

Übungen zur Festkörperphysik I

Serie 6: Freie Elektronen

Verteilung: 28.11.2006

Abgabe: 6.12.2006

Rückgabe: 13.12.2006

Kurzfragen

- a) Welche Eigenschaften hat das freie Elektronengas bei $T = 0$ K?
- b) Was passiert bei $T > 0$ K?
- c) Was versteht man unter effektiver Masse?
- d) Was ist die magnetische Suszeptibilität des freien Elektronengases und wie hängt diese von der Temperatur ab?

1 Die Fermi-Dirac-Verteilung

$$f(E, T) = \frac{1}{e^{\frac{(E-\mu)}{k_B T}} + 1} \quad (1)$$

- a) In welchem Energiebereich (in Einheiten $k_B T$) fällt die Fermi-Funktion von 0.9 auf 0.1?
- b) In welchem Energieintervall (in Einheiten eV) beträgt für die beiden Temperaturen $T = 300$ K und $T = 1000$ K die Abweichung der modifizierten Boltzmann-Funktion $\exp[(\mu - E)/k_B T]$ und der Fermi-Funktion weniger als 1 bzw. 10% der Fermi-Funktion?

2 Dimensionsreduzierte Elektronensysteme

Elektronische Strukturen reduzierter Dimensionalität lassen sich heutzutage an Grenzflächen verschiedener Halbleitermaterialien (z.B. GaAs/AlGaAs) herstellen. Zweidimensionale Elektronengase treten beispielsweise an der Grenzfläche zwischen Silizium und Siliziumdioxid in sogenannten MOSFETs auf (MOSFET: Metal-Oxide-Semiconductor Field Effect Transistor), die eine grosse Rolle in der heutigen Halbleiterelektronik spielen. Geht man von derartigen zweidimensionalen Elektronensystemen aus, lassen sich durch laterale Einschränkung der Elektronenbewegung mit Hilfe lithographischer Methoden auch ein- und nulldimensionale Strukturen realisieren (sog. Quantendrähte, bzw. Quantenpunkte oder auch 'künstliche Atome').

- a) Berechnen Sie die Zustandsdichte für Elektronen in 2- und 1-dimensionalen Elektronensystemen unter der Annahme, dass die Dispersionsrelation durch

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}$$

gegeben ist (Achtung: Spin-Entartung). Wie sieht die Zustandsdichte für Elektronen in einem 0-dimensionalen System aus? Stellen Sie die Zustandsdichten graphisch als Funktion der Energie dar.

- b) Geben Sie den Betrag des Fermi-Wellenvektors k_F für den 1D- und den 2D-Fall als Funktion der Elektronendichte n an. Beachten Sie, dass in einem 2D-System die Dichte der Elektronen pro Einheitsfläche und in einem 1D-System die Dichte der Elektronen pro Einheitslänge angegeben wird.

3 Flüssiges ^3He

^3He Atome besitzen einen Kernspin $I = \frac{1}{2}$ und sind somit Fermionen. Ein System von ^3He Atomen wird daher durch die Fermi-Dirac Statistik beschrieben. Man berechne die Fermi-Energie E_F und die Fermi-Temperatur $T_F = E_F/k_B$ für flüssiges ^3He . Das Atomvolumen von ^3He beträgt $37 \text{ cm}^3/\text{Mol}$. Man vergleiche das Resultat mit den entsprechenden Werten für das freie Elektronengas im Natrium-Metall.

Natrium: Dichte bei 5K: $\rho = 1.013 \text{ g/cm}^3$

4 CeAl_3 - ein Schwer-Elektronen Metall

In einem typischen Metall, in dem die Elektronen "quasi-frei" beschrieben werden können, hat der γ -Term in der spezifischen Wärme ($c_{\text{el}} = \gamma T$) einen Wert von $\sim 1 \text{ mJ/mol K}^2$. Vor 30 Jahren wurde eine Verbindung entdeckt, in der bei tiefen Temperaturen ($< 1 \text{ K}$) ein γ -Wert von $\sim 1 \text{ J/mol K}^2$ gemessen wird (Andres, Graebner, Ott; Phys. Rev Lett. 35, 1779-1782 (1975)): CeAl_3 ist eine metallische Verbindung mit einer hexagonalen Kristallstruktur (Typ Ni_3Sn) mit den Gitterparametern $a = 0.6545 \text{ nm}$ und $c = 0.4609 \text{ nm}$. Die primitive hexagonale Zelle enthält zwei chemische Formeleinheiten von CeAl_3 . In CeAl_3 steuert jedes Atom drei Elektronen zum Leitungsband bei.

- a) Man betrachte diese Elektronen als freies Elektronengas und berechne die Fermiwellenzahl k_F , die Fermitemperatur T_F , den Sommerfeldkoeffizienten der spezifischen Wärme γ sowie die Pauli-Suszeptibilität χ .
- b) Experimentell findet man für CeAl_3 unterhalb von 0.3 K : $\gamma = 1.62 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-2}$ und $\chi = 0.036 \text{ cm}^3/\text{mol}$. Die grosse Differenz zwischen den experimentellen Resultaten und den geschätzten Werten in (a) sind als einen Hinweis für die Bildung eines neuartigen metallischen Zustandes zu interpretieren, welcher den Elektronen mit "riesiger" effektiver Masse m^* beinhaltet. Man nehme an, dass es ein schweres Elektron pro chemische Formeleinheit CeAl_3 gibt und schätze die Fermiwellenzahl k_F , die Fermitemperatur T_F und die effektive Masse m^* der schweren Elektronen ab. Ergibt die Rechnung mit dieser Annahme konsistente Resultate für γ und χ ?