

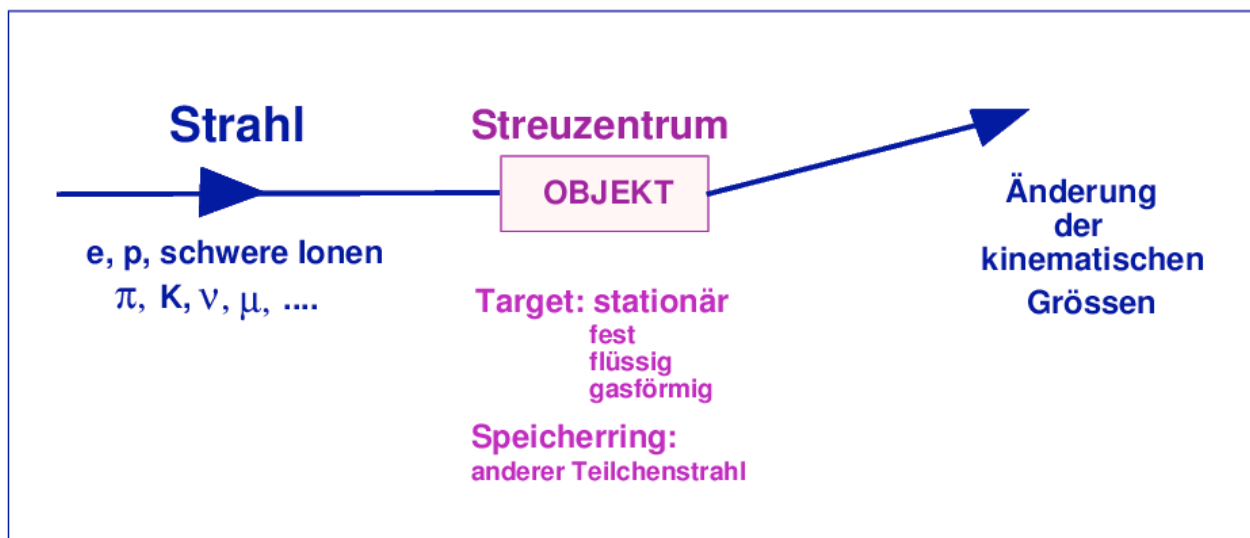
KAPITEL 2 :

Theoretische Konzepte

- 2.1 Einleitung: Streuexperimente**
- 2.2 Wirkungsquerschnitt**
- 2.3 Fermi Goldene Regel**
- 2.4 Wechselwirkungen - Kräfte**
- 2.5 Feynman Diagramme**
- 2.6 Teilchen und Antiteilchen**
- 2.7 Relativistische Wellengleichung für freie Teilchen**

Streuexperimente spielen **wichtige Rolle** in der Kern- und Teilchenphysik

- Details über Wechselwirkungen zwischen Teilchen
- Information über innere Struktur der Kerne und ihre Bausteine



Teilchenstrahlen sind

- **“Sonden”**: zur Untersuchung der Struktur des Streuzentrums
- **“Energiequellen”**: um beim Beschuss des Streuzentrums angeregte Zustände oder neue Teilchen zu erzeugen

Ausschlaggebende Grösse zur Erzeugung neuer Teilchen oder angeregter Zustände:

$$\text{Schwerpunktenergie: } E_{\text{CM}} = \sqrt{s}$$

Relativistische Transformationen

- Für die meisten Prozesse in der Teilchenphysik:
Teilchen haben $v \sim c$
- Gesetze müssen invariant sein unter
Lorentz-Transformationen (relativistische Kinematik !)
- Hier verwendete **Notation**: seien A und B zwei
Vierer-Vektoren. Das Skalarprodukt ist definiert als

$$A \cdot B = A^\mu g_{\mu\nu} B^\nu = A_\nu B^\nu = A^\mu B_\mu = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$$

$\mu, \nu = 0$: Energie (oder Zeit) Komponente
 $\mu, \nu = 1, 2, 3$: Impuls (oder Raum) Komponente
 Konvention : **Summation über gleiche Indizes!**

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots \text{Metrischer Tensor}$$

- Energie-Impuls Vierervektor: p^μ mit $\mu = 0, 1, 2, 3$

Mit unserer Notation:

$$\left. \begin{array}{lcl} p^0 & = & E/c \\ p^1 & = & p_x \\ p^2 & = & p_y \\ p^3 & = & p_z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dots \text{E oder Zeitkomponente} \\ \dots \vec{p} \text{ oder Raumkomponente} \end{array}$$

