

Dopplereffekt

Thomas Kuster

18. Mai 2007

1 Bewegte Quelle

1.1 Herleitung der Gleichung

Variablen:

- v_Q : Geschwindigkeit des Velofahrer (Ethan), wird gesucht
- v_B : Geschwindigkeit des Beobachters (Kamera steht)
- f_Q : Frequenz des Senders (Hupe von Ethan)
- f_B : Frequenz beim Beobachter (Frequenz in der Aufnahme)

Bekannt:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (1)$$

Wie lange dauert eine Periode:

$$T = \frac{1}{f} \quad (2)$$

$$T_Q = \frac{1}{f_Q} \quad (3)$$

Welche Strecke wird in dieser Zeit (T_Q) zurück gelegt (Quelle bewegt sich gleichmässig):

$$v_Q = \frac{s}{\Delta t} = \frac{s}{T_Q} \quad (4)$$

$$s = v_Q T_Q \quad (5)$$

Quelle nähert sich Wellenlänge verkürzt sich aus Sicht des Beobachters um die zurückgelegte Strecke (s):

$$\lambda_B = \lambda_Q - s \quad (6)$$

$$\stackrel{(5)}{=} \lambda_Q - v_Q T_Q \quad (7)$$

Gleichung (7) in Frequenzen ausdrücken (Gleichung (1) verwenden):

$$\frac{c}{f_B} = \frac{c}{f_Q} - v_Q T_Q \quad (8)$$

$$\stackrel{(3)}{=} \frac{c}{f_Q} - v_Q \frac{1}{f_Q} \quad (9)$$

$$= \frac{c}{f_Q} - \frac{v_Q}{f_Q} \quad (10)$$

$$= \frac{c - v_Q}{f_Q} \quad (11)$$

Gleichung (11) nach f_B auflösen:

$$c = \frac{c - v_Q}{f_Q} f_B \quad (12)$$

$$f_B = f_Q \frac{c}{c - v_Q} \quad (13)$$

Quelle entfernt sich In diesem Fall vergrößert sich die Wellenlänge aus Sicht des Beobachters. In Gleichung (7) wird das Minus zu einem Plus. Für das Ergebnis (Gleichung 13) folgt somit:

$$f_B = f_Q \frac{c}{c + v_Q} \quad (14)$$

Sie können sich dies auch Anhand der Abbildung 1 und 2 überlegen. Die Quelle schwingt mit der Schwingungsdauer T_Q . Während der Zeit T_Q bewegt sich die Quelle um eine Strecke $v_Q T_Q$ nach rechts und die 3. Wellenfront pflanzt sich um einen Abstand $c T_Q$ fort. Der Abstand zwischen der 3. Wellenfront (Kreis um Punkt 3 als Mittelpunkt) und der 4. Wellenfront (Punkt 4) ist vor der Quelle λ_v , nach der Quelle λ_n . Daraus folgt: $\lambda_n > \lambda > \lambda_v$ mit $\lambda_v = (c - v_Q) T_Q$ und $\lambda_n = (c + v_Q) T_Q$.

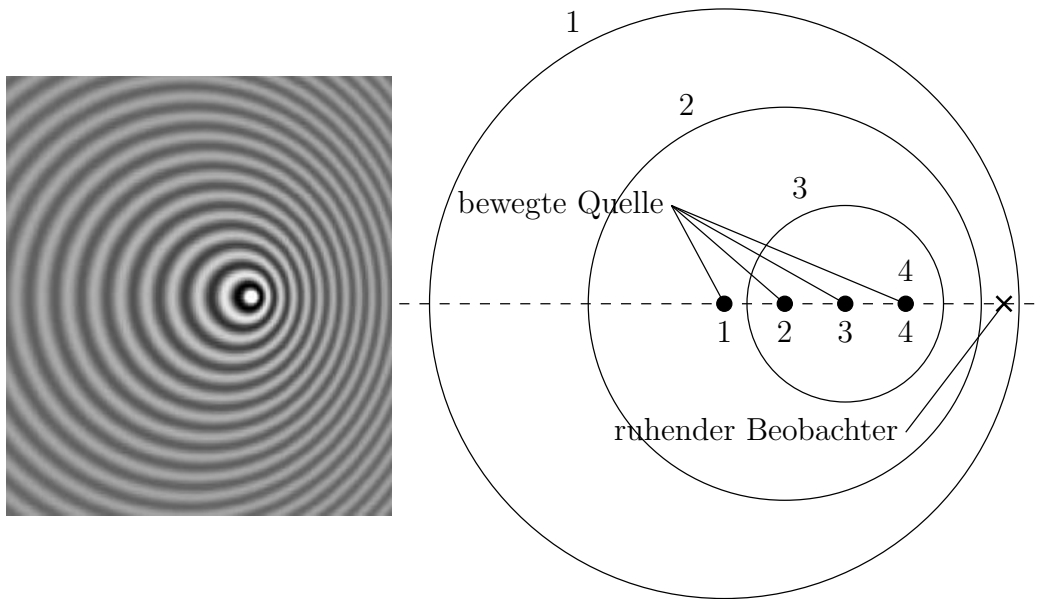


Abbildung 1: Bewegte Quelle. Die Nummern der Wellenfronten entsprechen den Positionen der Quelle, wo die Welle ausgestrahlt wurde.

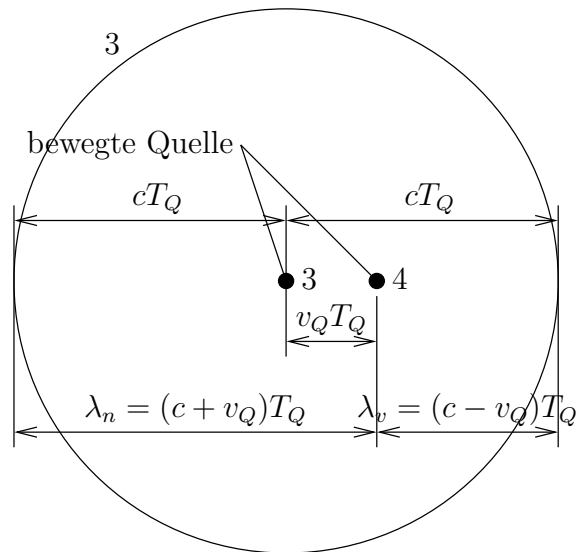


Abbildung 2: Die Quelle schwingt mit der Schwingungsdauer T_Q . Während der Zeit T_Q bewegt sich die Quelle um eine Strecke $v_Q T_Q$ nach rechts.

