

Materiewellen

Thomas Kuster

19. Mai 2007

1 Theorie

1.1 de Broglie-Beziehung

Energie (Licht):

$$E = pc \tag{1}$$

Letzte Stunde:

$$E = hf \tag{2}$$

Aus der Gleichung (1) mit Gleichung (2) folgt:

$$p = \frac{E}{c} \stackrel{(2)}{=} \frac{hf}{c} \tag{3}$$

Mit der Beziehung $f = c/\lambda$ folgt:

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{4}$$

De Broglie (Abbildung 4) vermutete in seiner Doktorarbeit 1923, dass dieser Zusammenhang auch für Elektronen und andere Teilchen zutrifft.

Die Hypothese bestätigte sich und de Broglie erhielt 1929 den Nobelpreis in Physik „for his discovery of the wave nature of electrons“.

1.2 Wellenlänge von Materie

Energie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} \quad \text{Beachte: } \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{mv^2}{2} \frac{m}{m} \quad (5)$$

$$p = \sqrt{2E_{\text{kin}}m} \stackrel{(4)}{=} \frac{h}{\lambda} \quad (6)$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2E_{\text{kin}}m}} \quad (7)$$

Energie des Elektron (Beschleunigungsspannung U):

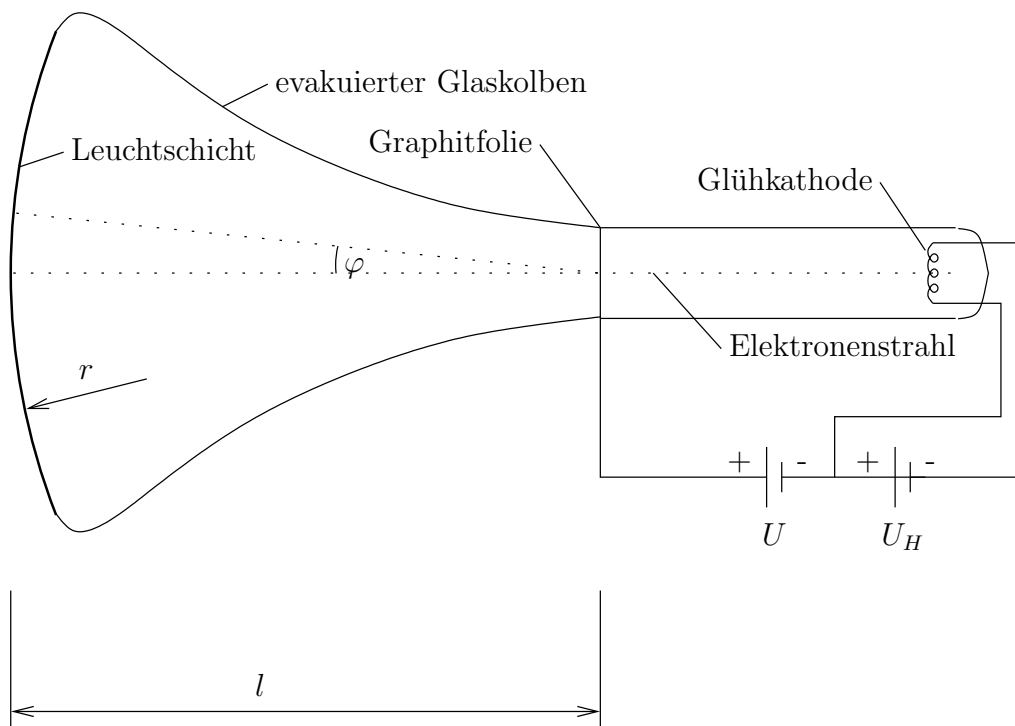
$$E = Uq \quad \text{mit: } q = e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (8)$$

Wellenlänge des Elektron:

$$\lambda \stackrel{(8)}{=} \frac{h}{\sqrt{2Uem}} \quad (9)$$

2 Versuch

In einer Kathodenstrahlröhre (evakuierter Glasröhre) werden Elektronen mit 5 kV beschleunigt. 13.5 cm von der Anode (Graphitfolie) befindet sich eine Leuchtschicht welche Licht aussendet bei Elektronenbeschuss (Kathodolumineszenz). Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 1 dargestellt.



