Kern- und Teilchenphysik I — SS 2007 — Prof. F. Pauss — Serie 6

Abgabe: 11. Mai 2007

1. Brechung der Symmetrie von SU(3) (flavour) und SU(2)(isospin)

Hadronen lassen sich in SU(3) flavour multiplets einordnen. Nehmen Sie an, dass die Bindungsenergien der Quarks innerhalb der Hadronen unabhängig vom Quarkflavour sind, und die Massendifferenzen innerhalb der SU(3) Multiplets nur von der Quarkmassendifferenz und der elektromagnetischen Wechselwirkung herrühren.

a) Nehmen Sie zuerst an, dass die SU(2) Isospinsymmetrie innerhalb des Isospinmultiplets exakt ist (Es gilt: $m_u = m_d \neq m_s$). Entwickeln Sie für diesen Fall vereinfachte Massenformeln für Barionen aus $3/2^+$ und $1/2^+$ Multiplets, als Funktionen des unbekannten allgemeinen Flavour-unabhängigen Massenterms (m_0) und der Quarkmassen (m_u, m_s).

b) Welche Beziehungen zwischen den Baryonenmassen mit verschiedenem Isospin (die zum selben SU(3) Multiplet gehören) kann man aus den vorhergehenden Formeln ableiten. Sind diese im Einklang mit den Experimenten?

c) Nehmen Sie jetzt an, dass die SU(2) Isospinsymmetrie gebrochen ist. Und zwar durch die Elektromagnetische Interaktion und die up-down Quarkmassendifferenz ($m_u \neq m_d$). Zeigen Sie, dass sich die Massenverschiebung der Baryonen auf diese Effekte zurück führen lassen. Zeigen Sie dies für die beiden folgenden Fälle:

- $I = \frac{1}{2}$ isospin doublet (p, n) of $\frac{1}{2}^+$ hadron flavour octet,
- $I = \frac{3}{2}$ isospin quartet $(\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-)$ of $\frac{3}{2}^+$ of hadron flavour decuplet.

Beachten Sie nur $\Delta I = 1$ Brechungsterme im Hamiltonian und nehmen Sie an, dass diese sich wie die dritte Isopinkomponente transformieren.

Tipp: Benutzen Sie das Wigner-Eckart Theorem für die Matrixelemente des Tensoroperators $O_J^{J_3}$ der sich wie (J, J_3) transformiert:

$$< I, I_3 | O_J^{J_3} | I', I_3' > = < I I_3, I' I_3'; J J_3 > < I \| O_J^{J_3} \| I' > \tag{1}$$

Wo $< I I_3, I' I_3'; J J_3 >$ der entsprechend Clebsch-Gordon koeffizient ist. In unserem Fall transformieren sich die Isospinbrechungsterme wie $J = 1, J_3 = 0$.

2. Nicht-abelsche SU(3)

Die Gell-Mann Matrizen (Generatoren) sind gegeben durch:

$$\left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2}\right] = i \sum_k f_{ijk} \frac{\lambda_k}{2}. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass die Struktur-Konstanten f_{abc} total antisymmetrisch sind.

b) Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit Abzisse (λ_3) und Ordinate (λ_8) und tragen Sie die Punkte

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

ein, wobei

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

c) Bestimmen Sie λ_1 und λ_2 sowie die Transformation $G \rightleftarrows R$. (Tipp: λ_1, λ_2 und λ_3 sind ähnlich zu den Pauli-Matrizen.)

3. Parton-Verteilungen

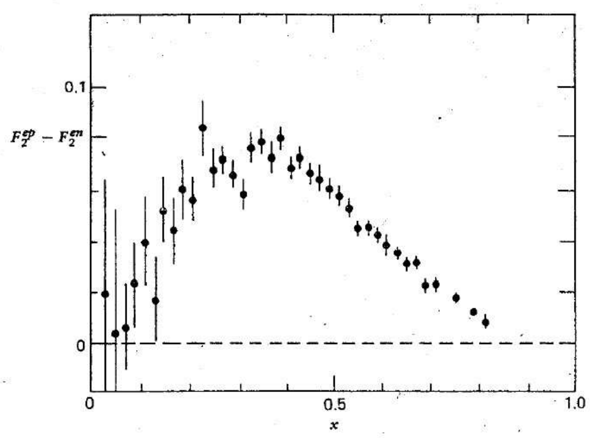

Fig.1.a: The difference $F_2^{ep} - F_2^{en}$ as a function of x, as measured in deep inelastic scattering.

