

4 Lösungen

4.1 Signalhorn

1. und 2.

Überlegungen, Abschätzung Die Quelle (Auto) kommt auf den Empfänger zu \Rightarrow Die Hupe ertönt höher \Rightarrow Frequenz ist höher \Rightarrow Wellenlänge ist kleiner.

Gegeben

$$\begin{aligned}f_Q &= 400 \text{ Hz Frequenz der Hupe} \\v_Q &= 34 \text{ m/s Geschwindigkeit des Autos (Hupe)} \\c &= 344 \text{ m/s Schallgeschwindigkeit} \\v_B &= 0 \text{ m/s Geschwindigkeit des Empfängers}\end{aligned}$$

Gesucht

λ_B : Wellenlänge aus Sicht des Empfängers

Mit der Gleichung (37) kann die Frequenz beim Empfänger (f_B) berechnet werden. Aus dem Zusammenhang $\lambda_B f_B = c$ folgt:

$$\lambda_B = \frac{c}{f_B} \quad (38)$$

Für die nächste Aufgabe muss f_B berechnet werden, daher wird dieser Wert berechnet anstelle nur die Gleichung (38) in die Gleichung (37) einzusetzen:

$$f_B = f_Q \frac{c \pm v_B}{c \mp v_Q} \stackrel{v_B=0}{=} f_Q \frac{c}{c \mp v_Q}$$

Auf Grund der Abschätzung ist bekannt, dass die Hupe höher ertönen muss, d. h. $f_B > f_Q$ dies ist der Fall falls $\frac{c}{c \mp v_Q} > 1$ ist, daraus folgt $c < c \mp v_Q$ sein (Nenner muss kleiner als Zähler sein). Das obere Vorzeichen muss gewählt werden:

$$f_B = f_Q \frac{c}{c - v_Q} = 400 \text{ Hz} \frac{344 \text{ m/s}}{344 \text{ m/s} - 34 \text{ m/s}} = 443.871 \text{ Hz} \approx 444 \text{ Hz}$$

die Lösung der 2. Aufgabe. Für die 1. Aufgabe folgt mit der Gleichung (38):

$$\lambda_B = \frac{c}{f_B} = \frac{344 \text{ m/s}}{443.871 \text{ Hz}} = 0.775 \frac{\text{m}}{\text{s Hz}} = 0.775 \frac{\text{m}}{\text{s} \frac{1}{\text{s}}} = 0.775 \text{ m} \quad (39)$$

Zum Vergleich, die Wellenlänge der Hupe beträgt:

$$\lambda_B = \frac{344 \text{ m/s}}{400 \text{ Hz}} = 0.86 \text{ m} \quad (40)$$

3.

Überlegungen, Abschätzung Der Empfänger nähert sich der Quelle. Die Hupe ertönt ebenfalls höher \Rightarrow Frequenz ist höher \Rightarrow Wellenlänge ist kleiner.

Gegeben

$$\begin{aligned} f_Q &= 400 \text{ Hz Frequenz der Hupe} \\ v_Q &= 0 \text{ m/s Geschwindigkeit des Autos (Hupe)} \\ c &= 344 \text{ m/s Schallgeschwindigkeit} \\ v_B &= 34 \text{ m/s Geschwindigkeit des Empfängers} \end{aligned}$$

Gesucht

$$\begin{aligned} \lambda_B &: \text{ Wellenlänge aus Sicht des Empfängers} \\ f_B &: \text{ Frequenz aus Sicht des Empfängers} \end{aligned}$$

$$f_B = f_Q \frac{c \pm v_B}{c \mp v_Q} \stackrel{v_Q=0}{=} f_Q \frac{c \pm v_B}{c}$$

Die Hupe muss höher ertönen, das obere Vorzeichen muss gewählt werden:

$$f_B = f_Q \frac{c + v_B}{c} = 400 \text{ Hz} \frac{344 \text{ m/s} + 34 \text{ m/s}}{344 \text{ m/s}} = 439.535 \text{ Hz} \approx 440 \text{ Hz}$$

Die Wellenlänge des Schalls, die den den Empfänger erreicht ist die selbe die die Quelle aussendet, da sich die Wellen der ruhenden Quelle in der ebenfalls

ruhenden Luft ausbreiten. Die Wellenlänge ändert sich bei einer ruhenden Quelle nicht (vergleiche Abbildung ??) und beträgt somit:

$$\lambda_B = \frac{344 \text{ m/s}}{400 \text{ Hz}} = 0.86 \text{ m} \quad (41)$$

allerding erscheint sie dem bewegtem Empfänger kürzer:

$$\lambda_B = \frac{344 \text{ m/s}}{440 \text{ Hz}} = 0.783 \text{ m} \quad (42)$$

4.2 Astronomie

Nach der Abbildung 6 ist Rot die Farbe mit der längsten Wellenlänge. Leuchtet ein Stern z. B. Grün und er erscheint uns aber Gelb, also in Richtung Rot verschoben, wurde die Wellenlänge seines ausgestrahlten Lichts grösser. Die Wellenlänge erscheint dem Beobachter grösser wenn sich die Quelle (Stern) vom Beobachter wegbewegt.

