

KAPITEL 4 :

Elast. Streuung an Kernen

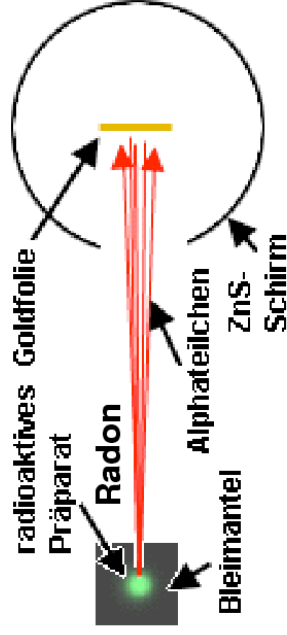
- 4.1 Streuexperiment von Rutherford**
- 4.2 Kinematik der Elektronstreuung**
- 4.3 Rutherford Wirkungsquerschnitt**
- 4.4 Mott Wirkungsquerschnitt**
- 4.5 Formfaktoren der Kerne**

4.1 Streuexperiment von Rutherford

(Geiger, Marsden) > 1900

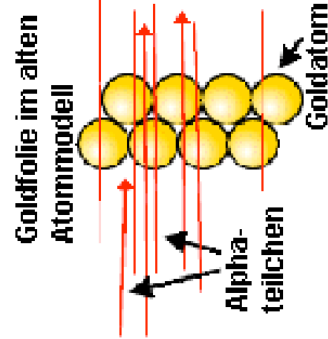
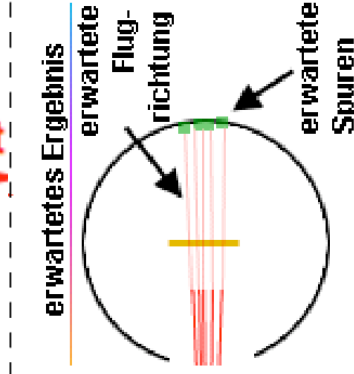
Messe Streuwinkel und E der α Teilchen

$\alpha \dots {}^4\text{He Kern} \quad (m = 3.7 \text{ GeV}/c^2)$
kinetische Energie $\sim 5.5 \text{ MeV}$