- Relativistische Beziehung: $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$

Relativistisch invariante Grösse ($c = 1$):

$$p^2 = p \cdot p = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad (\text{Masse}^2 !)$$

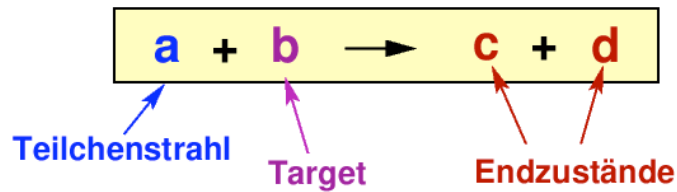
- Lorentz-Transformation: (betrachten Boost in z Richtung) :

$$p'^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu$$

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Zweiteilchenreaktion

Betrachte Zweiteilchenreaktion:



LABORSYSTEM	SCHWERPUNKTSSYSTEM
Target ruht: $\vec{p}_b^{\text{LAB}} = 0$ $E_b^{\text{LAB}} = m_b c^2$	$\vec{p}_a^{\text{CM}} + \vec{p}_b^{\text{CM}} = 0$

- Zweiteilchenreaktion:** $a + b \longrightarrow c + d$

Definitionen $p := (p_a + p_b)$, $s := p^2$, $M :=$ Gesamtmasse des Systems a,b

$$p^2 = M^2 c^4 = (E_a + E_b)^2 - (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2 \cdot c^2 \quad \text{Lorentz-invariant}$$

$$s = (E_a^{\text{CM}} + E_b^{\text{CM}})^2 = (E_{\text{CM}})^2 \quad (\text{Gesamtenergie im CM-System})^2$$

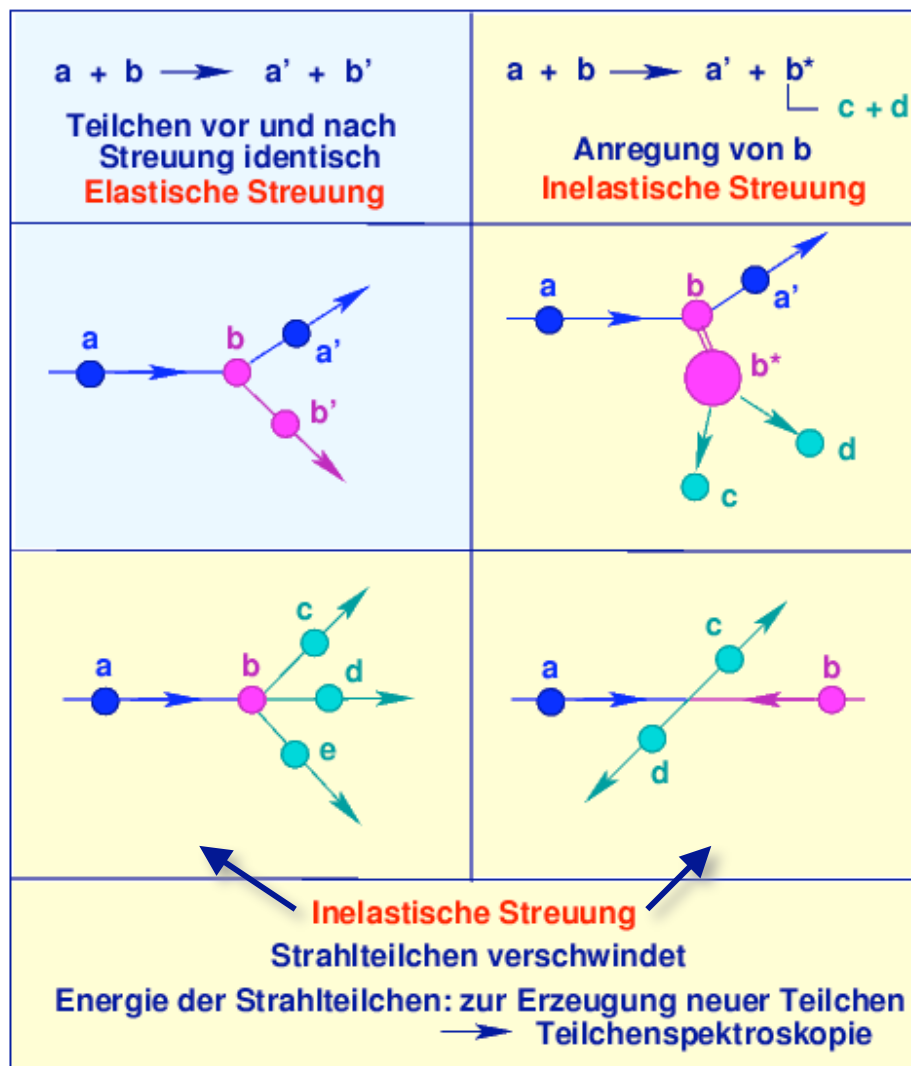
- Für $E_{a,b} \gg m_a c^2, m_b c^2$ d.h. $E_{a,b} \approx |\vec{p}_{a,b}|$:

