10. Übungsblatt: Lösungen

Verteilung 27. November 2007
Besprechung 5./6. Dezember 2007

Aufgabe 1: *Der Hall-Effekt im Drude-Modell*

Die Gleichung für die zeitliche Änderung des Drude-Impulses

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = -\frac{m\vec{v}}{\tau} + \vec{F} \tag{1}$$

beinhaltet einen Kraftterm aufgrund der angelegten Felder (Lorentzkraft)

$$\vec{F} = -e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{2}$$

und den Reibungsterm, der zuerst anschaulich hergeleitet werden soll.
Zur Zeit $t = 0$ sind die Wellenvektoren $\vec{k}$ der Elektronen innerhalb der Fermi-Kugel gleichmässig verteilt (siehe Fig. 1a). Unter Einwirkung einer äusseren Kraft (hier: ein elektrisches Feld) über die Zeit t verschiebt sich die Fermikugel als Ganzes um den Vektor

$$\delta\vec{k} = -e\vec{E}t/\hbar. \tag{3}$$

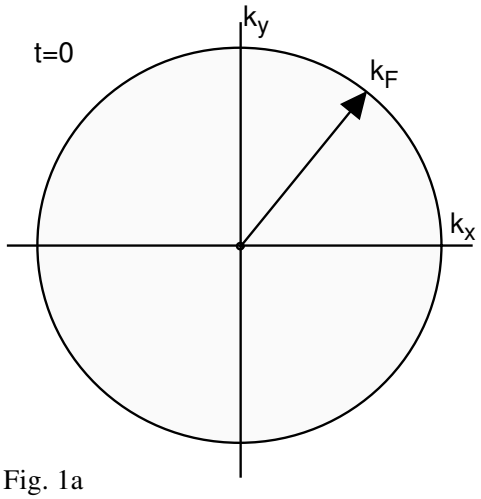


Fig. 1a

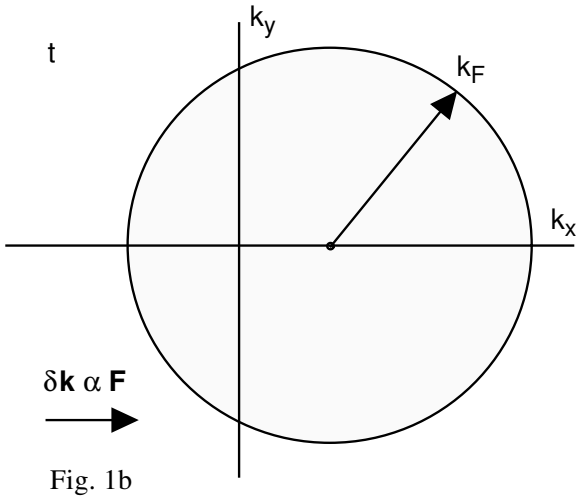


Fig. 1b

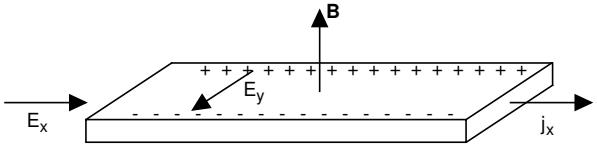
Infolge der Stösse mit Verunreinigungen, Gitterfehlern und Phononen relaxieren die Elektronen im Mittel nach der Streuzeit τ. Bei abgeschaltetem Feld würden die Elektronen wieder den gleichverteilten Zustand in Fig. 1a einnehmen. Bei bestehendem Feld hingegen stellt sich ein stationärer Zustand ein, der durch eine um

$$\delta\vec{k} = -e\vec{E}\tau/\hbar \tag{4}$$

verschobene Fermikugel im k-Raum beschrieben wird. Der angelegten elektrischen Kraft wirkt also eine gleich grosse Kraft entgegen, die Reibungskraft. Nur so gibt es einen stationären Zustand, d.h. das Elektron wird bei einer endlichen Geschwindigkeit stabilisiert. Die Reibungskraft ist damit gegeben durch $\hbar\delta\vec{k}/\tau$. Die Driftgeschwindigkeit $\vec{v}$ ist eine mittlere Geschwindigkeit der Elektronen in einem angelegten Feld. Die thermischen Grund-Geschwindgkeiten der Elektronen sind in alle Richtungen gleichverteilt und ergeben daher bei der Mittelung keinen Beitrag. Es gilt daher

$$m\vec{v} = \hbar\delta\vec{k} \tag{5}$$

und es folgt der Reibungsterm in Gleichung (1).



