12. Übungsblatt Magnetismus (II)

Verteilung 11. Dezember 2007
Besprechung 19./20. Dezember 2007

Aufgabe 1: *Diamagnetismus einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung*

Ein Atom mit einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung liegt in einem externen Magnetfeld der Stärke B. Zeigen Sie, dass der induzierte diamagnetische Kreisstrom am Ort des Kerns ein Feld

$$\Delta B = \epsilon_0 \mu_0 \frac{eB}{3m} \phi_E(0)$$

erzeugt, wobei $\phi_E(0)$ das elektrostatische Potential am Kern ist (bezüglich Vakuum).
Hinweis: Betrachten Sie Elektronen auf ringförmigen Bahnen, die insgesamt kugelsymmetrisch verteilt sind. Berechnen Sie das durch die Kreisbewegung der Ladung in einem infinitesmal kleinen Raumvolumen erzeugte Magnetfeld mit Hilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes.

Aufgabe 2: *Para- und Diamagnetismus von Isolatoren und Metallen*

In dieser Aufgabe werden die paramagnetischen und diamagnetischen Eigenschaften von Isolatoren untersucht. Insbesondere sollen die Suszeptibilitäten der Ionenrümpfe χ_d^{core} und χ_p^{core} mit denjenigen von Leitungselektronen in Metallen verglichen werden (*siehe Vorlesung*).

(a) Betrachten Sie zunächst den Beitrag von Bahndrehimpuls und Spin aller Elektronen eines Atoms in einem externen Magnetfeld $\vec{B}$ zum Hamiltonoperator des Atoms

$$H = \frac{1}{2m} \sum_i \left(\vec{p_i} + e\vec{A}(\vec{r_i}) \right)^2 - B\frac{e\hbar}{2m} \sum_i 2S_{z_i} \quad \Rightarrow \quad H_{\text{atom}} = \frac{-e}{m} \sum_i [\vec{A}(\vec{r_i})\vec{p_i} - \frac{e}{2}\vec{A}^2(\vec{r_i})] - B\frac{e\hbar}{2m} \sum_i 2S_{z_i}.$$

Um das externe Magnetfeld $\vec{B} = (0,0,B)$ zu beschreiben, wählt man das Vektorpotential $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y,x,0)$. Schätzen Sie den paramagnetischen Beitrag (Term, der mit B kleiner wird) und diamagnetischen Beitrag (Term, der mit B anwächst) zur magnetischen Energie eines Atoms in einem externen Feld von 1 Tesla ab.
Warum liefern abgeschlossene Schalen keinen Beitrag zur paramagnetischen Energie eines Atoms.

(b) Für die **diamagnetische Suszeptibilität eines Isolators** (sog. *Larmor-Diamagnetismus*) mit N Atomen im Volumen V findet man

$$\chi_d^{\text{core}} = \frac{\partial M_d}{\partial H}|_T = \frac{-N\mu_0 e^2}{V6m} \sum_{\nu=1}^{Z} \overline{r_\nu^2} < 0,$$

wobei Z die Anzahl Elektronen im Atom ist und $\overline{r_\nu^2}$ die mittlere quadratische Ausdehnung der elektronischen Wellenfunktionen bedeutet. Für eine grobe Abschätzung kann man $\overline{r_\nu^2} \approx a_B^2$ setzen und findet $\sum_{\nu=1}^{Z} \overline{r_\nu^2} = Za_B^2$.

Die **paramagnetische Suszeptibilität eines Isolators** im Limes $\frac{g\mu_B JH}{k_B T} \ll 1$ (d.h. für hohe Temperaturen) lautet

$$\chi_p^{\text{core}} = \frac{N}{V} \frac{\mu_0 \mu_B^2 g^2 J(J+1)}{3k_B T} = \frac{C_{\text{Curie}}}{T}.$$

Dabei ist $g_J = g(J,L,S)$ der Lande-Faktor bei Gesamtspin S, Gesamtbahndrehimpuls L und Gesamtdrehimpuls $J = L + S$. Dieses $1/T$ Verhalten der paramagnetischen Suszeptibilität bei hohen Temperaturen nennt man Curie-Gesetz.

Weiter kann man auch die **dia- und paramagnetische Suszeptibilitäten der Leitungselektronen** χ_d^{band} und χ_p^{band} herleiten (*Landau-Diamagnetismus und Pauli-Paramagnetismus, siehe Vorlesung*): $\chi_p^{\text{band}} = \mu_o \mu_B^2 D(E_F)$ mit $D(E_F) = \frac{mk_F}{\hbar^2 \pi^2}$ und $\chi_d^{\text{band}} = -\frac{1}{3}\chi_p^{\text{band}}$.

Schätzen Sie die Grössenordnungen dieser vier Beiträge zur Suszeptibilität eines Festkörpers ab.

(c) Welche der unten aufgeführten Elemente sind diamagnetisch, welche paramagnetisch und welche ferromagnetisch? Warum?
Gold, Kupfer, Silber, Eisen, Natrium, Neon, Erbium, Lithium, Nickel, Cobalt, Aluminium, Gadolinium, Dysprosium.