Stationäres Target: $\sqrt{s} = \sqrt{2E_a^{\text{LAB}} m_b} c$

Speicherring: $\sqrt{s} = \sqrt{4E_a E_b}$ $\sqrt{s} = 2E$ für $E_a \simeq E_b, a = b$

→ effiziente Nutzung der Strahlenergie

Elastische – Inelastische Streuung



Elastische Streuung

- Information über **räumliche Form** des Objekts, an dem gestreut wird, bzw. des Wechselwirkungs-Potentials: Variation der Streudaten mit E_{Strahl} und Streuwinkel

De-Broglie Wellenlänge: $\lambda = \lambda/2\pi$

$$\lambda = \frac{\hbar}{|\vec{p}|} = \frac{\hbar c}{\sqrt{(2mc^2 E_{\text{kin}} + E_{\text{kin}}^2)}}$$

- **Auflösung** von linearer Ausdehnung Δx : $\lambda < \Delta x$

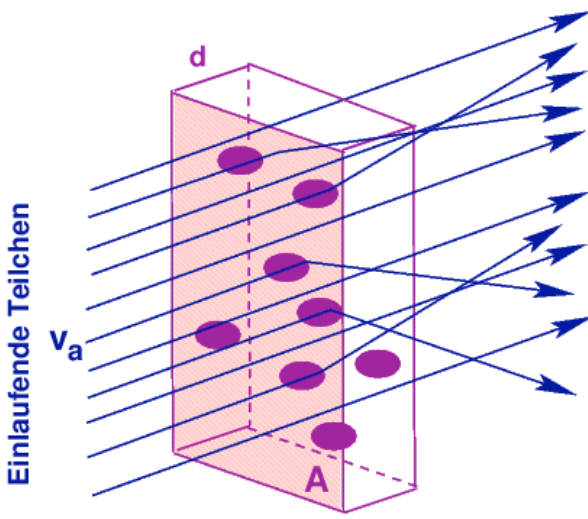
$$|\vec{p}|c \geq \frac{\hbar c}{\Delta x} \sim \frac{200 MeV \cdot fm}{\Delta x}$$

2.2 Wirkungsquerschnitt

Mass für die Wahrscheinlichkeit einer Reaktion (damit Mass für die Stärke einer Wechselwirkung)

Abhängig von Art der kollidierenden Teilchen und der Kräfte, die zwischen ihnen wirken

Geometrischer Reaktionsquerschnitt : $\sigma_b = \frac{\dot{N}}{\Phi_a \cdot N_b}$



Einlaufende Teilchen v_a

d

A ...Frontfläche

$\bullet \dots \sigma_b$
überlagern nicht

Gesamtzahl der Targetteilchen:
 $N_b = n_b A d$
 n_b : Dichte der Targetteilchen

Fluss Φ_a :
 $\Phi_a = \frac{\Delta N_a}{\Delta t A} = \frac{\dot{N}}{A} = n_a v_a$
mit $n_a = \frac{\Delta N_a}{\Delta x A} = \frac{\Delta N_a}{\Delta V}$

Reaktionsrate $\dot{N} = \Phi_a N_b \sigma_b$

- **Totaler Wirkungsquerschnitt** σ_{tot}

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\text{Reaktionsrate}}{\text{Fluss} \times \text{Zahl der Streuzentren}}$$

σ_{tot} ist physikalische Grösse mit Dimension einer Fläche:

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{elast}} + \sigma_{\text{inelast}}$$

$$1 \text{ barn} = 1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$$

- **Differentieller WQ** $\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}$ $\sigma_{\text{tot}} = \int \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} d\Omega$