Tabelle 1: Merkhilfen, Intervall. Quelle http://de.wikipedia.org/wiki/Intervall_%28Musik%29

Intervall	steigend	fallend
übermäßige Prime = chromatischer Halbton	The Entertainer (Scott Joplin)	der Beginn der Ouvertüre des Musicals Das Phantom der Oper von Andrew Lloyd Webber
kleine Sekunde = diatonischer Halbton	Kommt ein Vogel geflogen	Vom Himmel hoch, da komm ich her (Mendelssohn) Für Elise (Beethoven)
große Sekunde	Alle meine Entchen	Schlaf, Kindlein, schlaf
kleine Terz	Ein Vogel wollte Hochzeit machen Macht hoch die Tür	Hänschen klein Kuckuck, Kuckuck, ruft's aus dem Wald
große Terz	Oh, when the saints go marching in Alle Vögel sind schon da	Swing low, sweet chariot Nun ruhen alle Wälder (Dur) Beethovens Schicksalssinfonie: G-G-G- Es (indifferent, s. u.)
Quarte	O Tannenbaum Wir kamen einst von Piemont Love Me Tender (Elvis Presley)	Morgen, Kinder, wird's was geben Auf, du junger Wandersmann
Tritonus	Maria (West Side Story) Titelmelodie von Die Simpsons („ The Simp -sons“)	In „Kommt ein Vogel geflogen“: ...von der Mut-ter einen Gruß
Quinte	Wach auf, meins Herzens Schöne Morgen kommt der Weihnachtsmann (C- C -G-G)	On a wagon (Donna donna) Ich heff mol en Hamburger Veermaster sehn
kleine Sexte	When Israel was in Egypt's land	Schicksalsmelodie
große Sexte	Dies Bildnis ist bezaubernd schön Ein Prosit der Gemütlichkeit Arrivederci Roma Go West (Village People) My Bonnie is over the ocean	Nobody knows the trouble I've seen Winde weh'n, Schiffe geh'n
kleine Septime	There's a place for us (Somewhere aus West Side Story) Zogen einst fünf wilde Schwäne (Refrain: „Sing, sing“)	In „Bunt sind schon die Wälder“: ...und der He- erbst be -ginnt
große Septime	O terra, addio, Schlussduett aus Aida	Die Hütte auf Hühnerfüßen (Mussorgski - Bilder einer Ausstellung)
Oktave	Somewhere over the rainbow	Mainzer Narrhallamarsch

1.2 Was ist bekannt

Intervall des Klangs kann mit Hilfe der Tabelle 1 bestimmt werden (im Beispiel kleine Sekunde). Bei der Annäherung (vorlaufende Welle) würde die Frequenz f_{B_v} vom Beobachter gemessen, beim Entfernen (nachlaufende Welle) die Frequenz f_{B_n} . Gemäss Tabelle 2 entspricht dies einem Frequenzverhältnis von:

$$\text{kleine Sekunde} = \frac{256}{243} = \frac{f_{B_v}}{f_{B_n}} \quad (15)$$

Falls Sie musisch nicht begabt sind, ist es auch möglich mit einem Audioprogramm das Spektrum des Klangs vor und nach dem passieren der Hupe anzuzeigen und das Verhältnis der Frequenz von zwei gleichen Maxima zu bilden (Abbildung 3 und 4). Dies ergibt im Beispiel:

$$\frac{2882 \text{ Hz}}{2732 \text{ Hz}} \approx \frac{256}{243} \quad (16)$$

Tabelle 2: Intervall. Quelle http://de.wikipedia.org/wiki/Intervall_%28Musik%29

Intervall	Proportionen	Spezialnamen	Näherung	zwölfstufig
Prime	$\frac{1}{1}$	reine Prime	0 Cent	0 Cent
übermäßige Prime	$\frac{25}{135}$ $\frac{24}{128}$	kleiner chromatischer Halbton großer chromatischer Halbton	71 Cent 92 Cent	100 Cent
kleine Sekunde	$\frac{256}{16}$ $\frac{243}{15}$	Leimma diatonisch-rein	90 Cent 112 Cent	100 Cent
große Sekunde	$\frac{10}{9}$ $\frac{9}{8}$	kleiner Ganzton großer Ganzton	182 Cent 204 Cent	200 Cent
kleine Terz	$\frac{6}{5}$	reine kleine Terz	316 Cent	300 Cent
große Terz	$\frac{5}{4}$	reine große Terz	386 Cent	400 Cent
Quarte	$\frac{4}{3}$	reine Quarte	498 Cent	500 Cent
übermäßige Quarte	$\frac{45}{7}$ $\frac{32}{5}$ $\frac{729}{512}$	diatonisch-rein Huygens Tritonus	590 Cent 582 Cent 612 Cent	600 Cent
verminderte Quinte	$\frac{64}{10}$ $\frac{45}{7}$	diatonisch-rein Euler	610 Cent 617 Cent	600 Cent
Quinte	$\frac{3}{2}$	reine Quinte	702 Cent	700 Cent
kleine Sexte	$\frac{8}{5}$	reine kleine Sexte	814 Cent	800 Cent
große Sexte	$\frac{5}{3}$	reine große Sexte	884 Cent	900 Cent
kleine Septime	$\frac{16}{7}$ $\frac{9}{4}$	diatonisch-rein Naturseptime	996 Cent 986 Cent	1000 Cent
große Septime	$\frac{15}{8}$	diatonisch-rein	1088 Cent	1100 Cent
Oktave	$\frac{2}{1}$	reine Oktave	1200 Cent	1200 Cent

