

7. Übungsblatt: Lösungen

Verteilung 6. November 2007
Besprechung 14./15. November 2007**Aufgabe 1:** (Fermi-)Druck der Elektronen in Cu

Die durchschnittliche Energie eines Elektrons kann mittels der Fermienergie bei T=0 K ausgedrückt werden als

$$\bar{E} = \frac{3}{5} E_F(0) = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}},$$

wobei $n=N/V$ die Elektronendichte darstellt (siehe Vorlesung und Literatur).Für den Druck p benutzen wir die thermodynamische Beziehung, wobei die Gesamtenergie für N Teilchen (und nicht die durchschnittliche Energie pro Teilchen) abgeleitet wird:

$$E_{ges} = N\bar{E} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{N^{\frac{5}{3}}}{V^{\frac{2}{3}}},$$

$$p = - \left(\frac{\partial(N\bar{E})}{\partial V} \right)_{T,N} = \frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \hbar^2}{5} n^{\frac{5}{3}}.$$

In Zahlen: $p=38$ GPa oder $3.8 \cdot 10^5$ atm.**Aufgabe 2:** Niedrigdimensionale Elektronensysteme

- 1.
- 2D-Fall:**
- Zahl der Zustände mit Energie kleiner als
- E
- (Faktor 2 für Spin-Entartung):

$$N(E) = 2 \sum_{\mathbf{k}} 1 = 2 \frac{A}{(2\pi)^2} \int_0^{k(E)} dk \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{A}{2\pi} \int_0^{k^2(E)} d(k^2) = \frac{Am}{\pi\hbar^2} \int_0^E dE$$

Zustandsdichte in zwei Dimensionen:

$$D_{2D}(E) = \frac{1}{A} \frac{dN(E)}{dE} = \frac{m}{\pi\hbar^2} = const.$$

- 1D-Fall: Zahl der Zustände mit Energie kleiner als
- E
- :

$$N(E) = 2 \sum_k 1 = 2 \frac{L}{2\pi} \int_{-k(E)}^{k(E)} dk = 2 \frac{L}{2\pi} \int_0^{k^2(E)} \frac{d(k^2)}{k} = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_0^E \frac{dE}{\sqrt{E}}$$

Zustandsdichte in einer Dimensionen:

$$D_{1D}(E) = \frac{1}{L} \frac{dN(E)}{dE} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \frac{1}{\sqrt{E}}.$$

- 0D-Fall: Zustandsdichte (ein Energieniveau
- E_0
-)

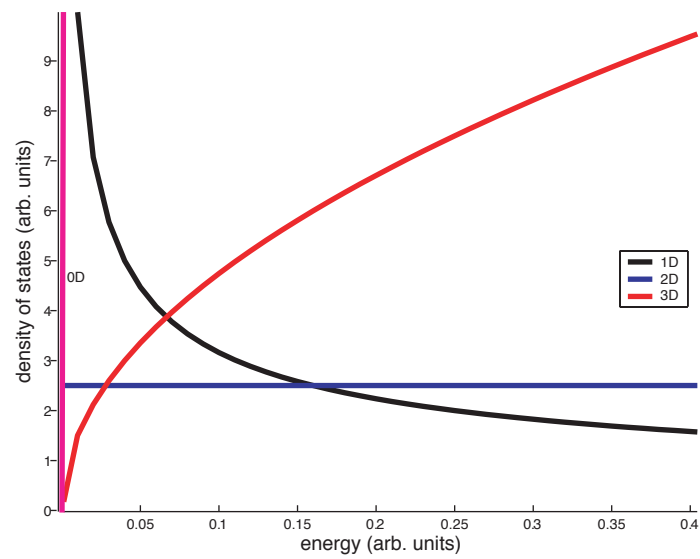
$$D_{0D}(E) = \delta(E - E_0)$$

- 2.
- 2D-Fall:**

$$n_{2D} = \frac{m}{\pi\hbar^2} E_F = \frac{m}{\pi\hbar^2} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{k_F^2}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad k_F = \sqrt{2\pi n_{2D}}$$

- 1D-Fall:

$$n_{1D} = \frac{1}{\pi} \int_{-k_F}^{k_F} dk = \frac{2k_F}{\pi} \quad \Rightarrow \quad k_F = \frac{\pi}{2} n_{1D}$$



Aufgabe 3: Fermifläche in zwei Dimensionen

Die reziproken Gittervektoren sind $b_1 = 1 \text{ \AA}^{-1}$ und $b_2 = 2 \text{ \AA}^{-1}$. Die Elektronendichte ist $n_{2D} = 3/(a_1 a_2) = 3/(2\pi^2) \text{ \AA}^{-2}$. Der Fermivektor ist daher $k_F = \sqrt{3/\pi} \text{ \AA}^{-1}$.