- **Luminosität** $\mathcal{L} = \Phi_a \cdot N_b \longrightarrow \dot{N} = \sigma \cdot \mathcal{L}$

Im Speicherring: $\mathcal{L} = \frac{N_a N_b u}{A}$

u .. Umlauffrequenz mal Zahl der Teilchenpakete

A .. Strahlquerschnitt

Nichtrelativistische Quantenmechanik

Kurze Zusammenfassung der wesentlichen Befunde der Quantenmechanik nichtrelativistischer Systeme:

1. Zustandsfunktion: durch komplexe Wellenfunktion $\psi(q_i, s_i, t)$ dargestellt (q_i : (kanonische) Orts-Koordinate, s_i : Spin)
Wahrscheinlichkeitsdichte: $\rho = |\psi|^2 \geq 0$
2. Einer physikalischen Observablen des Systems entspricht ein linearer, hermitescher Operator Ω
Beispiel: Impuls entspricht Gradientenoperator $-i \frac{\partial}{\partial q_i}$

3. Eigenzustände Ψ_n zum Operator Ω , wenn gilt

$$\Omega \psi_n = \omega_n \psi_n \quad \omega_n \dots \text{Eigenwerte}$$

4. Eigenzustände bilden Orthonormalbasis, nach der sich jeder Zustand entwickeln lässt

$$\psi = \sum_n a_n \psi_n$$

5. Messungen einer Observablen liefert n -ten Eigenwert von Ω mit einer Wahrscheinlichkeit $|a_n|^2$
Erwartungswert einer Observablen:

$$\langle \Omega \rangle_\psi = \sum_s \int (dq_i \dots) \psi^*(q_i, s_i, t) \Omega \psi(q_i, s_i, t)$$

$$\langle \Omega \rangle_\psi = \sum_s \sum_n |a_n|^2 \omega_n$$

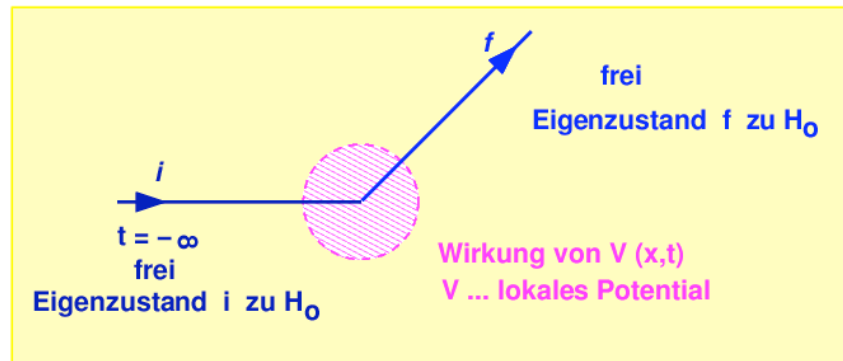
6. Zeitliche Entwicklung des Systems beschrieben durch Schrödinger Gleichung:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$$

Schrödinger Gleichung nicht Lorentz-invariant
nicht verwendbar zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung
relativistisch bewegter Systeme (siehe später)

Nichtrelativistische Störungstheorie

Betrachten nichtrelativistische Streuprozesse:
Einzelstreuung an lokalem Potential
vor und nach der Streuung: freies Teilchen



Teilchen ist frei bei $t = -\infty$ und bei $t = +\infty$
Potential wirkt nur bei $t \simeq 0$

→ Teilchen als Lösung der Schrödinger Gleichung für freie Teilchen beschreibbar

Ziel: Lösung der Schrödinger Gleichung für Teilchen, welches sich in Anwesenheit eines Wechselwirkungspotentials $V(x,t)$ bewegt

Annahme: Hamilton H_0 ist zeitunabhängig:
Lösung der Schrödinger Gleichung für freie Teilchen sind
Eigenzustände ϕ_n zur Energie E_n :

$$H_0 \phi_n = E_n \phi_n$$

Suchen nach Lösungen für das durch $V(x,t)$ gestörte System:

$$(H_0 + V(x,t)) \phi = i \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

ϕ kann nach den Eigenzuständen ϕ_n des ungestörten Systems entwickelt werden:

$$\phi = \sum_n a_n(t) \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t}$$