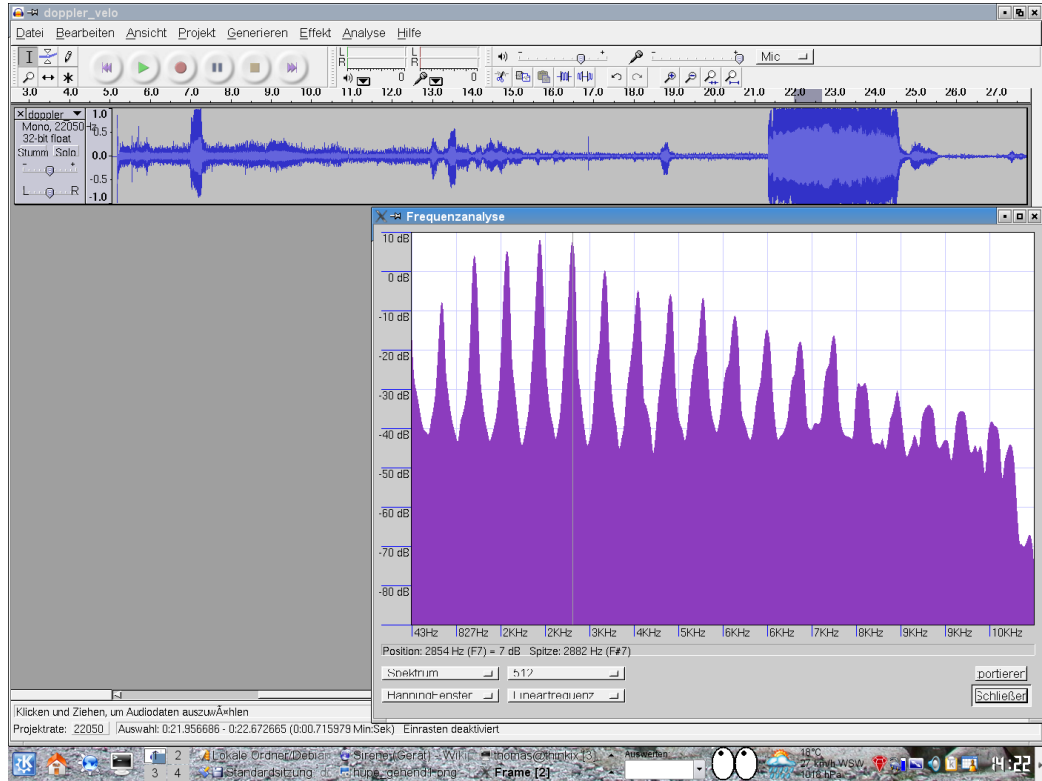


Abbildung 3: Hupe bewegt sich in Richtung Beobachter: Frequenz der 5. Spitz: 2882 Hz. Erstellt mit Audacity (<http://audacity.sourceforge.net/>)

1.3 Geschwindigkeit berechnen

Gleichung aufstellen für das Frequenzverhältnis (Gleichung 15) und lösen nach v_Q :

$$\frac{f_{B_v}}{f_{B_n}} = \frac{\overbrace{cf_Q}^{\text{Gleichung (13)}}}{\underbrace{cf_Q}_{\text{Gleichung (14)}}} = \frac{cf_Q(c + v_Q)}{cf_Q(c - v_Q)} = \frac{c + v_Q}{c - v_Q} \quad (17)$$

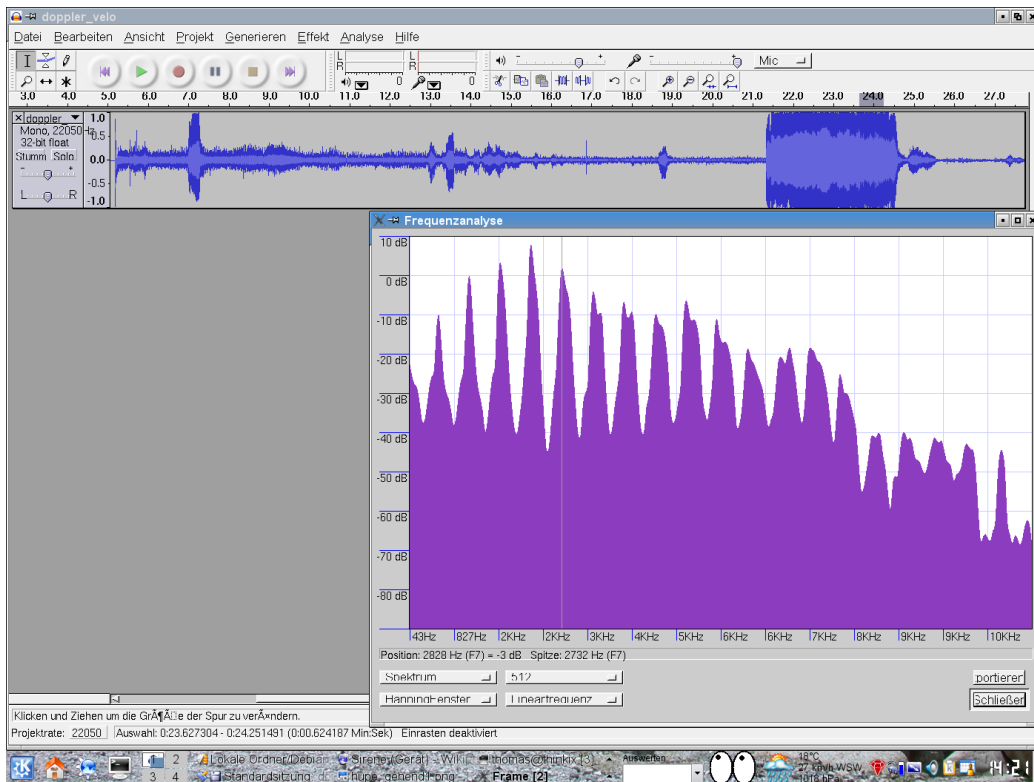


Abbildung 4: Hupe bewegt sich vom Beobachter weg: Frequenz der 5. Spitz: 2732 Hz. Erstellt mit Audacity (<http://audacity.sourceforge.net/>)

Die Gleichung (17) nach v_Q lösen (mit $p = \frac{f_{B_v}}{f_{B_n}}$):

$$\frac{f_{B_v}}{f_{B_n}} = p = \frac{c + v_Q}{c - v_Q} \quad (18)$$

$$p(c - v_Q) = c + v_Q \quad (19)$$

$$pc - pv_Q = c + v_Q \quad (20)$$

$$pc - c = v_Q + pv_Q \quad (21)$$

$$c(p - 1) = v_Q(1 + p) \quad (22)$$

$$\frac{c(p - 1)}{1 + p} = v_Q \quad (23)$$

Einsetzen der Werte ergibt:

$$\frac{c(p - 1)}{1 + p} = \frac{344 \text{ m/s} \cdot \left(\frac{256}{243} - 1\right)}{1 + \frac{256}{243}} = 9.0 \text{ m/s} = 32 \text{ km/h} \quad (24)$$

1.4 Feuerwehr

Die Frequenzänderung ist eine grosse Sekunde ($p = \frac{10}{9}$), Maxima im Spektrum z. B. $p = \frac{1355}{1218}$

$$p = \frac{344 \text{ m/s} \cdot \left(\frac{10}{9} - 1\right)}{1 + \frac{10}{9}} = 18.3 \text{ m/s} = 66 \text{ km/h} \quad (25)$$

1.5 Videoquellen

Feuerwehr Ein Fahrzeug der Feuerwehr fährt mit eingeschaltetem Martinshorn¹ am Beobachter vorbei. Originaltitel: Fire Engine siren demonstrates the Doppler Effect

<http://www.youtube.com/watch?v=imoxDcn2Sgo>

Ethan Velofahrer fährt mit einem Gashorn am Beobachter vorbei. Originaltitel: doppler effect experiment

http://www.youtube.com/watch?v=9jVIP_a-RM8

¹Umgangssprachlicher Begriff für das Folgetonhorn. Markenrechtlich geschützter Name der Deutschen Signal-Instrumenten-Fabrik Max B. Martin

2 Ruhende Quelle

2.1 Herleitung

Idee Das nächste Maximum (ausgezogene Kreise) bewegt sich mit c auf den Beobachter zu, welcher sich mit v_B auf diesen zubewegt (Abbildung 5).