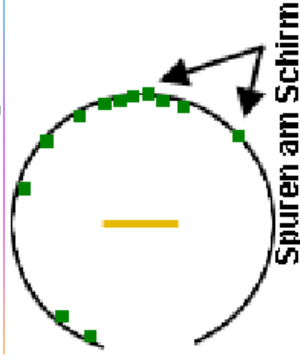


erhalten

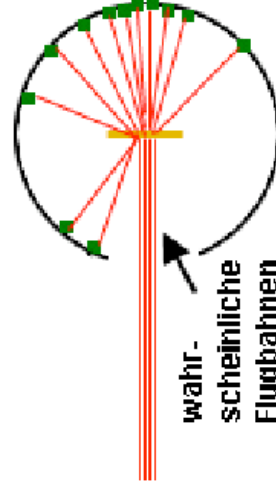
erwartet



erhaltenes Ergebnis

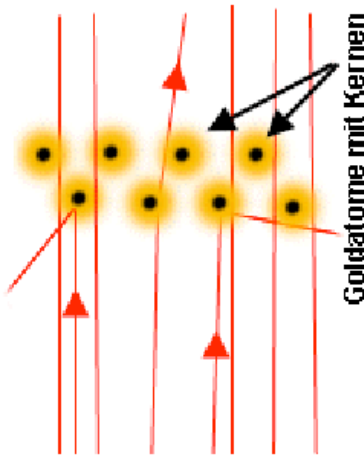


Rückschlüsse auf die Flugbahnen



1911

Streuung im neuen Atommodell

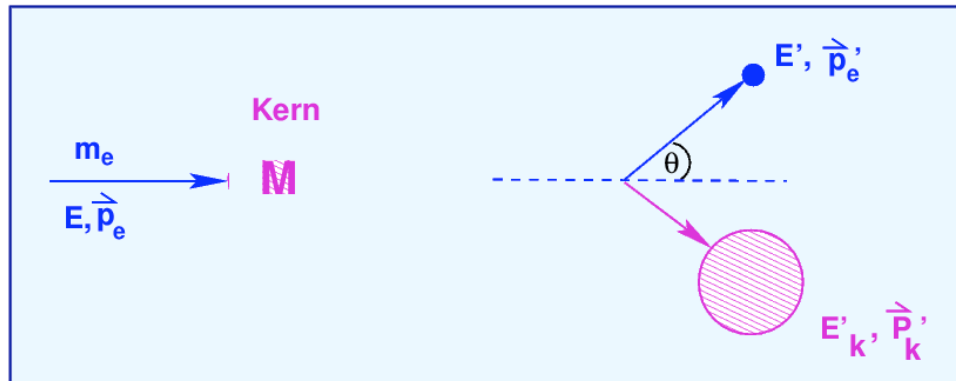


Streuformel hergeleitet

R_{max} des Kerns
abgeschätzt: $\sim 1 \text{ fm}$

4.2 Kinematik der Elektronenstreuung

Elastische Streuung: e^- – Kern Streuung



$p_e (P_K)$ Viererimpuls des e^- (Kern)

$$p = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

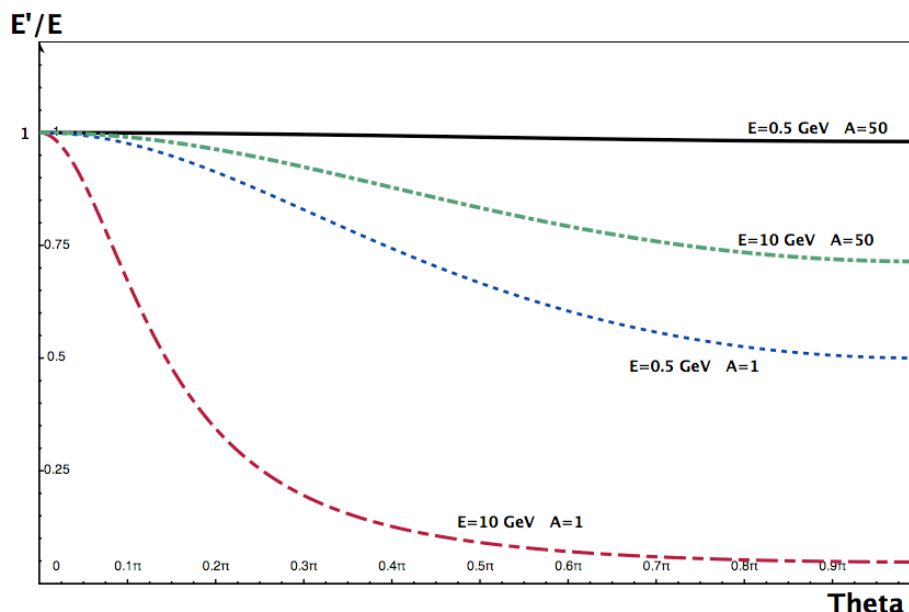
$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \text{ Lorentzinvariant}$$

$$\text{Invariante Masse: } m = \sqrt{\frac{p^2}{c^2}}$$

Energie E' des gestreuten e^- im Laborsystem:

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2}(1 - \cos \theta)}$$

θ ... Streuwinkel
 $E - E'$... Target - Rückstoss



Beispiel:
Elektron-
Kern
Streuung

4.3 Rutherford Wirkungsquerschnitt

Ziel: Berechne σ für elastische Streuung eines e^- an Atomkern mit Ladungszahl Ze (Z ... Zahl der Protonen)
Wechselwirkung = elektromagnetische Wechselwirkung

Annahmen:

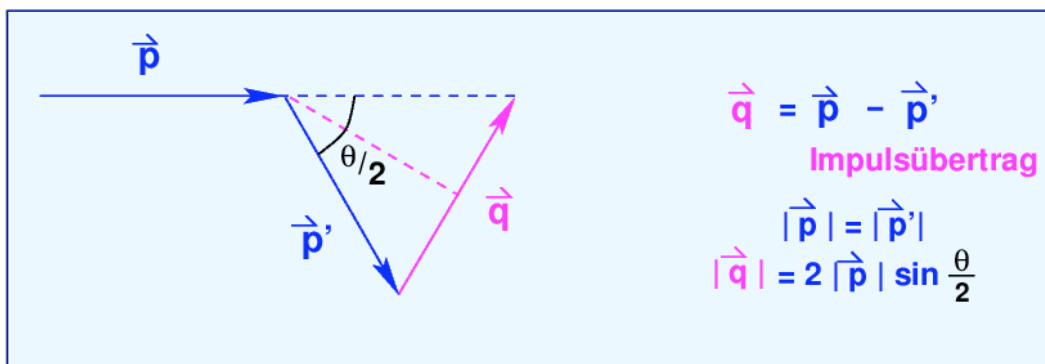
- $Z\alpha \ll 1$: σ kann mit Hilfe von Störungstheorie berechnet werden
Born'sche Näherung:
"Lange" vor und nach Streuung:
 e^- -Wellenfunktion unbeeinflusst von $V(x)$
→ e^- -Wellenfunktion ist ebene Welle
 α ... Kopplungskonstante der elektromagnetischen WW
- Punktförmige Teilchen
- Target schwer → kein Rückstoss
- Spin der Teilchen vernachlässigt