$|a_n|^2 \dots$ Wahrscheinlichkeitsdichte der Eigenzustände ϕ_n

2.3 Fermi 'Goldene Regel'

Beziehung zwischen Übergangsrate W
Übergangsmatrixelement M_{fi}
Zustandsdichte $\rho(E')$

Quantenmechanische Störungstheorie:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho(E')$$

$$M_{fi} = \langle \psi_f | H_{\text{INT}} | \psi_i \rangle = \int \psi_f^*(x) H_{\text{INT}} \psi_i(x) dV$$

M_{fi} enthält die "Physik" des beobachteten Prozesses

H_{INT} ... Hamilton Operator: beschreibt Wechselwirkungs-Potential, also

$$H = H_0 + V(x, t) = H_0 + H_{\text{INT}}.$$

$$\rho(E') = \frac{dn(E')}{dE'} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi p'^2}{v'}$$

Für den *Wirkungsquerschnitt* erhält man:

$$\sigma = \frac{W \cdot V}{v_a} = \frac{2\pi}{\hbar v_a} |M_{fi}|^2 \rho(E') V$$

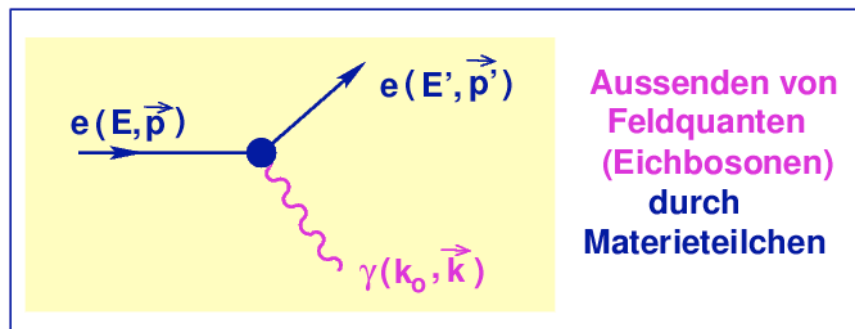
kennt man $M_{fi} \longrightarrow \sigma$ berechnen

Misst man $\sigma \longrightarrow M_{fi}$ bestimmen (und damit H_{INT})

Bemerkung: Goldene Regel gilt für Streuprozesse,
Zerfall von instabilen Teilchen,
Anregung von Teilchenresonanzen, etc.

2.4 Wechselwirkungen und Kräfte

- Nichtrelativistische QM: Schrödinger Gleichung
 —→ Bewegung eines punktförmigen Teilchens in einem äusseren Feld
 Quantenfeldtheorie: beschreibt Erzeugung und Vernichtung des Feldes, bzw. der Teilchen (Feldquanten)
- Mechanismus der Kraftübertragung (Wechselwirkung) :
 Beispiel



Energie–Impulserhaltung:

$$E^2 - \vec{p}^2 = (E' + k_0)^2 - (\vec{p}' + \vec{k})^2$$

$$m_e^2 = m_e^2 + m_\gamma^2 + 2E' k_0 - 2\vec{p}' \cdot \vec{k}$$

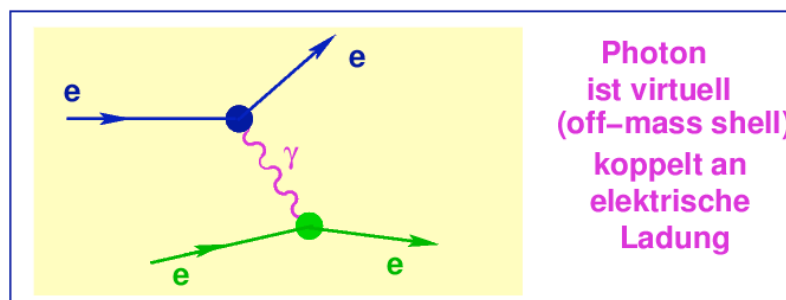
für reelles Photon $m_\gamma = 0$: $E' = |\vec{p}'| \cos \Theta$, d.h. $E' \leq |\vec{p}'|$: aber $m_e \neq 0$

—→ Kraft durch **virtuelles** Photon übertragen

Abstrahlung eines reellen Photons ($m_\gamma = 0$) so nicht möglich.

