = \int \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} d\Omega$

- **Luminosität** $\mathcal{L} = \Phi_a \cdot N_b \longrightarrow \dot{N} = \sigma \cdot \mathcal{L}$

Im Speicherring: $\mathcal{L} = \frac{N_a N_b u}{A}$

u .. Umlauffrequenz mal Zahl der Teilchenpakete

A .. Strahlquerschnitt

Nichtrelativistische Quantenmechanik

Kurze Zusammenfassung der wesentlichen Befunde der Quantenmechanik nichtrelativistischer Systeme:

1. **Zustandsfunktion:** durch **komplexe Wellenfunktion** $\psi(q_i, s_i, t)$ dargestellt (q_i : (kanonische) Orts-Koordinate, s_i : Spin)
Wahrscheinlichkeitsdichte: $\rho = |\psi|^2 \geq 0$
2. Einer physikalischen **Observablen** des Systems entspricht ein linearer, hermitescher Operator Ω
Beispiel: **Impuls** entspricht **Gradientenoperator** $-i \frac{\partial}{\partial q_i}$

3. Eigenzustände Ψ_n zum Operator Ω , wenn gilt

$$\Omega \psi_n = \omega_n \psi_n \quad \omega_n \dots \text{Eigenwerte}$$

4. Eigenzustände bilden Orthonormalbasis, nach der sich jeder Zustand entwickeln lässt

$$\psi = \sum_n a_n \psi_n$$

5. Messungen einer Observablen liefert n -ten Eigenwert von Ω mit einer Wahrscheinlichkeit $|a_n|^2$
Erwartungswert einer Observablen:

$$\langle \Omega \rangle_\psi = \int (dq_i \dots) \psi^*(q_i, s_i, t) \Omega \psi(q_i, s_i, t)$$

$$\langle \Omega \rangle_\psi = \sum_s \sum_n |a_n|^2 \omega_n$$

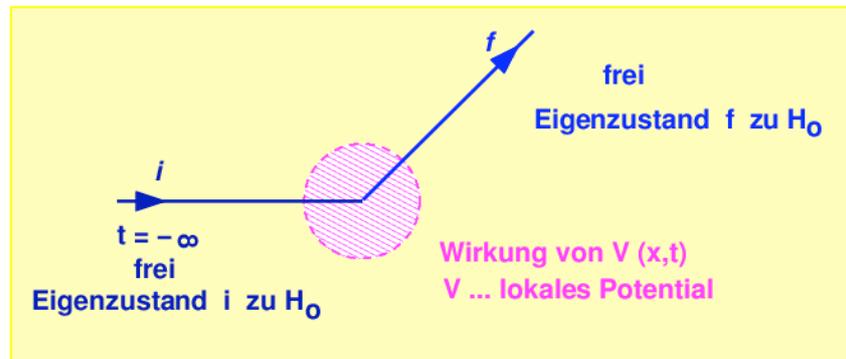
6. Zeitliche Entwicklung des Systems beschrieben durch Schrödinger Gleichung:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$$

Schrödinger Gleichung nicht Lorentz-invariant
nicht verwendbar zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung
relativistisch bewegter Systeme (siehe später)

Nichtrelativistische Störungstheorie

Betrachten nichtrelativistische Streuprozesse:
Einzelstreuung an lokalem Potential
vor und nach der Streuung: freies Teilchen



Teilchen ist frei bei $t = -\infty$ und bei $t = +\infty$
Potential wirkt nur bei $t \simeq 0$

→ Teilchen als Lösung der Schrödinger Gleichung für freie Teilchen beschreibbar

Ziel: Lösung der Schrödinger Gleichung für Teilchen, welches sich in Anwesenheit eines Wechselwirkungspotentials $V(x,t)$ bewegt

Annahme: Hamilton H_0 ist zeitunabhängig:
Lösung der Schrödinger Gleichung für freie Teilchen sind Eigenzustände ϕ_n zur Energie E_n :

$$H_0 \phi_n = E_n \phi_n$$

Suchen nach Lösungen für das durch $V(x,t)$ gestörte System:

$$(H_0 + V(x,t)) \phi = i \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

ϕ kann nach den Eigenzuständen ϕ_n des ungestörten Systems entwickelt werden:

$$\phi = \sum_n a_n(t) \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t}$$

