11. Übungsblatt: Lösungen

Verteilung 4. Dezember 2007
Besprechung 12./13. Dezember 2007

Aufgabe 1: *Intrinsische Ladungsträgerkonzentration in Halbleitern*

1. Wenn k_BT klein gegen die Bandlücke ist, so sind nur Elektronen aus der Nähe der Bandkante an der thermischen Anregung beteiligt. Man fasst die Anzahl dieser zugänglichen Zustände in einer effektiven Grösse (effektive Zustandsdichte) zusammen und nimmt an, dass alle diese Zustände an der Bandkante liegen.

   Diese effektive Zustandsdichte hat folgende Form (siehe Vorlesung oder Ibach-Lüth):

   $$N_c(T) = \frac{1}{4}\left(\frac{2{m_c}^* k_BT}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \quad \left[n = N_c \exp\left(\frac{\mu - E_c}{k_BT}\right)\right],$$

   bzw. für Löcher

   $$N_v(T) = \frac{1}{4}\left(\frac{2{m_v}^* k_BT}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \quad \left[p = N_\nu \exp\left(\frac{E_\nu - \mu}{k_BT}\right)\right].$$

   Dabei sind ${m_c}^*$ bzw. ${m_v}^*$ die effektiven Massen im Bandminimum des Leitungsbandes bzw. im Maximum des Valenzbandes.
   Die Herleitung der effektiven Zustandsdichte erfolgt mit dem Ansatz für die Elektronendichte (analog für Löcher)

   $$n_e(T,\mu) = \int_{E_c}^{\infty} \mathrm{d}E D_c(E) f(E,T,\mu) = N_c(T) e^{-\frac{E_c-\mu}{k_BT}}.$$

   Dabei ist die Zustandsdichte $D_c(E)$ temperatur*un*anhängig. Die Temperaturabängigkeit kommt von der Integration über die Fermifunktion. Je höher die Temperatur, desto tiefer im Band liegende Zustände müssen in der effektiven Zustandsdichte berücksichtigt werden. Ausserdem werden diese mit einem grösseren Fermifaktor gewichtet.

2. Im Falle von Silizium ist noch die Entartung des Leitungsbandes zu berücksichtigen. Man multipliziert also die effektive Zustandsdichte mit der entsprechenden Entartung (in diesem Fall 6):

   $$N_c = \sum_{i=1}^{6} N_{c,i} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{m_{c,\mathrm{eff}}}{m_0}\right)^{3/2} = \sum_i \left(\frac{m_{ci}}{m_0}\right)^{3/2} = 6\left(\frac{m_c}{m_0}\right)^{3/2}.$$

3. Einsetzen der Zahlenwerte liefert:

   $$N_c(300K) = 2.82 \cdot 10^{19} cm^{-3}.$$

   Im Valenzband dagegen sieht die Situation etwas anders aus: Dieses ist zusammengesetzt aus zwei Loch-Bändern, dem "heavy-hole"- und dem "light-hole"-Band. Damit ergibt sich für die totale Masse:

   $$N_\nu = N_{\nu,hh} + N_{\nu,lh} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{m_v}{m_0}\right)^{3/2} = \left(\frac{m_{hh}}{m_0}\right)^{3/2} + \left(\frac{m_{lh}}{m_0}\right)^{3/2} = 0.407.$$

   Die Ladungsträgerkonzentration ist somit

   $$N_v = 1.02 \cdot 10^{19} cm^{-3}.$$

   In GaAs gibt es nur ein Leitungsbandminimum:

   $$N_c(300K) = 2.5(0.07)^{3/2} \cdot 10^{19} cm^{-3} = 4.63 \cdot 10^{17} cm^{-3}.$$

   Für das Valenzband gilt

   $$\left(\frac{m_v}{m_0}\right)^{3/2} = \left(\frac{m_{hh}}{m_0}\right)^{3/2} + \left(\frac{m_{lh}}{m_0}\right)^{3/2} = 0.375.$$

Damit erhält man

$$N_v = 9.39 \cdot 10^{18} cm^{-3}.$$

Für intrinsische Ladungsträger gilt ($n_i = \sqrt{np}$):

$$n_i(T) = \frac{1}{4}\left(\frac{2k_BT}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2}(m_c m_v)^{3/4} e^{\frac{-E_g}{2k_BT}}.$$

Einsetzen der Zahlenwerte bei Raumtemperatur (300K) liefert:

Si:

$$n_i = 1.82 \cdot 10^9 cm^{-3},$$

GaAs:

$$n_i = 2.36 \cdot 10^6 cm^{-3}.$$

Aufgabe 2: *Entarteter Halbleiter*

Um einen Überlapp von Elektronenorbitalen benachbarter Störstellen zu erhalten, benötigt man ein minimale Donator-Konzentration von 1 Störstelle pro $\frac{4\pi}{3} {r_d}^3$:

$$\frac{N_d}{A} = \frac{1}{4\pi r_d^3/3} \approx 2.4 \times 10^{17}\ \mathrm{cm}^{-3},$$

$$r_d = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0\epsilon}{m^* e^2} = a_B \frac{\epsilon}{m^*/m_e} = 100\text{Å}.$$

Aufgabe 3: *Gas paramagnetischer Atome*

Mit $L = 0$ und $S = 1/2$ erhält man für den totalen Drehimpuls des Atoms $J = 1/2$ mit zwei quantisierten Spin-Ausrichtungen $M_J = \pm 1/2$. Diese beiden Quantenzustände haben in einem externen magnetischen Feld verschiedene Energien $E = -\vec{\mu}\cdot\vec{H} = -M_J g\mu_B B$ und sind somit unterschiedlich besetzt (g=2 für Elektronen, $\mu_B = e\hbar/2m$, das Bohr'sche Magneton). Die Besetzungszahl der beiden Niveaus folgt der Boltzmann-Statistik:

$$N_{\pm 1/2} = C\exp(\pm g\mu_B B/2k_BT).$$

Die Konstante C ist durch die Normierung festgelegt:

$$C\left[\exp(g\mu_B B/2k_BT) + \exp(-g\mu_B B/2k_BT)\right] = N.$$

Es folgt für die Besetzung der beiden Zustände:

$$N_{\pm 1/2} = \frac{N\exp(\pm g\mu_B B/2k_BT)}{2\cosh(g\mu_B B/2k_BT)}.$$

Die totale Magnetisierung ist die Differenz der beiden Besetzungszahlen gewichtet mit dem atomaren magnetischen Moment.

$$M = \frac{g\mu_B}{2}(N_{-1/2} - N_{1/2}) = \frac{Ng\mu_B}{2}\tanh(g\mu_B B/2k_BT).$$

Für T=300K:
$N_{-1/2} = 4.97 \cdot 10^{21}/cm^3$, $N_{1/2} = 5.03 \cdot 10^{21}/\mathrm{cm}^3$,
$M = 526\,\mathrm{A/m}$.
Für T=4K:
$N_{-1/2} = 3.01 \cdot 10^{21}/cm^3$, $N_{1/2} = 6.98 \cdot 10^{21}/\mathrm{cm}^3$,
$M = 36801.9\,\mathrm{A/m}$.