σ für Streuung des e^- im Raumwinkel $d\Omega$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E'^2}{(\hbar c)^4 (2\pi)^2} \quad | \langle \Psi_f | H_{\text{INT}} | \Psi_i \rangle |^2$$

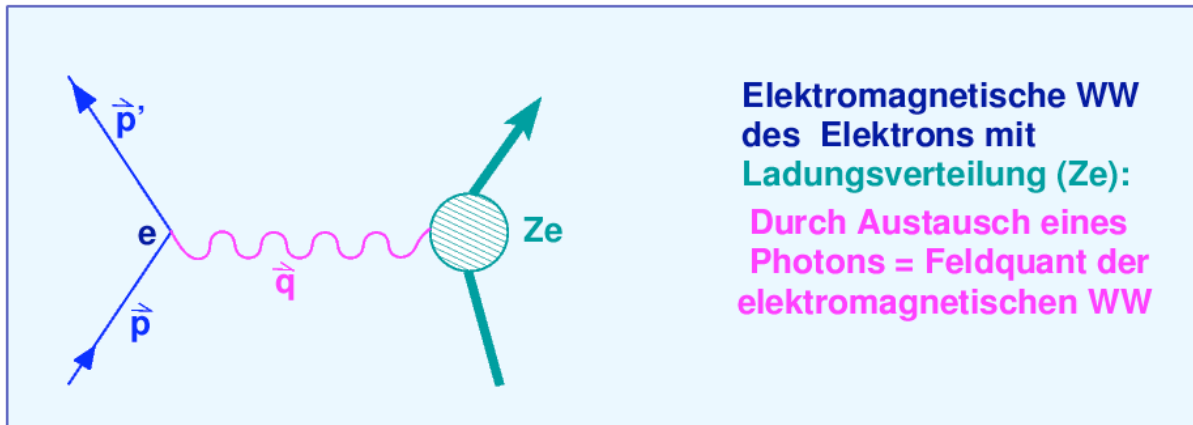
$$H_{\text{INT}} = e\phi(r) \quad \phi(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \Psi(\vec{x}) = e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar}$$

$$\langle \Psi_f | H_{\text{INT}} | \Psi_i \rangle = \frac{e}{V} \int \phi(\vec{x}) e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar} d^3x$$



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Feldtheoretische Betrachtung



$$M_{f,i} \propto Ze \cdot e \text{ und } \sigma \propto (Ze^2)^2$$

Photon ist ungeladen, koppelt an Ladung der beiden wechselwirkenden Teilchen;
 $\vec{q}$ ist Impuls des ausgetauschten Photons

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} = \frac{4Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 E'^2}{(\vec{q} \cdot c)^4}$$

→ $\sigma \propto \frac{1}{|\vec{q}|^4}$ charakteristischer Abfall von σ für elektromagnetische Wechselwirkung

De Broglie: $\lambda = \frac{\hbar}{|\vec{q}|} = \frac{\hbar}{2 \cdot |\vec{p}| \cdot \sin \frac{\Theta}{2}}$

Für $\lambda \gg$ Target-Teilchen: keine Auflösung der inneren Struktur

4.4 Mott Wirkungsquerschnitt

Beschreibt Elektron–Streuung unter Berücksichtigung
des **Elektronspins** = $\frac{1}{2}$

Benötige: Dirac Theorie (relativistisch) des Elektrons

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}^* = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} (1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})$$