$|a_n|^2$ Wahrscheinlichkeitsdichte der Eigenzustände ϕ_n

2.3 Fermi 'Goldene Regel'

Beziehung zwischen Übergangsrate W
Übergangsmatrixelement M_{fi}
Zustandsdichte $\rho(E')$

Quantenmechanische Störungstheorie:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho(E')$$

$$M_{fi} = \langle \psi_f | H_{\text{INT}} | \psi_i \rangle = \int \psi_f^*(x) H_{\text{INT}} \psi_i(x) dV$$

M_{fi} enthält die "Physik" des beobachteten Prozesses

H_{INT} ... Hamilton Operator: beschreibt Wechselwirkungs-Potential, also

$$H = H_0 + V(x, t) = H_0 + H_{\text{INT}}.$$

$$\rho(E') = \frac{dn(E')}{dE'} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi p'^2}{v'}$$

Für den Wirkungsquerschnitt erhält man:

$$\sigma = \frac{W \cdot V}{v_a} = \frac{2\pi}{\hbar v_a} |M_{fi}|^2 \rho(E') V$$

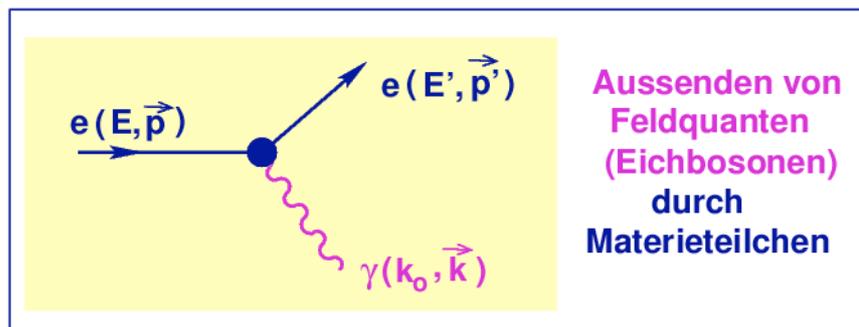
kennt man $M_{fi} \longrightarrow \sigma$ berechnen

Misst man $\sigma \longrightarrow M_{fi}$ bestimmen (und damit H_{INT})

Bemerkung: Goldene Regel gilt für Streuprozesse,
Zerfall von instabilen Teilchen,
Anregung von Teilchenresonanzen, etc.

2.4 Wechselwirkungen und Kräfte

- Nichtrelativistische QM: Schrödinger Gleichung
 —→ Bewegung eines punktförmigen Teilchens in einem äusseren Feld
 Quantenfeldtheorie: beschreibt Erzeugung und Vernichtung des Feldes, bzw. der Teilchen (Feldquanten)
- Mechanismus der Kraftübertragung (Wechselwirkung) :
 Beispiel



Energie–Impulserhaltung:

$$E^2 - \vec{p}^2 = (E' + k_0)^2 - (\vec{p}' + \vec{k})^2$$

$$m_e^2 = m_e^2 + m_\gamma^2 + 2E' k_0 - 2\vec{p}' \cdot \vec{k}$$

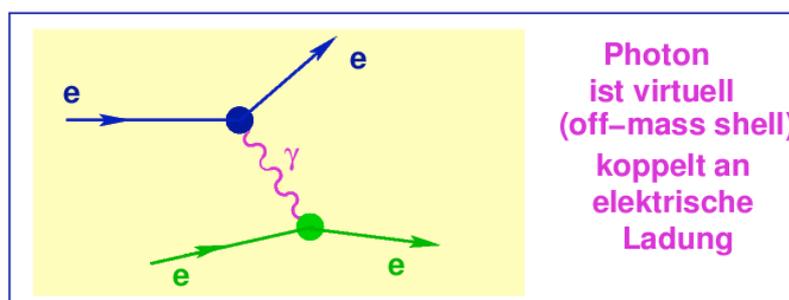
für reelles Photon $m_\gamma = 0$: $E' = |\vec{p}'| \cos \Theta$, d.h. $E' \leq |\vec{p}'|$: aber $m_e \neq 0$

—→ Kraft durch **virtuelles** Photon übertragen

Abstrahlung eines reellen Photons ($m_\gamma = 0$) so nicht möglich.