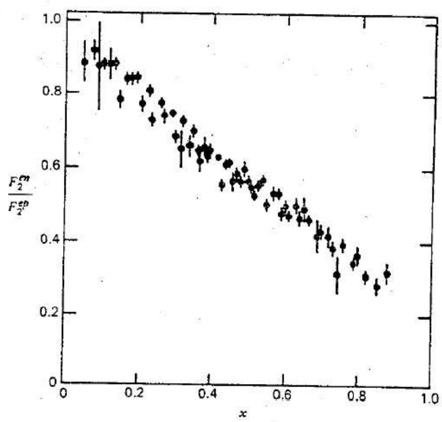

Fig.1.b: The ratio F_2^{en}/F_2^{ep} as a function of x, measured in deep inelastic scattering.

Die Impulsverteilung von Quarks und Gluonen im Proton kann in tiefinelastischer Streuung gemessen werden. Die Proton-Strukturfunktion F_2 ist gegeben durch:

$$F_2^{ep} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 x[u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 x[d^p(x) + \bar{d}^p(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 x[s^p(x) + \bar{s}^p(x)] \tag{5}$$

wobei $u^p(x)$ die u-Quark-Dichte ist und x der Anteil des Protonimpulses, der vom jeweiligen Quark getragen wird. $d^p(x)$ und $s^p(x)$ sind entsprechend die Dichten der d- und s-Quarks. Die Beiträge der schwereren Quarks können hier vernachlässigt werden.

a) In Gleichung (5) werden die Quarks nach ihrem Flavour klassifiziert. Bezeichnen Sie die Valenzquarkverteilung mit $q_v^p(x)$ und nehmen Sie weiter an, dass die Seequarkverteilung $q_s^p(x)$ für alle Flavours von Quarks und Antiquarks dieselbe ist ($q = u, \bar{u}, d, \bar{d}, s, \bar{s}$). Drücken sie nun die Quarkflavourdichten in Gleichung (5) durch $q_v^p(x)$ und $q_s^p(x)$ aus.

b) Wie hängen $u^p(x)$ und $d^p(x)$ mit $u^n(x)$ und $d^n(x)$ zusammen?

c) Drücken Sie nun (mit Hilfe des Resultats von b)) auch F_2^{en} (die entsprechende Strukturfunktion für Elektron-Neutron-Streuung) als Funktion von $q_v^p(x)$ und $q_s^p(x)$ aus.

d) Figur 1 a) zeigt Resultate einer Messung der Differenz $F_2^{ep}(x) - F_2^{en}(x)$. Was lernen Sie daraus über die Valenz- und Seequarkverteilungen in den Nukleonen?

e) Figur 1 b) zeigt das Verhältnis $F_2^{en}(x)/F_2^{ep}(x)$. Was lernen Sie daraus über die Valenz- und Seequarkverteilungen in den Grenzfällen $x \to 0$ und $x \to 1$?

f) Gewisse Integrale über die Quarkverteilungen (sogenannte Summenregeln) haben einfache Interpretationen. Zum Beispiel ist der Anteil des Nukleonimpulses, der von u-Quarks getragen wird $\int_0^1 xu(x)dx$. Berechnen Sie die folgenden Integrale und geben Sie eine kurze Interpretation der Resultate:

$$\int_0^1 [u(x) - \bar{u}(x)]dx \qquad \int_0^1 [d(x) - \bar{d}(x)]dx \qquad \int_0^1 [s(x) - \bar{s}(x)]dx \tag{6}$$