Kern- und Teilchenphysik I — SS 2007 — Prof. F. Pauss — Serie 9

Lösungen

1. Kernspaltung

$n_{thermisch} +^{235}_{92} U \rightarrow^{131}_{50} Sn +^{102}_{42} Mo + 3n$
Mit der Weizsäcker Formel $M(A, Z) = NM_n + Z(M_p + m_e) - B(Z, A)$ erhält man die folgenden Bindungsenergien:
$B(92, 235) = 1775.83$ MeV, $B(50, 131) = 1076.12$ MeV, $B(42, 102) = 872.05$ MeV

Der Q–Wert ist also:
$Q = M(92, 235) - M(50, 131) - M(42, 102) - 2m_n =$
$= B(50, 131) + B(42, 102) - B(92, 235) = 172.3$ MeV

2. Radioaktive Zerfallsreihe

Die Anzahl Kerne gehorchen folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}N_A}{\mathrm{d}t} = -\lambda_1 N_A$$
$$\frac{\mathrm{d}N_B}{\mathrm{d}t} = +\lambda_1 N_A - \lambda_2 N_B,$$

wobei $\lambda_i = 1/\tau_i = ln2/t_{1/2,i}$ die Zerfallskonstanten der beiden Kerne sind. Integrieren der ersten Gleichung liefert

$$N_A(t) = N_A(0)e^{-\lambda_1 t}.$$

Zur Lösung der zweiten Differentialgleichung verwenden wir den Ansatz

$$N_B(t) = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t}.$$

Die Anfangsbedingung $N_B(0) = 0$ liefert $A = -B$. Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung und Umformen ergeben

$$A = \frac{\lambda_1 N_A(0)}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

womit wir das Resultat

$$N_B(t) = \frac{\lambda_1 N_A(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

erhalten. Nach hundert Tagen sind noch folgende Anzahl Kerne übrig:

$$N_A(100\mathrm{d}) \approx e^{-6.9} N_A(0) \approx 9.8 * 10^{-4} N_A(0)$$
$$N_B(100\mathrm{d}) \approx (e^{-6.9} - e^{-13.8}) N_A(0) \approx 9.8 * 10^{-4} N_A(0).$$

3. β-Zerfall I

a) Der Übergang ist möglich, weil die beim β-Zerfall frei werdende Energie $E = m_n - m_p - m_e$ grösser ist als die Differenz der Bindungsenergien.

b) $E_0 = E_{kin}(e^-) + E_{kin}(\bar{\nu}_e) = M(^3_1\mathrm{H}) - M(^3_2\mathrm{He}) - m_e = (m_n - m_p - m_e) - (E_B(^3_1\mathrm{H}) - E_B(^3_2\mathrm{He})) =$ 18.6 keV

4. β-Zerfall II

a) Die kinetische Energie des Elektrons ist maximal, wenn die Energie des Neutrinos gegen Null geht:

$$E^{max}_{kin}(\mathrm{e}^-) = \Delta M - m_e \approx (3 - 0.5)\ \mathrm{MeV} = 2.5\ \mathrm{MeV}.$$

b) Die kinetische Rückstossenergie des Kerns beträgt

$$E_{kin}(M_2) = \frac{p^2_{M_2}}{2M_2} = \frac{p^2_e}{2M_2}.$$

Wegen $E_{kin}(\mathrm{e}^-) > m_e$ muss für das Elektron die relativistische Energie-Impuls-Beziehung verwendet werden.

$$E_{kin}(e^-) = \sqrt{p_e^2 + m_e^2} - m_e$$
$$\Rightarrow p_e^2 = (E_{kin}(e^-) + m_e)^2 - m_e^2 = E^2_{kin}(e^-) + 2E_{kin}(e^-)m_e$$
$$\Rightarrow E_{kin}(M_2) = \frac{1}{2M_2}(E^2_{kin}(e^-) + 2E_{kin}(e^-)m_e).$$

Ersetzen von $E_{kin}(M_2)$ durch $E_{kin}(e^-)$ mittels $E_{kin}(e^-) + E_{kin}(M_2) = 2.5$ MeV und Auflösen nach $E_{kin}(e^-)$ führen zum Resultat

$$E_{kin}(e^-) \approx 2.499'966\ \mathrm{MeV}.$$

Die Korrektur durch die Berücksichtigung der Rückstossenergie ist also sehr klein.