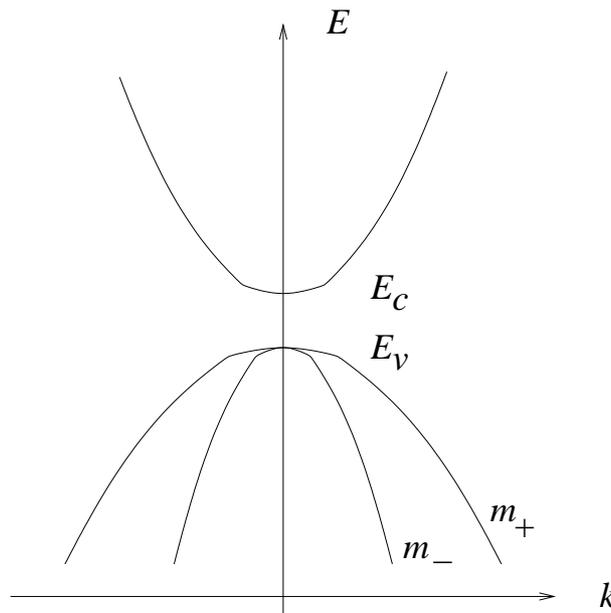


# Übungen zur Festkörperphysik I

## Lösungen zu Serie 9

---

### 1 Schwere und leichte Löcher



In Silizium und Germanium - wie auch in vielen anderen Halbleitern - kommen schwere und leichte Löcher vor. Diese Aufgabe stellt eine vereinfachte Version zur Abschätzung ihrer partiellen Konzentrationen dar. Analog zum einfachen "Zwei-Bänder Modell" schreiben wir mit  $C = 2(2\pi\hbar^2)^{-3/2}$ :

$$n = C(m_n)^{\frac{3}{2}}(k_B T)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{\mu - E_c}{k_B T}\right)$$

$$p_{\pm} = C(m_{\pm})^{\frac{3}{2}}(k_B T)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{E_v - \mu}{k_B T}\right)$$

Mit der Neutralitätsbedingung finden wir:

$$n = p_+ + p_- = p$$

$$= C(m_+^{\frac{3}{2}} + m_-^{\frac{3}{2}})(k_B T)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{E_v - \mu}{k_B T}\right)$$

Somit gilt:

$$p_{\pm} = \frac{m_{\pm}^{\frac{3}{2}}}{m_+^{\frac{3}{2}} + m_-^{\frac{3}{2}}} p$$

Die Neutralitätsbedingung verlangt weiter:

$$n^2 = p^2 = n \cdot p = C^2 m_n^{\frac{3}{2}} (m_+^{\frac{3}{2}} + m_-^{\frac{3}{2}}) (k_B T)^3 \exp\left(\frac{E_v - E_c}{k_B T}\right)$$

Daraus folgt mit  $E_{\text{gap}} = E_c - E_v$  :

$$p = C m_n^{\frac{3}{4}} (m_+^{\frac{3}{2}} + m_-^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} (k_B T)^{\frac{3}{2}} \exp \left[ \frac{-E_{\text{gap}}}{2k_B T} \right]$$

Damit erhält man für die partiellen Konzentrationen der schweren und leichten Löcher

$$p_{\pm} = C m_n^{\frac{3}{4}} \frac{m_{\pm}^{\frac{3}{2}}}{(m_+^{\frac{3}{2}} + m_-^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}} (k_B T)^{\frac{3}{2}} \exp \left[ \frac{-E_{\text{gap}}}{2k_B T} \right]$$

Im Unterschied zu einem Halbleiter, der nur ein Minimum am  $\Gamma$ -Punkt besitzt, weist Ge acht energetisch äquivalente Minima im Leitungsband auf (deren Besetzung nur zur Hälfte in der ersten Brillouin-Zone liegt). Um die Situation von Germanium mit dem Halbleiter in dieser Aufgabe zu vergleichen, nehmen wir an, dass die Gesamtzahl der besetzten Zustände (Ellipsoide) für beide gleich sei. Da bei Ge im Leitungsband ein höherer Entartungsgrad ( $2 \cdot 4 = 8$ ) als im hier angenommenen Fall ( $2 \cdot 1 = 2$ ) vorliegt, bedeutet dies für Germanium, dass im thermischen Gleichgewicht das chemische Potential näher an den Valenzbändern liegen muss als für den hier betrachteten Modell-Halbleiter. Dies kommt davon, dass die Zustandsdichte im Leitungsband durch die Entartung grösser wird und damit die Fermifunktion energetisch nach unten verschoben werden muss, um  $p = n$  zu erfüllen.

