

1. Grenze für die ν_e -Masse aus Supernova-Explosion

Wir betrachten ein $\bar{\nu}_e$ mit der Energie E , Masse m und Geschwindigkeit v . Wegen $E = \gamma m$ ist $v = 1/\sqrt{1 - m^2/E^2}$. Es braucht die Zeit $t = \frac{d}{v} = \frac{d}{\sqrt{1 - m^2/E^2}}$, um vom Ort der Supernova zur Erde zu gelangen.

Der Laufzeitunterschied zweier Neutrinos mit den Energien E_1 und E_2 ist gegeben durch (für $E_2 > E_1 \gg m$)

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_1 - t_2 \\ &= d \left(\frac{1}{\sqrt{1 - m^2/E_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - m^2/E_2^2}} \right) \\ &\approx d \left[\left(1 + \frac{m^2}{2E_1^2} \right) - \left(1 + \frac{m^2}{2E_2^2} \right) \right] \\ &= \frac{dm^2}{2} \left(\frac{1}{E_1^2} - \frac{1}{E_2^2} \right).\end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass die Ursache des gemessenen Zeitunterschieds ausschliesslich in der Energiedifferenz der Neutrinos liegt, erhalten wir

$$\begin{aligned}\Delta t &\approx \frac{dm^2}{2} \left(\frac{1}{E_1^2} - \frac{1}{E_2^2} \right) \leq \Delta T_{max} \\ m^2 &\leq \frac{2\Delta T_{max}}{d} \frac{E_1^2 E_2^2}{E_2^2 - E_1^2} \\ m &\leq \sqrt{\frac{2\Delta T_{max}}{d} \frac{E_1^2 E_2^2}{E_2^2 - E_1^2}} \approx 15 \text{ eV}.\end{aligned}$$

2. Wie lange strahlt die Sonne noch?

Die gesuchte Rate R des Protonenverbrauchs entspricht dem Quotienten aus der gegebenen Leistung P und der pro verbrauchtem Proton freigesetzten Energie: $R = P/E$. Die Energie ist

$$E = \frac{1}{4}(26.73 \text{ MeV}) \frac{1.60 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 10.69 \cdot 10^{-13} \text{ J}.$$

Damit ist die Rate des Protonenverbrauchs

$$R = \frac{P}{E} = \frac{4 \cdot 10^{26} \text{ W}}{10.69 \cdot 10^{-13} \text{ J}} = 3.74 \cdot 10^{38} \text{ s}^{-1}.$$

Die Anzahl der Protonen, deren Masse nach unserer Annahme der Hälfte der Sonnenmasse m_S entsprechen soll, ist:

$$n_p = \frac{1/2 m_S}{m_p} = \frac{1/2(2 \cdot 10^{30} \text{ kg})}{1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 5.96 \cdot 10^{56}.$$

Damit erhalten wir die Zeit, nach der die Protonen gemäss unseren Annahmen verbraucht wären:

$$t = \frac{n_p}{R} = \frac{5.96 \cdot 10^{56}}{3.74 \cdot 10^{38} \text{ s}^{-1}} \frac{1 \text{ a}}{3.16 \cdot 10^7 \text{ s}} = 5.04 \cdot 10^{10} \text{ a}.$$

3. Extraction of the number of neutrino species from the primordial Helium abundance

a) From the Boltzmann equation,

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{-(m_n - m_p)/kT}$$

with $m_n - m_p = 1.29 \text{ MeV}$ and $kT = 0.720 \text{ MeV}$, we get $\frac{n_n}{n_p} = 0.1667$ ($\sim 1/6$).

b) The β -decay of neutrons leads to an exponential decrease:

$$n_n(t) = n_n(0)e^{-t/\tau_n}$$

Using $t = 100 \text{ sec}$ and $\tau_n = 887 \text{ sec}$, this leads to a factor $f = 0.893$.

Since the neutrons are converted into protons, their ratio will be multiplied by a factor $f/(1 + (1 - f)) = f/(2 - f) = 0.807$.

Using the previously found $\frac{n_n}{n_p}$, we obtain a new value of 0.135 ($\sim 1/7$).

c) Using $\tau_n = 887 \text{ sec}$, $Y_p^{max} = 0.248$ and $\eta = 3$, we find the upper limit for N_ν to be 3.55. The combined LEP result for N_ν is 2.994 ± 0.012 , much more precise than the cosmological result.