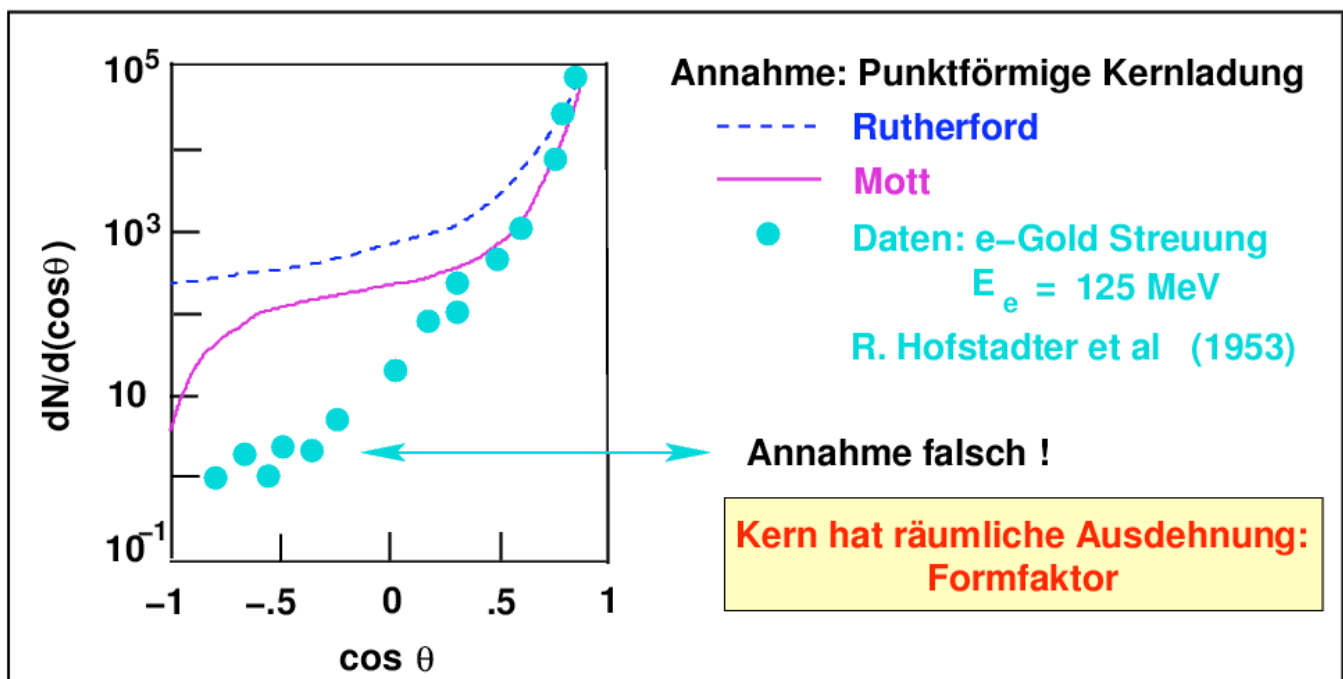
$$\beta = \frac{v}{c}$$

* kein Rückstoss des Kerns

Bemerkungen:

- Spin des Targets = 0
- Beschreibt Streuung an punktförmiger Kernladung
- $\left(\frac{d\sigma}{d\cos\theta}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{2\pi Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{E^2 (1 - \cos\Theta)^2}$ Born'sche Näherung

Vergleich Theorie mit Daten:



4.5 Formfaktoren der Kerne

Aus Elektron–Kern Streuung (Hofstadter et al):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Exp}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \quad \text{für } |\vec{q}| \rightarrow 0 \quad (\Theta \rightarrow 0^\circ)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Exp}} \ll \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \quad \text{für grosse } |\vec{q}| \quad (\Theta \rightarrow 180^\circ)$$

⇒ gestreutes Elektron sieht nur Teil der gesamten Kernladung
mit zunehmendem $|\vec{q}| \rightarrow \lambda$ nimmt ab
→ bessere Auflösung

Kerne sind räumlich ausgedehnt: beschrieben durch den
Formfaktor $F(\vec{q}^2)$

$$F(\vec{q}^2) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar} f(\vec{x}) d^3x \quad \text{Formfaktor}$$

