Kern- und Teilchenphysik I — SS 2007 — Prof. F. Pauss — Serie 1

Lösungen

1. Natürliche Einheiten

Konstanten im MKS-System:

$$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \qquad e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$
$$\text{eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}, \qquad \hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

a) - Ruhemass-Energie Beziehung: $E = mc^2$:
$\text{E} = 1\text{kg c}^2 = 8.988{\cdot}10^{16} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} = 5.61{\cdot}10^{26} \text{ GeV} \rightarrow 1\text{kg} = \dfrac{\text{E}}{c^2} = 5.61{\cdot}10^{26} \text{ GeV}$

- $\hbar c = 197.327$ MeV fm $\rightarrow$ 1m $= 10^{15}\hbar c$ / 0.197327 GeV $= 5.07 \cdot 10^{15}$ GeV^{-1}

- c $= 2.998 \cdot 10^8$ m/s $\rightarrow$ 1s $= 2.998 \cdot 10^8$ m/c $= 1.52 \cdot 10^{24}$ GeV^{-1}

b) 1barn $= 10^{-24}$ cm^2 $= 10^{-28}$ m ^{2} $= 2568.2$ GeV^{-2} $\rightarrow$ 1 GeV^{-2} $= 0.389$ mb

c) - Compton-Wellenlänge: $\lambda\!\!\!^{-}_c = \dfrac{\hbar}{mc} = m^{-1}$.

- Bohr'sches Atommodell:
Bahnradius $r_n = \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{me^2} L_n^2 \equiv a_0 n^2$ mit dem Bahndrehimpuls $L_n = n\hbar$.
Feinstrukturkonstante: $\alpha = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \;\rightarrow\; \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = \alpha\hbar c \;\rightarrow a_0 = \dfrac{\hbar^2}{m\alpha\hbar c} = \dfrac{1}{m\alpha}$.

- Im Grundzustand $L_1 = r_1 m v_1 = a_0 m v_1 \stackrel{!}{=} \hbar \rightarrow v_1 = \dfrac{\hbar}{m a_0} = \dfrac{\hbar\alpha m}{m} = \alpha$.

2. Ein klassisches Wechselwirkungsmodell: Ballspielen auf dem See

a) Der Abwurfwinkel sei $\alpha \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_o = v_o\,(\cos\alpha, \sin\alpha)$
$x_{Ball}(t) = v_o\,\cos(\alpha)\,t$
$y_{Ball}(t) = v_o\,\sin(\alpha)\,t \,-\, \frac{g}{2}\,t^2$
Zum Zeitpunkt des Fangens (t_f) gilt: $x_{Ball}(t_f) = d$ und $y_{Ball}(t_f) = 0$
$\Longrightarrow v_o\,\cos(\alpha)\,t_f = d \qquad \Longrightarrow t_f = \frac{d}{v_o\,\cos(\alpha)}$
$\Longrightarrow t_f \cdot (v_o\,\sin(\alpha) \,-\, \frac{g}{2}\,t_f) = 0 \qquad \Longrightarrow \quad v_o\,\sin(\alpha) = \frac{g\,d}{2\,v_o\,\cos(\alpha)}$
$\Longrightarrow \quad v_o^2\,\sin(\alpha)\cos(\alpha) = v_o^2\,\frac{1}{2}\sin(2\,\alpha) = \frac{g\,d}{2}$
v_o ist minimal, wenn $\sin(2\,\alpha) = max$, also: $2\,\alpha = \pi/2$
$\Longrightarrow \quad \alpha = 45^o \qquad v_o = \sqrt{g\,d} = 15.7\,m/s$

b) Impulserhaltung: $p_{vorher} = p_{nachher}$
Abwurf: $0 = m_1\,V_{Boot,1} + m_{Ball}\,v_o\,\cos(\alpha) \qquad \Longrightarrow \qquad V_{Boot,1} = -\,v_o\,\cos(\alpha)\,\frac{m_{Ball}}{m_1}$
Fangen: $m_{Ball}\,v_o\,\cos(\alpha) = (m_2 + m_{Ball})\,V_{Boot,2} \qquad \Longrightarrow V_{Boot,2} = v_o\,\cos(\alpha)\,\frac{m_{Ball}}{m_2+m_{Ball}}$
$\Longrightarrow \quad v_{rel} = V_{Boot,2} \,-\, V_{Boot,1} = \sqrt{g\,d}\,\cos(\alpha)\left(\frac{m_{Ball}}{m_2+m_{Ball}} \,+\, \frac{m_{Ball}}{m_1}\right) = 0.248\,m/s$

c) Da die Impulserhaltung gelten muss, und sich das 1. Boot und der Antiball in diesselbe Richtung bewegen, muss der Impuls des Antiballs entgegengesetzt der Geschwindigkeit sein. Damit muss der Antiball eine negative Masse und auch eine negative Energie haben.

3. Vergleich Elektron, Proton und α-Teilchen

a) Für die kinetische Energie gilt:

$$\begin{aligned}
E_{kin} &= mc^2 - m_0c^2 = 2 \text{ GeV} \quad \Rightarrow \quad mc^2 = E = 2 \text{ GeV} + m_0c^2 \\
E(e^-) &= 2 \text{ GeV} + 0.5 \text{ MeV} = 2.0005 \text{ GeV} \\
E(p) &= 2 \text{ GeV} + 938 \text{ MeV} = 2.938 \text{ GeV} \\
E(\alpha) &= 2 \text{ GeV} + 3.73 \text{ GeV} = 5.73 \text{ GeV}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E = mc^2 &= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{mc^2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{mc^2}\right)^2} \\
v(e^-) &= c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{5 \cdot 10^{-4}}{2.0005}\right)^2} \approx c(1 - 3.12 \cdot 10^{-8}) \approx 0.999999969c \\
v(p) &= c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0.938}{2.938}\right)^2} \approx 0.948c \\
v(\alpha) &= c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{3.73}{5.73}\right)^2} \approx 0.759c
\end{aligned}$$