- können "virtuelle" Photonen als Darstellung eines Kraft- bzw. Potentialfeldes betrachten.
- Trifft ein virtuelles Photon auf weiteres e^- und wird von diesem absorbiert $\Rightarrow$ **Impulsübertragung von einem e^- auf das andere e^-**

Da Kraft als Impulsänderung definiert ist, entspricht dies dem Mechanismus der Kraftübertragung:



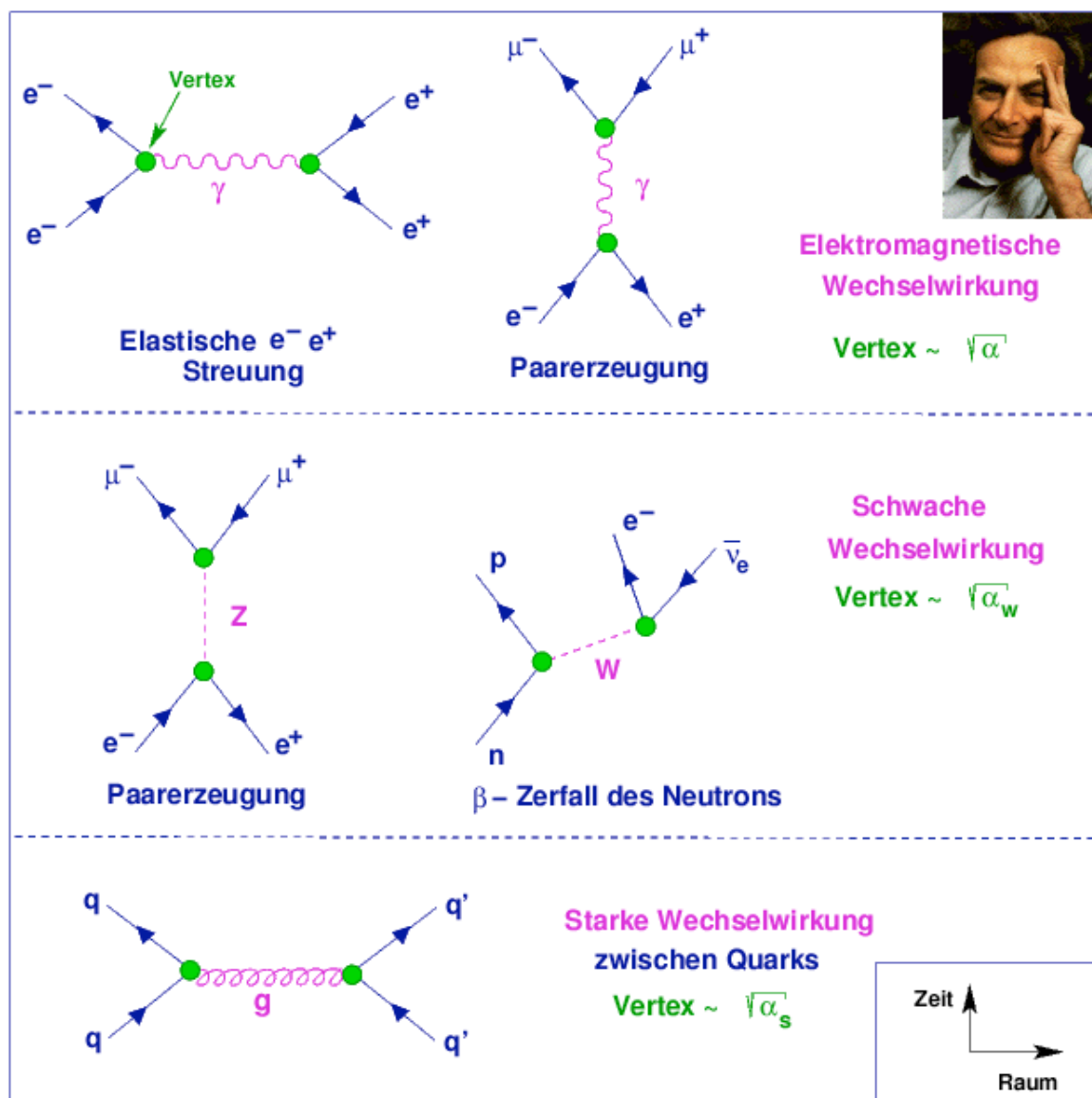
2.5 Feynman Diagramme

- Klassische Elektrodynamik: Feld E
Coulomb: $F = E(r) \cdot q$: Kraft(-Wirkung) ist beobachtbar,
Feld unbeobachtbar
- QED: WW durch Austausch virtueller (nicht beobachtbarer)
Feldquanten = Photonen

unbeobachtbares Feld $\longleftrightarrow$ virtuelles Photon

- Graphische Darstellung: Feynman Diagramme
jedes Symbol in einem Raum-Zeit Graphen entspricht
einem Term in M_{fi} (Feynman Regeln)