- können "virtuelle" Photonen als Darstellung eines Kraft- bzw. Potentialfeldes betrachten.
- Trifft ein virtuelles Photon auf weiteres e^- und wird von diesem absorbiert \implies Impulsübertragung von einem e^- auf das andere e^-

Da Kraft als Impulsänderung definiert ist, entspricht dies dem Mechanismus der Kraftübertragung:



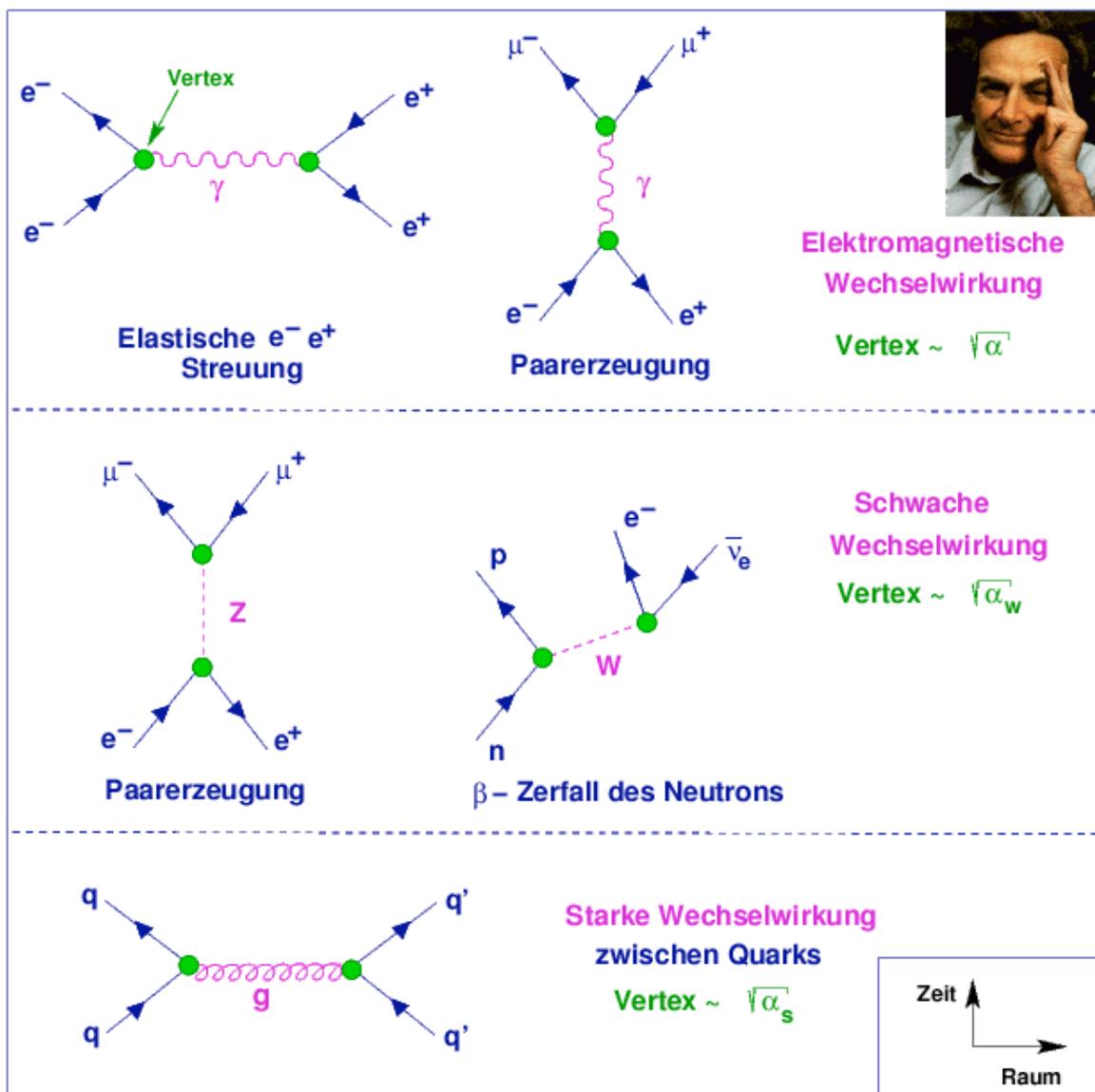
2.5 Feynman Diagramme

- Klassische Elektrodynamik: Feld E
Coulomb: $F = E(r) \cdot q$: Kraft(-Wirkung) ist beobachtbar,
Feld unbeobachtbar
- QED: WW durch Austausch virtueller (nicht beobachtbarer)
Feldquanten = Photonen

unbeobachtbares Feld \longleftrightarrow virtuelles Photon

- Graphische Darstellung: Feynman Diagramme
jedes Symbol in einem Raum-Zeit Graphen entspricht
einem Term in M_{fi} (Feynman Regeln)