Da das Licht weit entfernter Galaxien zum Roten verschoben ist müssen sich diese alle von der Erde entfernen, d. h. das Universum dehnt sich aus.

Messung Sterne senden nicht eine Farbe aus sondern ein ganzes Spektrum. Die Sonne, welche auch ein Stern ist, sendet alle Farben aus und erscheint daher Weiss. Auf Grund der Art und Weise wie das Licht in der Sonne entsteht fehlen einige schmale Bereiche im Spektrum (Spektrallinien). Bei den anderen Sternen fehlen diese ebenfalls, können die Linien einander zugeordnet werden, wird die Rotverschiebung ersichtlich (Abbildung 7).

4.3 Startender Airbus A380

Abschätzung Das Intervall muss sicher grösser sein als eine kleine Sekunde (Beispiel in der Stunde: Intervall der Gashupe des Velofahrers).

Gegeben

$$v_Q = 260 \text{ km/h} \text{ Geschwindigkeit der Quelle (Airbus)}$$

$$v_B = 0 \text{ m/s} \text{ Geschwindigkeit des Empfänger}$$

$$c = 344 \text{ m/s} \text{ Schallgeschwindigkeit}$$

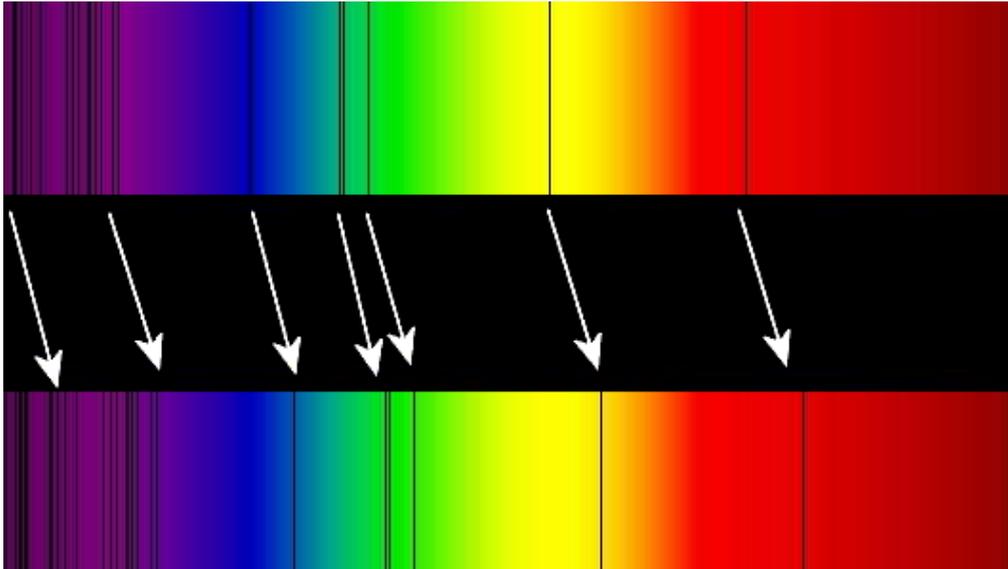


Abbildung 7: Supergalaxienhaufen (BAS11) unten im Vergleich zur Sonne oben. Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Rotverschiebung>

Gesucht Intervall (p), d. h. das Frequenzverhältnis zwischen der Frequenz beim auf Sie zu fliegen (F_{Q_v}) und beim von Ihnen weg fliegen (f_{Q_n}).

$$p = \frac{F_{Q_v}}{f_{Q_n}} \quad (43)$$

Die Frequenz beim auf Sie zufliegen beträgt:

$$f_{B_v} = f_Q \frac{c}{c - v_Q} \quad (44)$$

und beim wegfliegen:

$$f_{B_n} = f_Q \frac{c}{c + v_Q} \quad (45)$$

Einsetzen von Gleichung (44) und (45) in (43) ergibt:

$$p = \frac{F_{Q_v}}{f_{Q_n}} = \frac{f_Q \frac{c}{c - v_Q}}{f_Q \frac{c}{c + v_Q}} \quad (46)$$

$$= \frac{\frac{c}{c - v_Q}}{\frac{c}{c + v_Q}} = \frac{c + v_Q}{c - v_Q} \quad (47)$$