## 2 Intrinsische Ladungsträgerkonzentration

Die Zustandsdichten im Leitungs- bzw. Valenzband sind gegeben durch:

$$D_{n,p}(E) = \frac{V}{(2\pi)^3} \left( \frac{2}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} (E - E_{c,v})^{\frac{1}{2}} (m_{n,p}^*)^{\frac{3}{2}}$$

wobei  $(m_n^*)^3 (m_p^*)^3$  das Produkt der Hauptachsenwerte des effektiven Massentensors des Leitungsbandes (Valenzbandes) darstellt:

$$(m_{n,p}^*)^3 = m_{n,p1}^* m_{n,p2}^* m_{n,p3}^*$$

Um die totale Zustandsdichte zu berechnen, sind Informationen über die jeweilige Bandstruktur nötig. Für die Ladungsträgerkonzentration im thermischen Gleichgewicht gilt:

$$\begin{aligned} n_c &= 2 \left( \frac{m_n^* k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( \frac{\mu - E_c}{k_B T} \right) \\ p_v &= 2 \left( \frac{m_p^* k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( \frac{E_v - \mu}{k_B T} \right) \end{aligned}$$

und für die intrinsische Ladungsträgerkonzentration:

$$\begin{aligned} n_i &= p_i = \sqrt{n_c p_v} \\ &= 2 (m_n^* m_p^*)^{\frac{3}{4}} \left( \frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( \frac{E_v - E_c}{2k_B T} \right) \end{aligned}$$

Um die totale Ladungsträgerkonzentration zu berechnen, sind wiederum Informationen über die jeweilige Bandstruktur nötig.

**Si:** Bulk-Si hat 6 gleichwertige Minima im Leitungsband ("valley degeneracy"). Dies muss bei der Berechnung von  $D_n$  und  $n_c$  berücksichtigt werden. Jedes Minimum bzw. dazugehörige Band trägt denselben Anteil zu  $D_n(E)$  resp.  $n_c$  bei. Die totale Zustandsdichte im Leitungsband ist somit gegeben durch:

$$D_n(E)^{\text{tot}} = 6D_n(E)$$

und die totale Ladungsträgerkonzentration im Leitungsband durch:

$$n_c^{\text{tot}} = 6n_c$$

Im Valenzband sieht die Situation etwas anders aus. Dieses setzt sich zusammen aus dem "heavy-hole" und dem "lighthole" Band. Diese haben ihre Maxima im Zonen-Zentrum. Somit gilt:

$$\begin{aligned} D_p(E)^{\text{tot}} &= D_{p, lh}(E) + D_{p, hh}(E) \\ p_v^{\text{tot}} &= p_{v, lh} + p_{v, hh} \end{aligned}$$

Schliesslich erhält man die intrinsische Ladungsträgerkonzentration bei Raumtemperatur durch:

$$\begin{aligned} n_i(300 \text{ K}) &= \sqrt{n_c^{\text{tot}} p_v^{\text{tot}}} \\ &= 2 \left( \frac{k_B 300 \text{ K}}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{6(m_n^*)^{\frac{3}{2}} ((m_{p, hh}^*)^{\frac{3}{2}} + (m_{p, lh}^*)^{\frac{3}{2}})} \exp\left(\frac{-E_{\text{Gap}}}{2k_B 300 \text{ K}}\right) \\ &= 4.57 \cdot 10^{15} m^{-3} \end{aligned}$$

**GaAs:** In GaAs gibt es nur ein Leitungsbandminimum (im Zonen-Zentrum) und somit gilt:

$$\begin{aligned} D_n(E)^{\text{tot}} &= D_n(E) \\ n_c^{\text{tot}} &= n_c \end{aligned}$$