R.Feynman
Nobelpreis 1965



2.6 Teilchen und Antiteilchen

Beginn 1900: 2 fundamentale neue Konzepte in der Physik:

- Relativität
- QM-Beschreibung der Phänomene auf atomarer und subatomarer Skala

Basierend auf diesen Konzepten hat Dirac 1931 **Antiteilchen** vorhergesagt

Antiteilchen: Objekte mit derselben Masse und Lebensdauer wie das entsprechende Teilchen, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen der Ladung

Relativistische Beziehung: $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$
—→ Gesamtenergie kann positive und negative Werte annehmen:

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Klassisch betrachtet: negative Energien für freie Teilchen sind bedeutungslos

Quantenmechanisch betrachtet: beschreiben z.B. einen e^- Strahl der sich mit Impuls \vec{p} entlang positiver x -Achse bewegt durch ebene Wellenfunktion:

$$\psi(x, t) = A e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et) / \hbar}$$

Formal jedoch beschreibt ψ auch ein Teilchen mit Energie $(-E)$ und Impuls $(-\vec{p})$, das in die negative x -Richtung geht und in umgekehrter Zeitrichtung $(-t)$:

d.h. ersetze $(E \cdot t)$ durch $(-E) \cdot (-t)$ und $(\vec{p} \cdot \vec{x})$ durch $(-\vec{p}) \cdot (-\vec{x})$

Beachte: positiver Ladungsfluss in eine Richtung entspricht negativem Ladungsfluss in umgekehrte Richtung.

Positron (e^+): 1932 von Anderson in kosmischer Strahlung entdeckt

Antiproton (\bar{p}): 1956 in Beschleunigerexperimenten nachgewiesen

Anti-Wasserstoff Atom: Bindungszustand von e^+ und \bar{p} :
1995 am CERN das 1. Mal nachgewiesen

2.7 Relativistische Wellengleichung (1)

- Verwenden $\hbar = c = 1$
- Nichtrelativistischer Fall: Schrödinger Gleichung

$$H \psi = E \psi \quad \text{und} \quad E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$$

Operatorsubstitution: $E \longrightarrow i \frac{\partial}{\partial t}$
 $\vec{p} \longrightarrow -i \frac{\partial}{\partial \vec{x}} = -i \vec{\nabla}$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{i}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi = 0$$

- > 1.Ableitung in Zeit, 2.Ableitung in Raumkoordinaten
- > **Schrödinger Gleichung ist nicht relativistisch invariant**

- Relativistischer Fall: Klein-Gordon Gleichung

Relativistischer Energiesatz: $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$
wird durch Operatorsubstitution zu:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \psi + m^2 \psi = 0$$

Klein-Gordon Gleichung ist relativistisch invariant und beschreibt Teilchen mit Spin 0 (skalare Bosonen)

Lösung : $\psi(x, t)$ ebene Welle: $\psi(x, t) = A e^{i(\vec{p}\vec{x} - Et)}$

Relativistische Wellengleichung (2)

Relativistischer Fall: Dirac Gleichung

Ziel von Dirac: Gleichungen linear in Ort und Zeit

- Beginnen wieder mit Schrödinger Gleichung und fordern Linearität in Ort und Zeit → allgemeine Form:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) \psi$$

- Relativistische Energiesatz muss erfüllt sein damit müssen die Lösungen ψ der Dirac Gleichung auch die Klein-Gordon Gleichung erfüllen:

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (\vec{p}^2 + m^2) \psi$$

- **Koeffizientenvergleich:** $(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)^2 = \vec{p}^2 + m^2$
erhalten somit Bedingungen für die Koeffizienten $\vec{\alpha}, \beta$

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1 \\ \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 0 \quad \text{für } i \neq j \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0 \end{aligned}$$

→ ψ ist eine 4-komponentige Wellenfunktion: **Dirac Spinor**
→ es gibt verschiedene Darstellungen der Vierer-Matrizen $\vec{\alpha}, \beta$:

- Pauli-Dirac Darstellung: $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Weyl Darstellung: $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