Welche Zeit wird benötigt bis sie sich treffen? Die benötigte Zeit bis sie sich treffen, entspricht der Periodendauer (T_B) der Welle aus der Sicht des Beobachters.

$$v = \frac{s}{\Delta t} \quad (26)$$

$$\underbrace{s_{1,2}}_{\lambda_Q} = v \underbrace{t}_{T_B} \quad (27)$$

Die Strecke setzt sich aus 2 Strecken zusammen, diejenige welche das Wellenmaximum und die welche vom Beobachter zurücklegt wird.

$$\lambda_Q = cT_B + v_B T_B \quad (28)$$

$$= T_B(c + v_B) \quad (29)$$

$$= \frac{1}{f_B}(c + v_B) \quad (30)$$

Gleichung (30) nach f_B auflösen und λ_Q durch f_Q ausdrücken (Gleichung (1) verwenden):

$$\frac{c}{f_Q} = \frac{1}{f_B}(c + v_B) \quad (31)$$

$$f_B \frac{c}{f_Q} = c + v_B \quad (32)$$

$$f_B = f_Q \frac{c + v_B}{c} \quad (33)$$

Beobachter bewegt sich von der Quelle weg Es ändert sich wiederum das Vorzeichen:

$$f_B = f_Q \frac{c - v_B}{c} \quad (34)$$

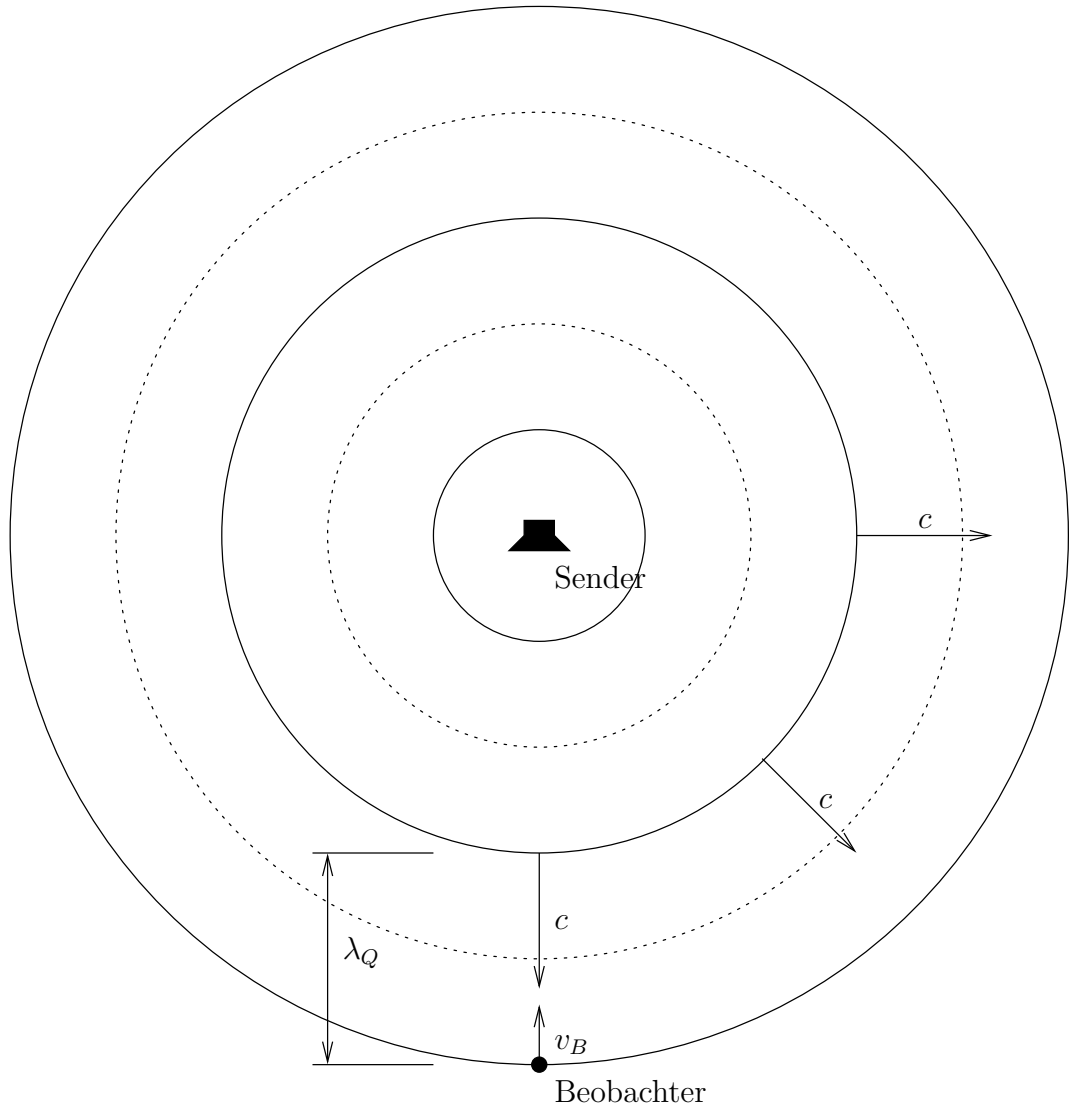


Abbildung 5: Beobachter bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_B auf die Quelle zu, Quelle ruht und sendet ein Signal mit der Wellenlänge λ_Q (Frequenz f_Q) aus.

2.2 Übersicht

Die Gleichungen (33) und (34) lassen sich wie folgt zu einer zusammenfassen (oberes Vorzeichen für Annäherung):

$$f_B = f_Q \frac{c \pm v_B}{c} \quad (35)$$

Das selbe ist mit den Gleichungen (13) und (14) für den ruhenden Beobachter möglich (oberes Vorzeichen für Annäherung):

$$f_B = f_Q \frac{c}{c \mp v_Q} \quad (36)$$

2.2.1 Kombination

Die Gleichungen (35) und (36) können zu einer kombiniert werden (oberes Vorzeichen für Annäherung):

$$f_B = f_Q \frac{c \pm v_B}{c \mp v_Q} \quad (37)$$

Überprüfung leicht möglich durch setzen von $v_B = 0$ bzw. $v_Q = 0$.

3 Aufgaben

3.1 Signalhorn

Die Frequenz einer Autohupe beträgt 400 Hz. Ein Hupsignal ertönt, wenn das Auto mit einer Geschwindigkeit von $v_Q = 34 \text{ m/s}$ (ca. 122 km/h) durch die ruhende Luft hin zu einem ruhenden Empfänger fährt. Finden Sie:

1. Die Wellenlänge des Schalls, die den Empfänger erreicht.
2. Die Empfangene Frequenz
3. Finden Sie die Wellenlänge des Schalls, die den Empfänger erreicht und die empfangene Frequenz, wenn das Auto steht und hupt, der Empfänger sich aber mit einer Geschwindigkeit von $v_B = 34 \text{ m/s}$ zum Auto hinbewegt.