Werte		Maxima	
$l =$	13.5 cm	$d =$	_____
$r =$	13 cm	$d =$	_____
$U =$	_____	$d =$	_____
$U_H =$	_____	$d =$	_____

Abbildung 1: Kathodenstrahlröhre: Elektronenstrahl tritt durch eine Graphitfolie.

Tabelle 1: Bindungslängen von Kohlenstoff

Bindung	Länge [pm]
C–C	154
C=C	134
C≡C	120

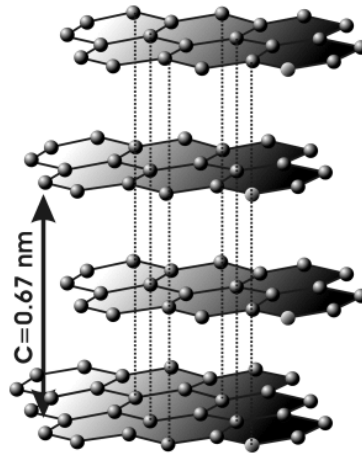


Abbildung 2: Hexagonale Kristallstruktur des Graphit. Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Graphit>

3 Aufgaben

3.1 Experiment

1. Berechnen Sie die Wellenlänge der Elektronenstrahl im Versuch
2. Welche Gitterkonstanten d erhalten Sie (Optik: Für die Intensitätsmaxima bei φ_n gilt: $\sin(\varphi_n) = n \frac{\lambda}{d}$ mit $n = \{0, 1, 2, \dots\}$)
3. Was folgern Sie daraus für die Orientierung der Graphitfolie (Beachten Sie dazu Tabelle 1 und die Abbildung 2) bzw. welche Abstände „sehen“ Sie.

3.2 Beugung des Menschen

Wieso beugen Sie sich nicht, wenn Sie durch eine Türe gehen? Tipp: Berechnen Sie die Breite welche die Tür haben müsste, damit Sie sich an ihr beugen würden (Treffen Sie sinnvolle Annahmen).

3.3 Elektronenmikroskop

Den kleinsten Abstand d der mit einem Mikroskop aufgelöst werden kann berechnet sich wie folgt (vergleiche Optik):

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin u}$$

Mit Röntgenstrahlen ($\lambda = 10^{-2} \text{ nm}$) müssten einzelne Atome sichtbar sein (Atomabstand $\approx 10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ Å}$). Für Röntgenstrahlen gibt es aber keine Linsen (Brechungsquotient ist bei allen Stoffen nahezu 1).

Die Röntgenstrahlen lassen sich aber durch Elektronen mit kleiner Wellenlänge ersetzen. Elektronen lassen sich durch elektrische und magnetische Felder ablenken, wodurch auch für sehr kurzwellige Elektronenstrahlen Linsen gebaut werden können. Die unvermeidlichen Linsenfehler lassen nur Werte von $\sin u \approx 10^{-2}$ zu.

Welche Abstände lassen sich auflösen wenn die Beschleunigungsspannung $U \approx 100 \text{ kV}$ beträgt.

4 Lösungen

4.1 Experiment

4.1.1 Wellenlänge des Elektronenstrahls

Energie:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2E_{\text{kin}}m}}$$

Energie des Elektron (Beschleunigungsspannung U):

$$E = Uq \quad \text{mit: } q = e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (10)$$

Wellenlänge des Elektron:

$$\begin{aligned} \lambda &\stackrel{(10)}{=} \frac{h}{\sqrt{2Uem}} \\ &= \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{\sqrt{2 \cdot 3000 \text{ V} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} \\ &= \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ N m s}}{\sqrt{8.757 \cdot 10^{-46} \text{ J C}^{-1} \text{ C kg}}} \\ &= \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ kg m s}^{-2} \text{ m s}}{\sqrt{8.757 \cdot 10^{-46} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ kg}}} \\ &= 2.239 \cdot 10^{-11} \frac{\text{kg m}^2 \text{ s}^{-1}}{\text{kg m s}^{-1}} = 2.239 \cdot 10^{-11} \text{ m} \\ &= 22.39 \text{ pm} = 0.2239 \text{ \AA} \end{aligned}$$

