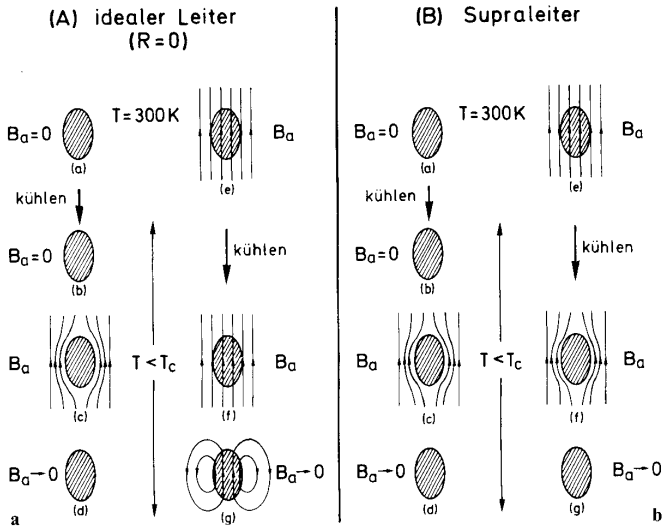
Übungen zur Festkörperphysik I

Lösungen zu Serie 11

---

1 Idealer Leiter und Supraleiter

a) Aus $\sigma = \infty$ folgt, dass $|\vec{E}| = 0$. Mit der 3. Maxwellgleichung $\bigtriangledown \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}}$ folgt sofort $\dot{\vec{B}} = 0$.



b) Mit der 2. London'sche Gleichung und durch Anwendung einer weiteren Rotation auf der 4. Maxwellgleichung findet man:

$$\bigtriangledown \times \bigtriangledown \times \vec{B} = -\frac{4\pi n_s e^2}{mc^2}\vec{B} \tag{1}$$

Die 2. Maxwellgleichung fordert $\mathrm{div}\vec{B} = 0$. Damit folgt die Differentialgleichung

$$\triangle \vec{B} = \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2}\vec{B} \tag{2}$$

Im 1-dimensionalen Fall ist die Lösung

$$B(x) = B(0)e^{-x/\lambda} \tag{3}$$

mit der London'schen Eindringtiefe

$$\lambda_L(T = 0\ \mathrm{K}) = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_s(0)e^2}\right)^{1/2} \tag{4}$$

λ ist eine Funktion der Temperatur, welche bei T_c divergiert.

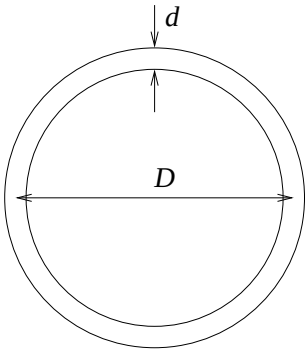
2 Kritischer Strom in einem supraleitenden Draht: Silsbee-Effekt

Der Draht wird normalleitend, sobald das B-Feld am äusseren Rand des Drahtes den kritischen Wert erreicht hat. Ampére'sches Gesetz:

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} \Rightarrow I_c = 2\pi r \frac{B_C}{\mu_0}$$

Da $T_C \gg 10$ mK, benutzen wir für $B_C(10\text{ mK}) \approx \mathrm{B_C}(0\text{ K}) = 0.08$ T. Daraus ergibt sich für den kritischen Strom: $I_C = 40$ A.

3 Obere Grenze für den Widerstand in einem Supraleitenden Draht



Die Induktivität eines Rings (siehe Skizze) ist:

$$L = \mu_0 \frac{D}{2}\left(\ln\frac{D}{d} + \frac{1}{4}\right) = 137\text{ nH}$$

Nehmen wir an, dass der Supraleiter einen, wenn auch sehr kleinen, Widerstand R besitzt. Damit haben wir im Prinzip einen RL-Kreis. Man erhält:

$$I(t) = I(0)\exp(-t/\tau)$$

Nach einer Zeit von $T = 12$ Jahre (oder $3.78 \cdot 10^8$ s) hat sich der Strom weniger als $\Delta I/I < 10^{-6}$ verändert:

$$\frac{I(0) * (1 - \Delta I/I)}{I(0)} = \exp(-T/\tau)$$

Für die Abklingzeit τ ergibt sich:

$$\tau = -\frac{T}{\ln(1 - \Delta I/I)} = 3.78 \cdot 10^{14}\text{ s}$$

Mit $L = \tau R$ erhält man schliesslich den maximalen Widerstand:

$$R_{\max} = 3.62 \cdot 10^{-22}\ \Omega$$

oder für den spezifischen Widerstand:

$$\rho_{\max} = \frac{A}{l} R = 2.07 \cdot 10^{-24}\ \Omega\text{cm}$$

Vergleich mit Kupfer:

$$\rho_{\text{Cu, 4K}} = 1 \cdot 10^{-10}\ \Omega\text{cm}$$
$$\rho_{\text{Cu, 293K}} = 1.7 \cdot 10^{-6}\ \Omega\text{cm}$$

4 Supraleitende Spule

l =0.3 m, N =10.000, d =0.1 m, $A = 7.85 \cdot 10^{-3}$ m^2, I =100 A, $\rho_{\text{normal}} = 1$ mΩ/m

a) Lange, dünne Spulen:

$$L \approx \mu_0 \frac{AN^2}{l} = 3.29\ \text{H}$$

Die magnetische Flussdichte B erhält man mit

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{LI}{AN} = \mu_0 \frac{NI}{l} = 4.19\ \text{T}$$

b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I = \frac{U}{L} \Rightarrow I(t) = I_0 + \frac{U}{L} t$$
$$t_{100\text{A}} = 329\ \text{s}$$

c) Energie in einer Induktivität L mit Strom I:

$$E = \frac{1}{2} L I^2 = 16.5\ \text{kJ}$$

Dies entspricht der potentiellen Energie einer Masse von ungefähr 1.7 Tonnen in 1 m Höhe.

d) Wir betrachten einen RL-Kreis:

$$0 = L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI(t) \Rightarrow I(t) = I_0 \exp(-t \frac{R}{L})$$

wobei $R = \rho \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 0.1$ m $= 3.14\ \Omega$. Der Strom fällt exponentiell ab mit einer charakteristischen Zeit $L/R = 1.05$ s.