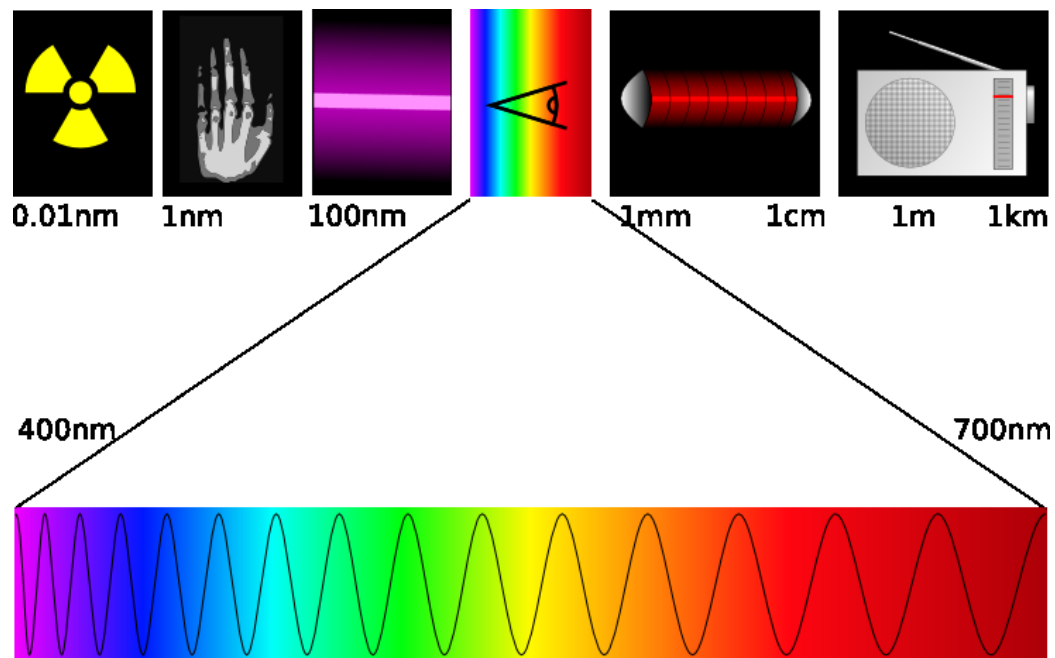


Abbildung 6: Der sichtbare Bereich der elektromagnetischen Strahlung.
 Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Licht>

3.2 Astronomie

Das Licht weit entfernter Galaxien ist zum Roten verschoben. Was folgern Sie daraus? Sehen Sie sich dazu auch Abbildung 6 an.

3.3 Startender Airbus A380

Ein Airbus A380 startet, Sie stehen in der Verlängerung der Startpiste und der Airbus fliegt direkt über Sie. Sie wissen, dass die Startgeschwindigkeit des A380 260 km/h ist. Welches Intervall (Frequenz Verhältnis) hören Sie? Die Frequenzverhältnisse (Proportionen) können Sie z. B. bei [Wikipedia](#) nachsehen oder in der Tabelle [2](#).

3.4 Radar der Polizei

Das Radargerät sendet elektromagnetische Wellen aus, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s) ausbreiten. Der elektrische Strom in der

Antenne der Radareinheit schwingt mit der Frequenz $f_{Q_{\text{Polizei}}} = 1.5 \cdot 10^9 \text{ Hz}$. Die Wellen werden an einem fahrenden Auto reflektiert, welches sich von dem Polizeiauto mit einer Geschwindigkeit von $v = 50 \text{ m/s}$ wegbewegt. Berechnen Sie den Frequenzunterschied Δf zwischen der ausgesendeten Frequenz f_Q und der empfangenen Frequenz $f_{B_{\text{Polizei}}}$. Gehen Sie wie folgt vor:

1. Berechnen Sie die Frequenz ($f_{B_{\text{Auto}}}$) die beim Auto empfangen wird.
2. Das Auto reflektiert die soeben berechnete Frequenz wieder ($f_{Q_{\text{Auto}}} = f_{B_{\text{Auto}}}$). Welche Frequenz ($f_{B_{\text{Polizei}}}$) misst nun die Polizei?
3. Spielt es eine Rolle ob Sie das Polizeiauto oder das andere Auto als ruhend annehmen? Wenn nicht, wieso?
4. Der Unterschied der Frequenz ist sehr gering. Weshalb kann der Unterschied trotzdem sehr genau gemessen werden?

3.5 Verkehrssünder

Auch Lichtwellen können den Dopplereffekt zeigen (siehe Aufgabe 4.2). Wenn die Geschwindigkeit des Beobachters im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit klein ist, gelten näherungsweise dieselben Gleichungen wie beim akustischen Dopplereffekt.

Verwenden Sie für die Wellenlänge des roten Lichts 620 nm , für die des gelben Lichts 600 nm .

1. Wie schnell müssten Sie mit Ihrem neuen Ferrari auf ein rotes Lichtsignal zufahren, damit es Ihnen gelb erscheint?
2. Ist diese Geschwindigkeit im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit wirklich noch klein?

3.6 Grenzen des Dopplereffekt

Bis zu welcher Geschwindigkeit können Sie eine Frequenzverschiebung berechnen? Wieso ist dies so? Versuchen Sie die Wellenausbreitung in einem nicht mehr berechenbaren Fall aufzuzeichnen.

4 Lösungen

4.1 Signalhorn

1. und 2.

Überlegungen, Abschätzung Die Quelle (Auto) kommt auf den Empfänger zu $\Rightarrow$ Die Hupe ertönt höher $\Rightarrow$ Frequenz ist höher $\Rightarrow$ Wellenlänge ist kleiner.

Gegeben

$$\begin{aligned}f_Q &= 400 \text{ Hz Frequenz der Hupe} \\v_Q &= 34 \text{ m/s Geschwindigkeit des Autos (Hupe)} \\c &= 344 \text{ m/s Schallgeschwindigkeit} \\v_B &= 0 \text{ m/s Geschwindigkeit des Empfängers}\end{aligned}$$

Gesucht

λ_B : Wellenlänge aus Sicht des Empfängers

Mit der Gleichung (37) kann die Frequenz beim Empfänger (f_B) berechnet werden. Aus dem Zusammenhang $\lambda_B f_B = c$ folgt:

$$\lambda_B = \frac{c}{f_B} \quad (38)$$

Für die nächste Aufgabe muss f_B berechnet werden, daher wird dieser Wert berechnet anstelle nur die Gleichung (38) in die Gleichung (37) einzusetzen:

$$f_B = f_Q \frac{c \pm v_B}{c \mp v_Q} \stackrel{v_B=0}{=} f_Q \frac{c}{c \mp v_Q}$$

Auf Grund der Abschätzung ist bekannt, dass die Hupe höher ertönen muss, d. h. $f_B > f_Q$ dies ist der Fall falls $\frac{c}{c \mp v_Q} > 1$ ist, daraus folgt $c < c \mp v_Q$ sein (Nenner muss kleiner als Zähler sein). Das obere Vorzeichen muss gewählt werden:

$$f_B = f_Q \frac{c}{c - v_Q} = 400 \text{ Hz} \frac{344 \text{ m/s}}{344 \text{ m/s} - 34 \text{ m/s}} = 443.871 \text{ Hz} \approx 444 \text{ Hz}$$

die Lösung der 2. Aufgabe. Für die 1. Aufgabe folgt mit der Gleichung (38):

$$\lambda_B = \frac{c}{f_B} = \frac{344 \text{ m/s}}{443.871 \text{ Hz}} = 0.775 \frac{\text{m}}{\text{s Hz}} = 0.775 \frac{\text{m}}{\text{s} \frac{1}{\text{s}}} = 0.775 \text{ m} \quad (39)$$

Zum Vergleich, die Wellenlänge der Hupe beträgt:

$$\lambda_B = \frac{344 \text{ m/s}}{400 \text{ Hz}} = 0.86 \text{ m} \quad (40)$$

3.