Die Situation für das Valenzband ist dieselbe wie für Si. Die Zustandsdichte und die Ladungsträgerkonzentration sind somit gegeben durch:

$$\begin{aligned} D_p(E)^{\text{tot}} &= D_{p, lh}(E) + D_{p, hh}(E) \\ p_v^{\text{tot}} &= p_{v, lh} + p_{v, hh} \end{aligned}$$

und die intrinsische Ladungsträgerkonzentration bei Raumtemperatur ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} n_i(300 \text{ K}) &= \sqrt{n_c^{\text{tot}} p_v^{\text{tot}}} \\ &= 2 \left( \frac{k_B 300 \text{ K}}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(m_n^*)^{\frac{3}{2}} ((m_{p, hh}^*)^{\frac{3}{2}} + (m_{p, lh}^*)^{\frac{3}{2}})} \exp\left(\frac{-E_{\text{Gap}}}{2k_B 300 \text{ K}}\right) \\ &= 2.611 \cdot 10^{12} m^{-3} \end{aligned}$$

Man beachte:  $n_{i, \text{Si}} \gg n_{i, \text{GaAs}}$

### 3 Bohrsches Wasserstoffmodell für Störstellen in Halbleitern und entartete Halbleiter

Die Zustände der Störstellenelektronen können in einer halbklassischen Näherung wie ein Wasserstoffatom in einem Medium mit Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  beschrieben werden. Der Grundzustand entspricht einem  $s$ -Zustand mit dem entsprechenden Bohr'schen Radius

- Ionisationsenergie:  $E_i = E_0 m^* / (m_e \varepsilon^2)$ ;  $E_0 = 13.6$  eV;  $E_i = 0.659$  meV
- Radius der ersten Bohrschen Bahn:  $r_1 = a_B \varepsilon m_e / m^*$ ;  $a_B = 0.529$  Å;  $r_1 = 642$  Å
- Die Wellenfunktionen der Störstellen überlappen, falls der mittlere Abstand kleiner als der erste Bohr'sche Durchmesser ist. Unter Annahme eines einfach kubischen Gitters für die Störstellen heisst das, dass die Konzentration an Tellur grösser sein muss als  $N_D^{\min} = (2r_1)^{-3}$ . Da  $r_1 = 642$  Å folgt  $N_D^{\min} = 4.72 \cdot 10^{14}$  cm $^{-3}$ . Störbandleitung ist dann wichtig, wenn die Donatoren und Akzeptoren noch nicht wesentlich ionisiert sind, d.h. für  $k_B T \leq E_i = 0.659$  meV, also unterhalb  $T = 7.7$  K.

Für Silizium ergibt sich analog:

$$r_1 = \varepsilon \frac{m_e}{m^*} r_{\text{Bohr}} = 18.75 \text{ \AA}.$$

Und für die minimale Störstellenkonzentration erhält man:  $N_D^{\min} > 1.90 \cdot 10^{19}$  cm $^{-3}$ .

### 4 Maximal erreichbarer Widerstand von Ge bei Zimmertemperatur

Nach dem Massenwirkungsgesetz kann bei gegebener Temperatur durch p-Dotierung die Konzentration der Elektronen im Leitungsband verringert werden; im Falle von Germanium werden damit Ladungsträger mit einer höheren Beweglichkeit (Elektronen) durch solche mit einer tieferen Beweglichkeit (Löcher) ersetzt, was die Leitfähigkeit  $\sigma$  verringert:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial p} = 0 = -b_n \frac{n_i^2}{p^2} + b_p \Rightarrow p_{\max} = n_i \left( \frac{b_n}{b_p} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Beachten Sie, dass die 2. Ableitung  $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2}$  positiv ist, das heisst, das gefundene Extremum ist ein Minimum. Daraus folgt für  $\sigma_{\min}$ :

$$\frac{\sigma_{\min}}{e} = \frac{b_n n_i^2}{n_i (b_n/b_p)^{\frac{1}{2}}} + n_i (b_n/b_p)^{\frac{1}{2}} b_p = 2n_i (b_n b_p)^{\frac{1}{2}}$$

Für reines Germanium ist

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_i}{e} &= n_i (b_n + b_p) \\ \frac{\rho_{\max}}{\rho_i} &= \frac{\sigma_i}{\sigma_{\min}} \\ &= (b_n + b_p) / (2(b_n b_p)^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

Numerisch:  $b_n/b_p = 2.11$ ,  $\rho_{\max}/\rho_i = 1.07$ , somit:  $\rho_{\max} = 61$  Ωcm.