4.1.2 Gitterkonstanten d

Folgende Radien wurden gemessen:

$$\begin{aligned} r_1 &= 1.3 \text{ cm} \\ r_2 &= 2.5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Für den Winkel φ folgt daraus (Krümmung wird vernachlässigt):

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \arctan\left(\frac{r_i}{l}\right) \\ \varphi_1 &= \arctan\left(\frac{1.3 \text{ cm}}{13.5 \text{ cm}}\right) = 5.5^\circ \\ \varphi_2 &= \arctan\left(\frac{2.5 \text{ cm}}{13.5 \text{ cm}}\right) = 10.5^\circ\end{aligned}$$

Beide Maxima sind 1. Ordnung daher gilt für die Gitterkonstanten:

$$\begin{aligned}\sin \varphi_i &= \frac{\lambda}{d_i} \\ d_i &= \frac{\lambda}{\sin(\varphi_i)} \\ d_1 &= \frac{2.239 \cdot 10^{-11} \text{ m}}{\sin(5.5^\circ)} = 2.34 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 234 \text{ pm} \\ d_2 &= \frac{2.239 \cdot 10^{-11} \text{ m}}{\sin(10.5^\circ)} = 1.23 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 123 \text{ pm}\end{aligned}$$

4.1.3 Folgerung

Diese Größen liegen nicht im Bereich des Abstands, der parallel verlaufenden Schichten, welcher $670/2 \text{ pm}$ beträgt. Der Elektronenstrahl wäre in der Abbildung 2 vertikal einzuzeichnen.

Sichtbar gemacht wurden also die Abstände der Hexagonalstruktur. Die Kohlenstoffatome sind sp^2 -hybridisiert, für den Abstand kann als Näherung der Mittelwert zwischen Einfach- und Doppelbindung gewählt werden (144 pm) oder der exakte Abstand¹ von 142 pm. Dies ergibt dann die in Abbildung 3 eingezeichneten Abstände. Der Gitterabstand von 123 pm tritt drei mal auf (jeweils um 120° gedreht). Wie sich der Gitterabstand von 234 pm ergibt ist mit allerding auch nicht klar.

4.2 Beugung des Menschen

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2E_{\text{kin}}m}}$$

¹Quelle: <http://hypertextbook.com/facts/2001/AliceWarrenGregory.shtml>

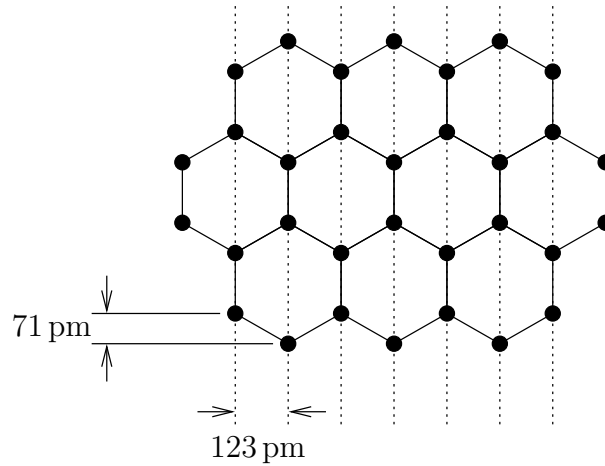


Abbildung 3: Hexagonale Struktur des Graphit. Der Gitterabstand ist durch die gepunkteten Linien dargestellt, jeweils um 120° gedreht könnten nochmals dieselben Linien eingezeichnet werden

Da sich der Mensch bewegen muss um auch durch einen Spalt zu kommen darf v nicht 0 sein. Mit folgenden Annahmen:

$$\begin{aligned} v &= 1 \text{ m/s} \\ m &= 80 \text{ kg} \end{aligned}$$

ergibt sich folgende Wellenlänge:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{\sqrt{2\frac{1}{2}mv^2m}} = \frac{h}{mv} \\ &= \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{80 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}} = 8.28 \cdot 10^{-36} \text{ m} \end{aligned}$$

Dies ist viel kleiner als der Abstand zweier Atome und auch dort zwischen durch passt kein Mensch.