Überlegungen, Abschätzung Der Empfänger nähert sich der Quelle. Die Hupe ertönt ebenfalls höher $\Rightarrow$ Frequenz ist höher $\Rightarrow$ Wellenlänge ist kleiner.

Gegeben

$$\begin{aligned} f_Q &= 400 \text{ Hz Frequenz der Hupe} \\ v_Q &= 0 \text{ m/s Geschwindigkeit des Autos (Hupe)} \\ c &= 344 \text{ m/s Schallgeschwindigkeit} \\ v_B &= 34 \text{ m/s Geschwindigkeit des Empfängers} \end{aligned}$$

Gesucht

$$\begin{aligned} \lambda_B &: \text{Wellenlänge aus Sicht des Empfängers} \\ f_B &: \text{Frequenz aus Sicht des Empfängers} \end{aligned}$$

$$f_B = f_Q \frac{c \pm v_B}{c \mp v_Q} \stackrel{v_Q=0}{=} f_Q \frac{c \pm v_B}{c}$$

Die Hupe muss höher ertönen, das obere Vorzeichen muss gewählt werden:

$$f_B = f_Q \frac{c + v_B}{c} = 400 \text{ Hz} \frac{344 \text{ m/s} + 34 \text{ m/s}}{344 \text{ m/s}} = 439.535 \text{ Hz} \approx 440 \text{ Hz}$$

Die Wellenlänge des Schalls, die den den Empfänger erreicht ist die selbe die die Quelle aussendet, da sich die Wellen der ruhenden Quelle in der ebenfalls

ruhenden Luft ausbreiten. Die Wellenlänge ändert sich bei einer ruhenden Quelle nicht (vergleiche Abbildung 5) und beträgt somit:

$$\lambda_B = \frac{344 \text{ m/s}}{400 \text{ Hz}} = 0.86 \text{ m} \quad (41)$$

allerding erscheint sie dem bewegtem Empfänger kürzer:

$$\lambda_B = \frac{344 \text{ m/s}}{440 \text{ Hz}} = 0.783 \text{ m} \quad (42)$$

4.2 Astronomie

Nach der Abbildung 6 ist Rot die Farbe mit der längsten Wellenlänge. Leuchtet ein Stern z. B. Grün und er erscheint uns aber Gelb, also in Richtung Rot verschoben, wurde die Wellenlänge seines ausgestrahlten Lichts grösser. Die Wellenlänge erscheint dem Beobachter grösser wenn sich die Quelle (Stern) vom Beobachter wegbewegt.

Da das Licht weit entfernter Galaxien zum Roten verschoben ist müssen sich diese alle von der Erde entfernen, d. h. das Universum dehnt sich aus.

Messung Sterne senden nicht eine Farbe aus sondern ein ganzes Spektrum. Die Sonne, welche auch ein Stern ist, sendet alle Farben aus und erscheint daher Weiss. Auf Grund der Art und Weise wie das Licht in der Sonne entsteht fehlen einige schmale Bereiche im Spektrum (Spektrallinien). Bei den anderen Sternen fehlen diese ebenfalls, können die Linien einander zugeordnet werden, wird die Rotverschiebung ersichtlich (Abbildung 7).

4.3 Startender Airbus A380

Abschätzung Das Intervall muss sicher grösser sein als eine kleine Sekunde (Beispiel in der Stunde: Intervall der Gashupe des Velofahrers).

Gegeben

$$\begin{aligned} v_Q &= 260 \text{ km/h Geschwindigkeit der Quelle (Airbus)} \\ v_B &= 0 \text{ m/s Geschwindigkeit des Empfänger} \\ c &= 344 \text{ m/s Schallgeschwindigkeit} \end{aligned}$$

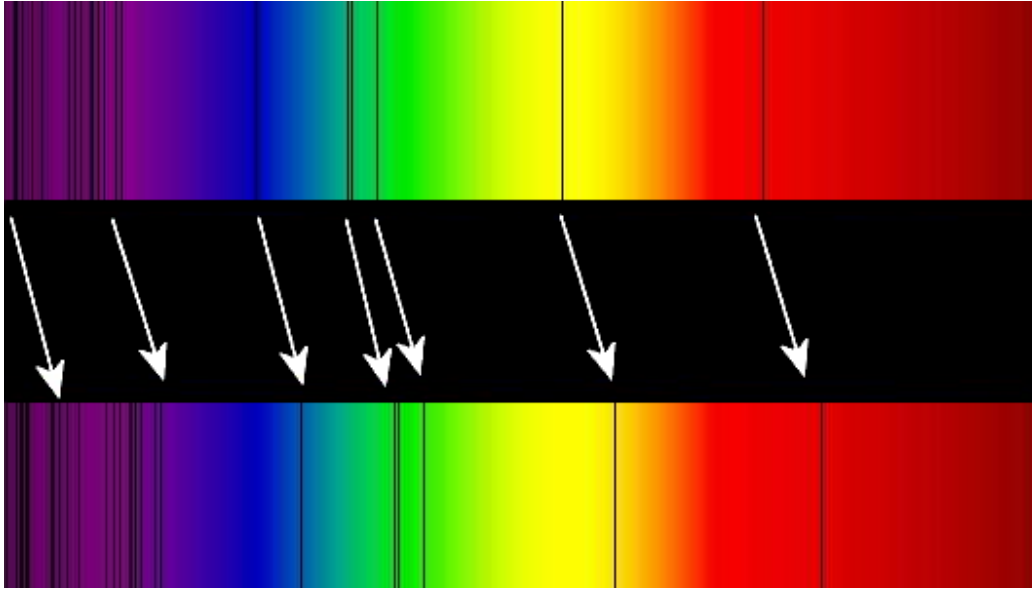


Abbildung 7: Supergalaxienhaufen (BAS11) unten im Vergleich zur Sonne oben. Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Rotverschiebung>

Gesucht Intervall (p), d. h. das Frequenzverhältnis zwischen der Frequenz beim auf Sie zu fliegen (F_{Q_v}) und beim von Ihnen weg fliegen (f_{Q_n}).