Im stationären Zustand verschwindet die zeitliche Ableitung in den Bewegungsgleichungen und man erhält für die Impulskomponenten in der Ebene

$$0 = -eE_x - \omega_c m v_y - \frac{m v_x}{\tau}, \tag{6}$$

$$0 = -eE_y + \omega_c m v_x - \frac{m v_y}{\tau}, \tag{7}$$

wobei $\omega_c = \frac{eB}{m}$ die Zyklotronfrequenz ist. Einsetzen von $\vec{j} = -ne\vec{v}$ liefert die Gleichungen für die Komponenten der Stromdichte:

$$0 = -ne^2 E_x + \omega_c m j_y + \frac{m j_x}{\tau}, \tag{8}$$

$$0 = -ne^2 E_y - \omega_c m j_x + \frac{m j_y}{\tau}. \tag{9}$$

Die in der y-Richtung gemessene Hallspannung erfolgt stromlos. Daher wird die Lorentzkraft aufgrund der v_x-Komponent gerade durch das entstehende elektrische Feld E_y kompensiert. Wir setzen $j_y = 0$ und erhalten aus der ersten Gleichung

$$\rho(B) \equiv \frac{E_x}{j_x} = \frac{m}{ne^2\tau}. \tag{10}$$

Dies ist nicht vom Magnetfeld abhängig. Im Gegensatz dazu beobachtet man in verschiedenen Materialien und Systemen eine wesentliche Abängigkeit $\rho(B)$, wofür die Quantenmechanik eine bessere Beschreibung liefert.
Mit $j_y = 0$ liefert die zweite Gleichung

$$R_H \equiv \frac{E_y}{j_x B} = -\frac{1}{ne}. \tag{11}$$

Der Hall-Koeffizient nach Drude ist unabhängig vom Magnetfeld, der Probenqualität ($\rightarrow \tau$) und der Temperatur ($\rightarrow \tau$, es sei denn, die Elektronendichte hänge von der Temperatur ab). Somit liesse sich die Ladungsträgerdichte im Metall direkt bestimmen (und mit der Annahme vergleichen, dass es genau die Valenzelektronen aller Atome sind, die an der elektrischen Leitung teilnehmen). Experimente zeigen, dass in vielen Metallen R_H sehr wohl abhängig vom Magnetfeld etc. sein kann. Darüber hinaus ist die Ladungsträgerdichte nicht immer konsistent mit der Anzahl der Valenzelektronen und die Ladungen können positive Vorzeichen annehmen ("Löcher"). Offensichtlich versagt in vielen Fällen das Drude-Modell der freien Elektronen. Die Wechselwirkung mit dem periodischen Gitterpotential im Festkörperkristall führt dazu, dass nur Elektronen in nicht vollständig besetzten Energiebändern zum Stromtransport beitragen können, und dass für mehr als halb besetzte Bänder der Strom von positiv geladenen Löchern getragen wird. Zudem können beide Ladungsträgertypen gleichzeitig auftreten.

Aufgabe 2: *Leitwert in dünnen Filmen*

Im diffusiven Fall ist der spezifische Leitwert proportional zur mittlere freien Weglänge (siehe z.B. Drude-Modell). Durch die "diffusive" Grenzfläche werden die Elektronen zufällig in alle Richtungen gestreut, bevor sie ihre mittlere freie Weglänge im Falle eines ausgedehnten Stück Metalls ausgeschöpft haben.
Man betrachtet also ein Elektron, welches im Abstand x zur nächsten Grenzfläche elastisch gestreut wurde und zwar im Winkel θ bezüglich des Lots zur Grenzfläche. Die mittlere freie Weglänge wird neu eine Funktion von θ sein, $\lambda(\theta)$ und $\lambda = \lambda_0$ nur wenn $\theta_1 < \theta < \theta_2$ mit $\cos(\theta_1) = (d-x)/\lambda_0$ und $\cos(\theta_2) = -x/\lambda_0$. Für $0 \leq \theta \leq \theta_1$ gilt: $\lambda(\theta) = (d-x)/\cos\theta$. Für $\theta_2 \leq \theta \leq \pi$: $\lambda(\theta) = -x/\cos\theta$.
Durch Mittelung über den Abstand x zur Oberfläche und den gesamten Raumwinkel erhält man

$$\lambda = \frac{\int_0^d \mathrm{d}x \int \mathrm{d}\Omega\, \lambda(\Omega, x)}{\int_0^d \mathrm{d}x \int d\Omega} = \frac{1}{d}\int_0^d \mathrm{d}x\, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\pi} \mathrm{d}\cos\theta\, \lambda(\theta, x),$$

$$\lambda = \frac{1}{2d}\int_0^d \mathrm{d}x \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \lambda(\theta, x)\sin\theta = \frac{3d}{4} + \frac{d}{2}\ln\left(\frac{\lambda_0}{d}\right).$$

Es folgt

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{3d}{4\lambda_0} + \frac{d}{2\lambda_0}\ln\left(\frac{\lambda_0}{d}\right).$$