σ_i Pauli Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösungen der Dirac Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

kovariante Form

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta\vec{\alpha}) \dots \text{Dirac } \gamma\text{-Matrizen}$$

Die Dirac Gleichung ist ein Satz von vier gleichzeitig geltenden Gleichungen und muss daher vier Lösungen haben:
2 mit $E > 0$ und 2 mit $E < 0$

Separieren den Raum-Zeit-abhängigen Teil
schreiben die vier Lösungen von ebenen Wellen als:

$$\psi = u_r(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu}$$

$$\psi = v_r(\vec{p})e^{ip_\mu x^\mu}$$

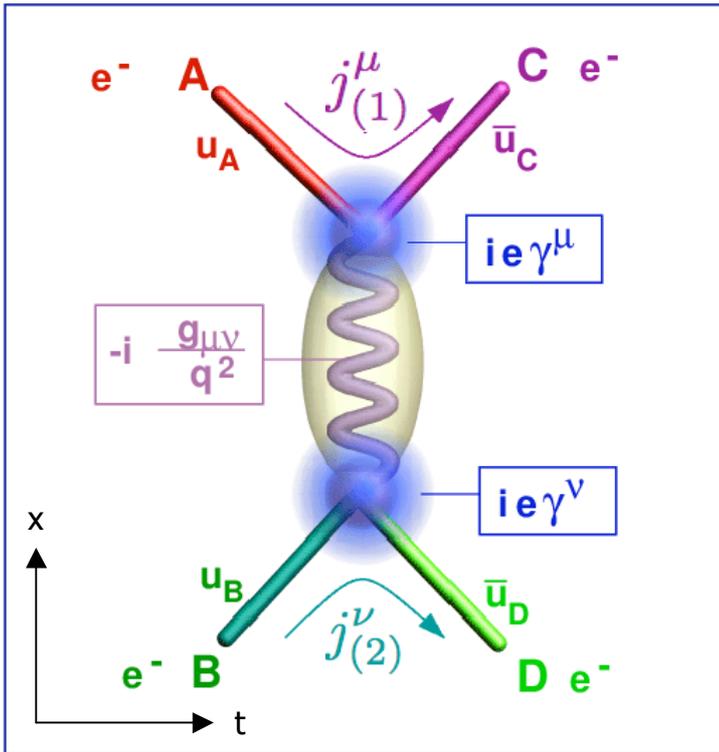
mit $\mu = 0, \dots, 3$ und $r = 1, 2$

u_r und v_r : vierkomponentige ortsunabhängige "Spinoren"

$u_{1,2}$ Teilchen mit Dreier-Impuls \vec{p} und Energie E
positiv-energetische Elektronenzustände mit 2
möglichen Spineinstellungen (\uparrow, \downarrow)
d.h. e^- mit halbzahligen Spin

$v_{1,2}$ Teilchen mit Dreier-Impuls $(-\vec{p})$ und Energie $(-E)$
 v_1, v_2 sind 2 Spinzustände mit negativen Energien,
d.h. e^+ mit halbzahligen Spin

Feynman Regeln für $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$



Strom von A \rightarrow C:
 $j_{(1)}^\mu = ie\bar{u}_C\gamma^\mu u_A$

Strom von B \rightarrow D:
 $j_{(2)}^\nu = ie\bar{u}_D\gamma^\nu u_B$

Photon Propagator:
 $-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$

$$-iM_{fi} = j_{(1)}^\mu \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right) j_{(2)}^\nu$$

- Zusammenhang: elektromagnetisches Potential A^μ und elektromagnetische Stromdichte j^μ aus Maxwell Gleichungen ($\partial^\nu \partial_\nu A^\mu = j^\mu$, und $A^\mu \propto e^{iq^\nu x_\nu}$):

$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} j^\mu$$

- e^- : Spin = $\frac{1}{2}$ Teilchen \rightarrow Dirac Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

kovariante Form

$\gamma^\mu = (\beta, \beta\vec{\alpha})$ Dirac γ -Matrizen

$\psi = u(\vec{p})e^{ip^\nu x_\nu}$ ebene Spinorwelle $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$

- Vertexfaktor $ie\gamma^\mu$: 4×4 Matrix im Raum der Spinoren

$$-iM_{fi} = (ie\bar{u}_C\gamma^\mu u_A) \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right) (ie\bar{u}_D\gamma^\nu u_B)$$