$$p = \frac{F_{Q_v}}{f_{Q_n}} \quad (43)$$

Die Frequenz beim auf Sie zufliegen beträgt:

$$f_{B_v} = f_Q \frac{c}{c - v_Q} \quad (44)$$

und beim wegfliegen:

$$f_{B_n} = f_Q \frac{c}{c + v_Q} \quad (45)$$

Einsetzen von Gleichung (44) und (45) in (43) ergibt:

$$p = \frac{F_{Q_v}}{f_{Q_n}} = \frac{f_Q \frac{c}{c - v_Q}}{f_Q \frac{c}{c + v_Q}} \quad (46)$$

$$= \frac{\frac{c}{c - v_Q}}{\frac{c}{c + v_Q}} = \frac{c + v_Q}{c - v_Q} \quad (47)$$

Die Geschwindigkeiten müssen in der Gleichen Einheit vorliegen, die des Airbus in m/s beträgt:

$$v_Q = 260 \text{ km/h} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{\text{km}} \cdot \frac{\text{h}}{3600 \text{ s}} = 72.2 \text{ m/s}$$

Einsetzen der Werte ergibt:

$$p = \frac{c + v_Q}{c - v_Q} = \frac{344 \text{ m/s} + 72.2 \text{ m/s}}{344 \text{ m/s} - 72.2 \text{ m/s}} = 1.53 \quad (48)$$

Das Intervall liegt zwischen einer Quinte ($\frac{3}{2}$) und einer kleine Sexte ($\frac{8}{5}$).

4.4 Radar der Polizei

1.

Gegeben

$$\begin{aligned} v_B &= v_{\text{Auto}} = 50 \text{ m/s} \text{ Geschwindigkeit des Empfänger (Auto)} \\ v_Q &= 0 \text{ m/s} \text{ Geschwindigkeit der Quelle (stehendes Polizeiauto)} \\ f_{Q_{\text{Polizei}}} &= 1.5 \cdot 10^9 \text{ Hz} \text{ Frequenz des ausgesendeten Radarsignals} \\ c &= 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \text{ Lichtgeschwindigkeit} \end{aligned}$$

Gesucht

$$f_{B_{\text{Auto}}} : \text{Empfangene Frequenz beim Auto}$$

Diese ist gegeben durch:

$$f_{B_{\text{Auto}}} = f_{Q_{\text{Polizei}}} \frac{c \pm v_B}{c \mp v_Q} = f_{Q_{\text{Polizei}}} \frac{c - v_{\text{Auto}}}{c} \quad (49)$$

2.

Gegeben

$$\begin{aligned} v_Q &= v_{\text{Auto}} = 50 \text{ m/s} \text{ Geschwindigkeit der Quelle (fahrendes Auto)} \\ v_B &= 0 \text{ m/s} \text{ Geschwindigkeit des Empfänger (stehendes Polizeiauto)} \\ f_{Q_{\text{Auto}}} &= f_{B_{\text{Auto}}} \text{ Frequenz des reflektierten Radarsignals (Gleichung (49))} \\ c &= 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \text{ Lichtgeschwindigkeit} \end{aligned}$$

Gesucht

$f_{B_{\text{Polizei}}}$: Empfangene Frequenz beim Polizeiauto

Diese ist gegeben durch:

$$f_{B_{\text{Polizei}}} = f_{Q_{\text{Auto}}} \frac{c \pm v_B}{c \mp v_Q} = f_{Q_{\text{Auto}}} \frac{c}{c + v_{\text{Auto}}} \quad (50)$$

$$\stackrel{(49)}{=} f_{Q_{\text{Polizei}}} \frac{c - v_{\text{Auto}}}{c} \cdot \frac{c}{c + v_{\text{Auto}}} \quad (51)$$

$$= f_{Q_{\text{Polizei}}} \frac{c - v_{\text{Auto}}}{c + v_{\text{Auto}}} \quad (52)$$

Lösung der Aufgabe

Gesucht

$$\Delta f = f_{Q_{\text{Polizei}}} - f_{B_{\text{Polizei}}}$$

Mit Gleichung (52) folgt:

$$\Delta f = f_{Q_{\text{Polizei}}} - f_{Q_{\text{Polizei}}} \frac{c - v_{\text{Auto}}}{c + v_{\text{Auto}}} = f_{Q_{\text{Polizei}}} \left(1 - \frac{c - v_{\text{Auto}}}{c + v_{\text{Auto}}} \right) \quad (53)$$

$$= 1.5 \cdot 10^9 \text{ Hz} \left(1 - \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s} - 50 \text{ m/s}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s} + 50 \text{ m/s}} \right) \quad (54)$$

$$= 500 \text{ Hz} \quad (55)$$

3. Nein, durchrechnen ergibt genau die gleiche Gleichung. In der Gleichung für den Dopplereffekt (37) wird ein Faktor berechnet, welcher mit der Sendefrequenz multipliziert wird. Bei einer erneuten Anwendung der Gleichung kommt ein weiterer Faktor dazu. Bei einer Multiplikation spielt es keine Rolle mit welchem Faktor zuerst multipliziert wird.

4. Die empfangene Frequenz kann mit der gesendeten überlagert werden. Die Wellen interferieren und erzeugen eine Welle, deren Amplitude mit der Frequenz Δf schwingt, die man als Schwebungsfrequenz bezeichnet.

4.5 Verkehrssünder

Gegeben

$$\begin{aligned}v_Q &= 0 \text{ m/s Geschwindigkeit des Lichtsignals} \\ \lambda_Q &= 620 \text{ nm Wellenlänge des ausgesendeten roten Lichts} \\ \lambda_B &= 600 \text{ nm Wellenlänge des empfangenen gelben Licht} \\ c &= 3 \cdot 10^8 \text{ m/s Lichtgeschwindigkeit}\end{aligned}$$

Gesucht

v_B : Geschwindigkeit Ihres Ferrari

Gleichung (37) nach v_B auflösen:

$$\begin{aligned}f_B &= f_Q \frac{c \pm v_B}{c \mp v_Q} = f_Q \frac{c + v_B}{c} \\ \frac{f_B c}{f_Q} &= c + v_B \\ v_B &= \frac{f_B c}{f_Q} - c = c \left(\frac{f_B}{f_Q} - 1 \right) \\ &\stackrel{(\text{mit } f = \frac{c}{\lambda})}{=} c \left(\frac{\frac{c}{\lambda_B}}{\frac{c}{\lambda_Q}} - 1 \right) = c \left(\frac{\lambda_Q}{\lambda_B} - 1 \right) \\ &= 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \underbrace{\left(\frac{620 \text{ nm}}{600 \text{ nm}} - 1 \right)}_{=0.0333} = 10^7 \text{ m/s}\end{aligned}$$

$10^7 \text{ m/s} \ll 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ bzw. der Ausdruck in den Klammern (0.0333) gibt direkt den Anteil an der Lichtgeschwindigkeit an, dieser ist viel kleiner als 1.