R.Feynman
Nobelpreis 1965



2.6 Teilchen und Antiteilchen

Beginn 1900: 2 fundamentale neue Konzepte in der Physik:

- Relativität
- QM-Beschreibung der Phänomene auf atomarer und subatomarer Skala

Basierend auf diesen Konzepten hat Dirac 1931 **Antiteilchen** vorhergesagt

Antiteilchen: Objekte mit derselben Masse und Lebensdauer wie das entsprechende Teilchen, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen der Ladung

Relativistische Beziehung: $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$
→ Gesamtenergie kann positive und negative Werte annehmen:

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Klassisch betrachtet: negative Energien für freie Teilchen sind bedeutungslos

Quantenmechanisch betrachtet: beschreiben z.B. einen e^- Strahl der sich mit Impuls $\vec{p}$ entlang positiver x -Achse bewegt durch ebene Wellenfunktion:

$$\psi(x, t) = A e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et) / \hbar}$$

Formal jedoch beschreibt ψ auch ein Teilchen mit Energie $(-E)$ und Impuls $(-\vec{p})$, das in die negative x -Richtung geht und in umgekehrter Zeitrichtung $(-t)$:

d.h. ersetze $(E \cdot t)$ durch $(-E) \cdot (-t)$ und $(\vec{p} \cdot \vec{x})$ durch $(-\vec{p}) \cdot (-\vec{x})$

Beachte: positiver Ladungsfluss in eine Richtung entspricht negativem Ladungsfluss in umgekehrte Richtung.

Positron (e^+): 1932 von Anderson in kosmischer Strahlung entdeckt

Antiproton ($\bar{p}$): 1956 in Beschleunigerexperimenten nachgewiesen

Anti-Wasserstoff Atom: Bindungszustand von e^+ und $\bar{p}$:
1995 am CERN das 1. Mal nachgewiesen

2.7 Relativistische Wellengleichung (1)

- Verwenden $\hbar = c = 1$
- Nichtrelativistischer Fall: Schrödinger Gleichung

$$H \psi = E \psi \quad \text{und} \quad E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$$

Operatorsubstitution: $E \longrightarrow i \frac{\partial}{\partial t}$
 $\vec{p} \longrightarrow -i \frac{\partial}{\partial \vec{x}} = -i \vec{\nabla}$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{i}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi = 0$$

- > 1.Ableitung in Zeit, 2.Ableitung in Raumkoordinaten
—> Schrödinger Gleichung ist nicht relativistisch invariant

- Relativistischer Fall: Klein-Gordon Gleichung

Relativistischer Energiesatz: $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$
wird durch Operatorsubstitution zu:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \psi + m^2 \psi = 0$$

Klein-Gordon Gleichung ist relativistisch invariant und beschreibt Teilchen mit Spin 0 (skalare Bosonen)

Lösung : $\psi(x, t)$ ebene Welle: $\psi(x, t) = A e^{i(\vec{p}\vec{x} - Et)}$

Relativistische Wellengleichung (2)

Relativistischer Fall: Dirac Gleichung

Ziel von Dirac: Gleichungen linear in Ort und Zeit

- Beginnen wieder mit Schrödinger Gleichung und fordern Linearität in Ort und Zeit → allgemeine Form:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\psi$$

- Relativistische Energiesatz muss erfüllt sein
damit müssen die Lösungen ψ der Dirac Gleichung auch die Klein-Gordon Gleichung erfüllen:

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = (\vec{p}^2 + m^2)\psi$$

- **Koeffizientenvergleich:** $(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)^2 = \vec{p}^2 + m^2$
erhalten somit Bedingungen für die Koeffizienten $\vec{\alpha}, \beta$

$$\begin{aligned}\alpha_1^2 &= \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1 \\ \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 0 \quad \text{für } i \neq j \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0\end{aligned}$$

→ ψ ist eine 4-komponentige Wellenfunktion: **Dirac Spinor**

→ es gibt verschiedene Darstellungen der Vierer-Matrizen $\vec{\alpha}, \beta$:

- Pauli-Dirac Darstellung: $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Weyl Darstellung: $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