Die Geschwindigkeiten müssen in der Gleichen Einheit vorliegen, die des Airbus in m/s beträgt:

$$v_Q = 260 \text{ km/h} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{\text{km}} \cdot \frac{\text{h}}{3600 \text{ s}} = 72.2 \text{ m/s}$$

Einsetzen der Werte ergibt:

$$p = \frac{c + v_Q}{c - v_Q} = \frac{344 \text{ m/s} + 72.2 \text{ m/s}}{344 \text{ m/s} - 72.2 \text{ m/s}} = 1.53 \quad (48)$$

Das Intervall liegt zwischen einer Quinte ($\frac{3}{2}$) und einer kleine Sexte ($\frac{8}{5}$).

4.4 Radar der Polizei

1.

Gegeben

$$\begin{aligned} v_B &= v_{\text{Auto}} = 50 \text{ m/s} \text{ Geschwindigkeit des Empfänger (Auto)} \\ v_Q &= 0 \text{ m/s} \text{ Geschwindigkeit der Quelle (stehendes Polizeiauto)} \\ f_{Q_{\text{Polizei}}} &= 1.5 \cdot 10^9 \text{ Hz} \text{ Frequenz des ausgesendeten Radarsignals} \\ c &= 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \text{ Lichtgeschwindigkeit} \end{aligned}$$

Gesucht

$$f_{B_{\text{Auto}}} : \text{Empfangene Frequenz beim Auto}$$

Diese ist gegeben durch:

$$f_{B_{\text{Auto}}} = f_{Q_{\text{Polizei}}} \frac{c \pm v_B}{c \mp v_Q} = f_{Q_{\text{Polizei}}} \frac{c - v_{\text{Auto}}}{c} \quad (49)$$

2.

Gegeben

$$\begin{aligned} v_Q &= v_{\text{Auto}} = 50 \text{ m/s} \text{ Geschwindigkeit der Quelle (fahrendes Auto)} \\ v_B &= 0 \text{ m/s} \text{ Geschwindigkeit des Empfänger (stehendes Polizeiauto)} \\ f_{Q_{\text{Auto}}} &= f_{B_{\text{Auto}}} \text{ Frequenz des reflektierten Radarsignals (Gleichung (49))} \\ c &= 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \text{ Lichtgeschwindigkeit} \end{aligned}$$

Gesucht

$f_{B\text{Polizei}}$: Empfangene Frequenz beim Polizeiauto

Diese ist gegeben durch:

$$f_{B\text{Polizei}} = f_{Q\text{Auto}} \frac{c \pm v_B}{c \mp v_Q} = f_{Q\text{Auto}} \frac{c}{c + v_{\text{Auto}}} \quad (50)$$

$$\stackrel{(49)}{=} f_{Q\text{Polizei}} \frac{c - v_{\text{Auto}}}{c} \cdot \frac{c}{c + v_{\text{Auto}}} \quad (51)$$

$$= f_{Q\text{Polizei}} \frac{c - v_{\text{Auto}}}{c + v_{\text{Auto}}} \quad (52)$$

Lösung der Aufgabe

Gesucht

$$\Delta f = f_{Q\text{Polizei}} - f_{B\text{Polizei}}$$

Mit Gleichung (52) folgt:

$$\Delta f = f_{Q\text{Polizei}} - f_{Q\text{Polizei}} \frac{c - v_{\text{Auto}}}{c + v_{\text{Auto}}} = f_{Q\text{Polizei}} \left(1 - \frac{c - v_{\text{Auto}}}{c + v_{\text{Auto}}} \right) \quad (53)$$

$$= 1.5 \cdot 10^9 \text{ Hz} \left(1 - \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s} - 50 \text{ m/s}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s} + 50 \text{ m/s}} \right) \quad (54)$$

$$= 500 \text{ Hz} \quad (55)$$

3. Nein, durchrechnen ergibt genau die gleiche Gleichung. In der Gleichung für den Dopplereffekt (37) wird ein Faktor berechnet, welcher mit der Sendefrequenz multipliziert wird. Bei einer erneuten Anwendung der Gleichung kommt ein weiterer Faktor dazu. Bei einer Multiplikation spielt es keine Rolle mit welchem Faktor zuerst multipliziert wird.