4.6 Grenzen des Dopplereffekt

Bis zur Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c ist eine Frequenzänderung bestimmbar. Sie können sich dies wie folgt überlegen:

Ruhender Beobachter Die Quelle nähert sich mit einer Geschwindigkeit, welche höher ist als die Schallgeschwindigkeit. Die Quelle kann keine Schallwellen mehr nach vorne in Richtung des Beobachters aussenden,

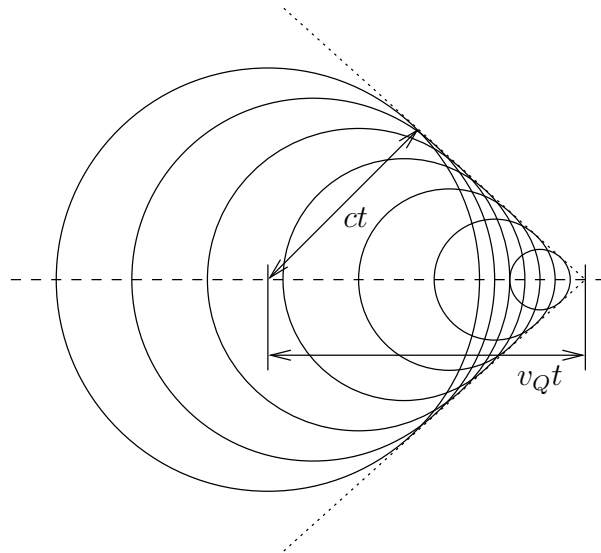


Abbildung 8: Eine Schallquelle bewegt sich mit einer Geschwindigkeit v_Q , die grösser ist als die Wellengeschwindigkeit c . Die Einhüllende der Wellenfronten bildet einen Kegel mit der Quelle in der Spitze.

da sich diese Schallwellen dann schneller als die Schallgeschwindigkeit c ausbreiten müssten. Der Beobachter hört die sich nähernde Quelle gar nicht und kann somit auch keine Frequenz der Quelle bestimmen.

Ruhende Quelle Der Beobachter entfernt sich mit einer Geschwindigkeit welche höher ist als die Schallgeschwindigkeit. Der Beobachter kann die Quelle ebenfalls gar nicht hören.

Mathematisch Einsetzen einer Geschwindigkeit die höher ist als c in die Gleichung (37), ergibt eine negative Frequenz. Eine negative Frequenz ist physikalisch unmöglich.

Die Schallwellen breiten sich bei einer Geschwindigkeit der Quelle die grösser als c ist wie in Abbildung 8 dargestellt aus.

A Unterrichtsablauf

A.1 1. Stunde (bewegte Quelle)

Beginn 07:45

Ende 08:25

Ziele

- Frequenz- bzw. Wellenlängeänderung bei einer bewegter Quelle
 - Qualitativ
 - Quantitativ
 - Formel verstehen (wird hergeleitet)

A.1.1 Einstieg 0.5' 07:45

Um was geht es heute? Dopplereffekt, dies wissen die Schüler bereits.

A.1.2 Folie: Christian Doppler 1' 07:46

Biographie liegt auf, kann in der Pause genommen werden.

Abbildung 9: Christian Andreas Doppler (* 29. November 1803 in Salzburg; † 17. März 1853 in Venedig), österreichischer Mathematiker und Physiker.

A.1.3 Fragen 2' 07:47

Was stellt Ihr euch unter dem Dopplereffekt vor? Vorbeifahrender Krankenwagen, Rennauto; Geschwindigkeitsmessung mit RADAR.
Auf Wandtafel notieren

A.1.4 Film Feuerwehr 1' 07:49

Was wurde gehört Beobachtung: Klang der Sirene ist höher wenn sie auf den Beobachter zu kommt, als wenn sie sich entfernt.
Auf Wandtafel notieren.

1. Experimentelle Überprüfung 1845 mit Musiker auf offenen Eisenbahnwagen und Musiker neben den Schienen. Eisenbahn war damals das schnellste was es gab.

A.1.5 Wasserwanne 5' 07:50

Vorführen Bewegte Quelle vorführen.

Wieso ist das so? Abbildung 1 bis 2 auflegen.

A.1.6 Video Ethan 0.5' 07:55

Motivation Ziel Geschwindigkeit von Ethan berechnen.

Geschwindigkeit schätzen Werte auf Tafel notieren.

A.1.7 Herleitungen der Gleichung 10' 07:56

Gemäss Abschnitt 1.1 an der Wandtafel

A.1.8 Was ist bekannt? 5' 08:06

Intervall, was erhalten Sie?

Tabellen 2 auflegen.

Evtl. Ausschnitt abspielen.

A.1.9 Geschwindigkeit berechnen 5' 08:11

Frequenzverhältnis bilden und nach v_Q auflösen.

A.1.10 Intervall bei der Feuerwehr bestimmen 2' 08:16

Vorspielen des Film.

Vorspielen des Ausschnitt.

A.1.11 Aufgaben lösen 08:18

Restliche Zeit

A.2 2. Stunde (ruhende Quelle)

Beginn 08:35

Ende 09:15

Ziele

- Frequenz- bzw. Wellenlängeänderung bei einer ruhender Quelle
 - Qualitativ
 - Verstehen des Unterschieds: ruhende Quelle $\Leftrightarrow$ ruhender Empfänger/Beobachter
 - Quantitativ
- Beide Fälle zu einer allgemein Formel zusammenführen.

A.2.1 Unterschied? 2' 8:35

Wie sieht es Qualitativ aus? Was hören Sie? Keine Änderung

Gibt es überhaupt eine Änderung? Worin besteht sie? Die Schallwellen breiten sich in der Luft aus. Die Luft bewegt sich nun gegenüber dem Beobachter. Die Wellenlänge ist immer die selbe (Abstand vom Maximum zum Maximum der Welle).

A.2.2 Wasserwellen zeigen 0.5' 08:37

Was sehen Sie, fällt Ihnen auf? Abbildung 5 auflegen.

A.2.3 Herleitung 5'

Abbildung 5 auflegen.

A.2.4 Zusammenfassen mit $\pm$ 2' 08:38

Für ruhende und bewegte Quelle.

A.2.5 Kombination 2' 08:40

Überprüfen erklären. Jeweils v_Q oder $v_B = 0$ setzen

Welche Vorzeichen wann? Überlegen ob f_B grösser oder kleiner wird.

A.2.6 Aufgaben lösen 08:42



Abbildung 9: Briefmarke: Christian Doppler (1803-1853), Österreich, 1992.
Quelle: http://th.physik.uni-frankfurt.de/~jr/gif/stamps/stamp_doppler.jpg



Abbildung 10: Christian Doppler (1803-1853). Quelle: http://www.physics.ubc.ca/~outreach/phys420/p420_03/marissa/Doppler.jpg