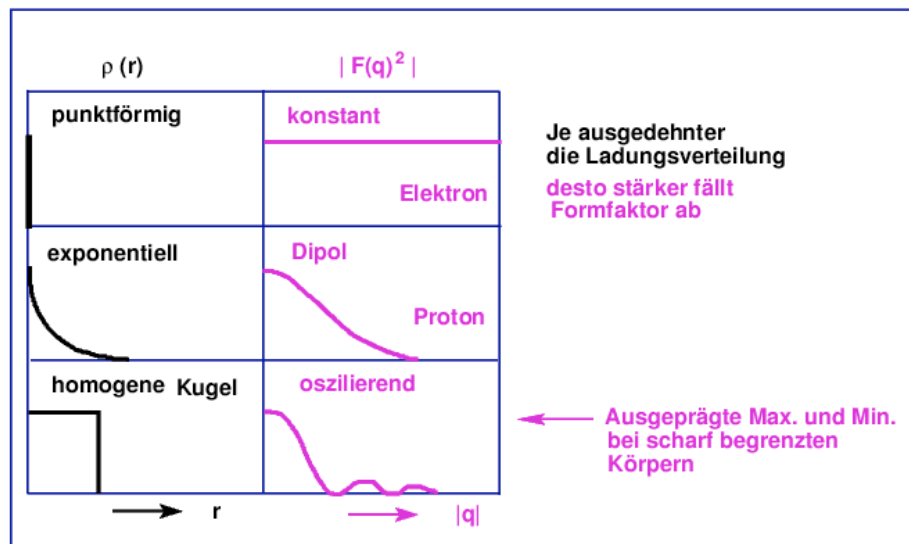
Ladungsverteilungsfunktion: $f(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{Z \cdot e}, \int f(\vec{x}) d^3x = 1$

$F(\vec{q}^2)$ enthält Information über räumliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$

$F(\vec{q}^2)$ Fouriertransformierte von $f(\vec{x})$

Experimentelle Bestimmung von $F(\vec{q}^2)$:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Exp}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot |F(\vec{q}^2)|^2$$



Ladungsverteilung der Kerne

- Kern $\neq$ Kugel mit scharf begrenzter Oberfläche

Fermiverteilung:

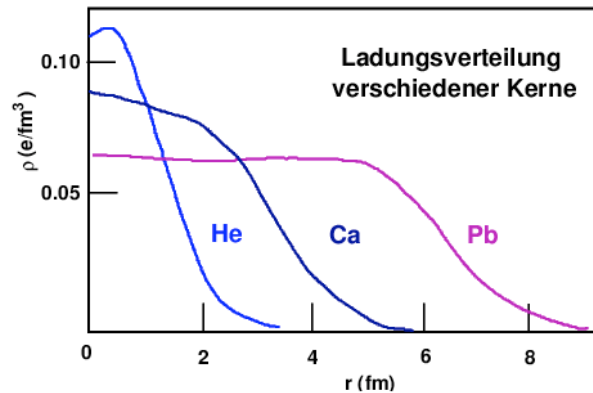
$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-c)/a}}$$

ρ_0 ... Normierungskonstante

c ... Radius der halben Dichte

a ... beschreibt Oberflächendichte

$c = 1.07 \text{ fm } A^{1/3}$, $a = 0.54 \text{ fm}$

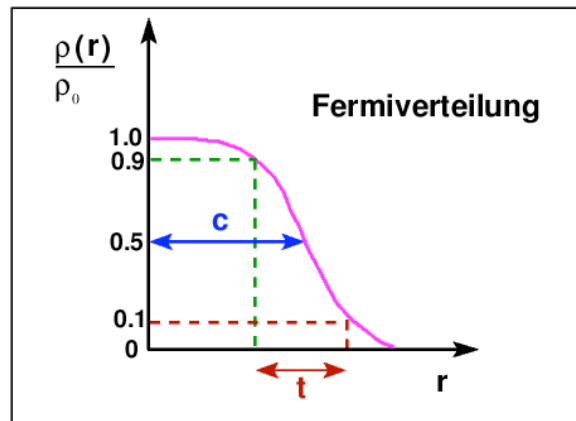


- Mittlere und schwere Kerne: $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = r_o A^{1/3}$

$r_o = 0.94 \text{ fm}$, A ... Massenzahl

- "Hautdicke" t : ist Dicke des Bereichs, in dem Ladungsdichte von 90% of 10% des Maximalwertes absinkt

Für alle schweren Kerne ungefähr gleich gross: $t \sim 2.4 \text{ fm}$



- Nukleonendichte ρ_N im Kern-Inneren: $\rho_N \sim 0.17 \text{ Nukleonen/fm}^3$
- Leichte Kerne (${}^4\text{He}$, ${}^6, {}^7\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$): kein Dichteplateau
→ gaussförmige Ladungsverteilung
- Einige Kerne sind ellipsoidisch deformiert (seltene Erden)