4. Die empfangene Frequenz kann mit der gesendeten überlagert werden. Die Wellen interferieren und erzeugen eine Welle, deren Amplitude mit der Frequenz Δf schwingt, die man als Schwebungsfrequenz bezeichnet.

4.5 Verkehrssünder

Gegeben

$$\begin{aligned}v_Q &= 0 \text{ m/s Geschwindigkeit des Lichtsignals} \\ \lambda_Q &= 620 \text{ nm Wellenlänge des ausgesendeten roten Lichts} \\ \lambda_B &= 600 \text{ nm Wellenlänge des empfangenen gelben Licht} \\ c &= 3 \cdot 10^8 \text{ m/s Lichtgeschwindigkeit}\end{aligned}$$

Gesucht

v_B : Geschwindigkeit Ihres Ferrari

Gleichung (37) nach v_B auflösen:

$$\begin{aligned}f_B &= f_Q \frac{c \pm v_B}{c \mp v_Q} = f_Q \frac{c + v_B}{c} \\ \frac{f_B c}{f_Q} &= c + v_B \\ v_B &= \frac{f_B c}{f_Q} - c = c \left(\frac{f_B}{f_Q} - 1 \right) \\ &\stackrel{(\text{mit } f = \frac{c}{\lambda})}{=} c \left(\frac{\frac{c}{\lambda_B}}{\frac{c}{\lambda_Q}} - 1 \right) = c \left(\frac{\lambda_Q}{\lambda_B} - 1 \right) \\ &= 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \underbrace{\left(\frac{620 \text{ nm}}{600 \text{ nm}} - 1 \right)}_{=0.0333} = 10^7 \text{ m/s}\end{aligned}$$

$10^7 \text{ m/s} \ll 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ bzw. der Ausdruck in den Klammern (0.0333) gibt direkt den Anteil an der Lichtgeschwindigkeit an, dieser ist viel kleiner als 1.

4.6 Grenzen des Dopplereffekt

Bis zur Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c ist eine Frequenzänderung bestimmbar. Sie können sich dies wie folgt überlegen:

Ruhender Beobachter Die Quelle nähert sich mit einer Geschwindigkeit welche höher ist als die Schallgeschwindigkeit. Die Quelle kann keine Schallwellen mehr nach vorne in Richtung des Beobachters aussenden,

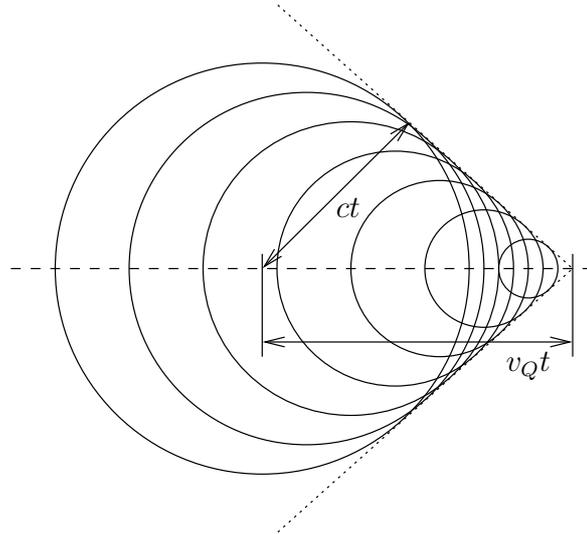


Abbildung 8: Eine Schallquelle bewegt sich mit einer Geschwindigkeit v_Q , die grösser ist als die Wellengeschwindigkeit c . Die Einhüllende der Wellenfronten bildet einen Kegel mit der Quelle in der Spitze.

da sich diese Schallwellen dann schneller als die Schallgeschwindigkeit c ausbreiten müssten. Der Beobachter hört die sich nähernde Quelle gar nicht und kann somit auch keine Frequenz der Quelle bestimmen.

Ruhende Quelle Der Beobachter entfernt sich mit einer Geschwindigkeit welche höher ist als die Schallgeschwindigkeit. Der Beobachter kann die Quelle ebenfalls gar nicht hören.

Mathematisch Einsetzen einer Geschwindigkeit die höher ist als c in die Gleichung (37), ergibt eine negative Frequenz. Eine negative Frequenz ist physikalisch unmöglich.

Die Schallwellen breiten sich bei einer Geschwindigkeit der Quelle die grösser als c ist wie in Abbildung 8 dargestellt aus.