σ_i Pauli Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösungen der Dirac Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

kovariante Form

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta\vec{\alpha}) \dots \text{Dirac } \gamma\text{-Matrizen}$$

Die Dirac Gleichung ist ein Satz von vier gleichzeitig geltenden Gleichungen und muss daher vier Lösungen haben:
2 mit $E > 0$ und 2 mit $E < 0$

Separieren den Raum-Zeit-abhängigen Teil
schreiben die vier Lösungen von ebenen Wellen als:

$$\psi = u_r(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu}$$

$$\psi = v_r(\vec{p})e^{ip_\mu x^\mu}$$

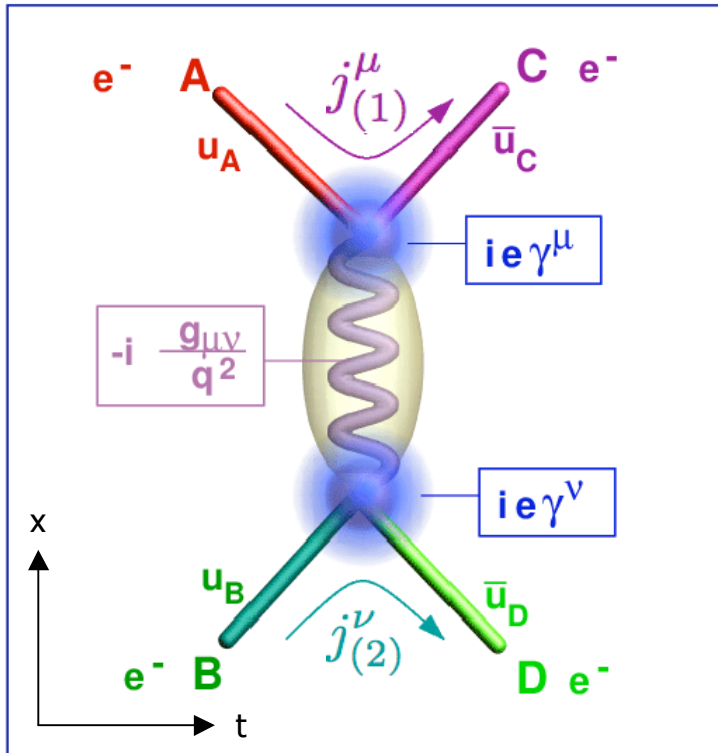
mit $\mu = 0, \dots, 3$ und $r = 1, 2$

u_r und v_r : vierkomponentige ortsunabhängige "Spinoren"

$u_{1,2}$ Teilchen mit Dreier-Impuls $\vec{p}$ und Energie E
positiv-energetische Elektronenzustände mit 2
möglichen Spineinstellungen ($\uparrow, \downarrow$)
d.h. e^- mit halbzahligen Spin

$v_{1,2}$ Teilchen mit Dreier-Impuls $(-\vec{p})$ und Energie $(-E)$
 v_1, v_2 sind 2 Spinzustände mit negativen Energien,
d.h. e^+ mit halbzahligen Spin

Feynman Regeln für $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$



Strom von A $\rightarrow$ C:
 $j_{(1)}^\mu = ie\bar{u}_C\gamma^\mu u_A$

Strom von B $\rightarrow$ D:
 $j_{(2)}^\nu = ie\bar{u}_D\gamma^\nu u_B$

Photon Propagator:
 $-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$

$$-iM_{fi} = j_{(1)}^\mu \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right) j_{(2)}^\nu$$

- Zusammenhang: elektromagnetisches Potential A^μ und elektromagnetische Stromdichte j^μ aus Maxwell Gleichungen ($\partial^\nu \partial_\nu A^\mu = j^\mu$, und $A^\mu \propto e^{iq^\nu x_\nu}$):

$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} j^\mu$$

- e^- : Spin = $\frac{1}{2}$ Teilchen $\rightarrow$ Dirac Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

kovariante Form

$\gamma^\mu = (\beta, \beta\vec{\alpha})$ Dirac γ -Matrizen

$\psi = u(\vec{p})e^{ip^\nu x_\nu}$ ebene Spinorwelle

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$$

- Vertexfaktor $ie\gamma^\mu$: 4×4 Matrix im Raum der Spinoren

$$-i\mathcal{M}_{fi} = (ie\bar{u}_C\gamma^\mu u_A) \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right) (ie\bar{u}_D\gamma^\nu u_B)$$