4.3 Elektronenmikroskop

Die Wellenlänge der Elektronen beträgt:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Uem}} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{\sqrt{2 \cdot 100\,000 \text{ V} \cdot 1.602 \text{ C} \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} \quad (11)$$

$$= 3.878 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{\lambda}{2 \sin u} \stackrel{(12)}{=} \frac{3.878 \cdot 10^{-12} \text{ m}}{2 \cdot 10^{-2}} \\
 &= 1.9 \cdot 10^{-10} \text{ m} \approx 0.2 \text{ nm}
 \end{aligned}$$

Die Auflösung liegt etwa im Bereich der Atomgrösse ($\approx 10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA}$).

A Unterrichtsablauf

Beginn 10:20

Ende 11:00

Ziele

- Ähnlichkeit von Licht und Materie erkennen
- Frequenz bzw. Wellenlänge aus der Energie berechnen können
- Wellenlänge von Materie berechnen können

A.1 Einstieg 1' 10:20

Was haben Sie letztes mal gelernt? Licht kann auch ein Teilchen sein (Photonen)

Welche Gedanken haben Sie sich dazu gemacht? Kann auch Materie eine Welle sein

A.2 Theorie de Broglie 2' 10:21

Herleitung der de Broglie-Beziehung

Energie von Licht

Energie gequantelt Kam in letzter Stunde

A.3 de Broglie 3' 10:24

Folie Abbildung [4](#) auflegen.

Doktorarbeit 1923, Zusammenhang soll auch für Elektronen und andere Teilchen zutreffen.

Nobelpreis Hypothese bestätigte sich, 1929 Nobelpreis in Physik „for his discovery of the wave nature of electrons“.

A.4 Versuchsaufbau 5’ 10:29

Versuchsaufbau Erklären an der Wandtafel

Erwartung Punkt auf dem Schirm. Beugung ist nur zu erwarten falls Welle.

A.5 Versuch durchführen 3’ 10:32

Werte notieren Durchmesser der Ringe, Spannung,...

A.6 Nobelpreis 1937 2’ 10:34

Folie Abbildung [5](#)

Experiment Gab für Experiment und Theorie einen Nobelpreis

Anekdote Sohn bekam Nobelpreis für Elektron als Welle. Vater für die Entdeckung des Teilchen Elektron.

A.7 Wellenlänge der Materie 5’ 10:39

Energie Kinetische Energie auf Grund der Masse. Nach Impuls auflösen und Gleichsetzen mit de Broglie Beziehung. Auflösen nach der Wellenlänge

Energie des Elektrons Berechnet sich aus der Beschleunigungsspannung, einsetzen.

A.8 Praktische Anwendung 5’ 10:44

Strukturuntersuchungen Kristallgitterabstände

Elektronenmikroskop Auflösung hängt von der Wellenlänge ab, Wellenlänge ist viel kleiner $\Rightarrow$ bessere Auflösung

A.9 Aufgaben lösen 10' 10:55



Abbildung 4: Prince Louis-Victor Pierre Raymond de Broglie (* 15. August 1892 in Dieppe, Normandie; † 19. März 1987 in Louveciennes, Département Yvelines). Quelle: <http://www.aip.org/history/newsletter/spring2003/photos-larger.htm>



(a) Clinton Joseph Davisson
(* 22. Oktober 1881 in Bloomington, Illinois; † 1. Februar 1958 in Charlottesville, Virginia):



(b) George Paget Thomson
(* 3. Mai 1892 in Cambridge; † 10. September 1975 in Cambridge)

Abbildung 5: Nobelpreis 1937: „for their experimental discovery of the diffraction of electrons by crystals“.

Davisson erklärte: „In den letzten Jahren haben wir erkannt, dass Elektronen in manchen Situationen sinnvollerweise, ja vielleicht notwendigerweise, als Wellen und nicht als Teilchen betrachtet werden sollten, und Begriffe wie Beugung, Brechung, Reflexion und Dispersion zu ihrer Beschreibung anzuwenden sind.“

Der Vater von George, Joseph erhielt 1906 den Nobelpreis. In seiner Festrede hat er erklärt: „Ich möchte hier einige Untersuchungen beschreiben, die zum Schluss führen, dass die Träger der negativen Elektrizität Teilchen sind, die ich Elektronen genannt habe.“ Quelle: Bilder: http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1937/, Text: Sexl. Materie in Raum und Zeit. Band 3. Frankfurt am Main, 1980.