Thomas Kuster, Luftreinhaltung I, 1.1.7

Eine lufthygienische Weihnachtsgeschichte

① völlig dichter Raum

Gegeben:

$[c_{CO}]_{\frac{mg}{Kerze}} = 26 \frac{mg}{Kerze(n)}$

$n = 34$ Kerze(n)

$V = 30 m^2 \cdot 2,5 m = 75 m^3$

$M_i = (12 + 16) \frac{g}{mol}$

$T = 26°C$

$R = 8,314 \frac{J}{mol\,K}$

$p = 98'000\ Pa$

1) $$[c_{CO}]_{\frac{mg}{m^3}} = \frac{26 \frac{mg}{\cancel{Kerze(n)}} \cdot 34\ \cancel{Kerze(n)}}{75\ m^3} = 11,79 \frac{mg}{m^3} \quad @\ 26°C$$

2) $$c_{ppm} = \frac{c_{mg/m^3}\ RT}{p\ M_i}$$

$$= \frac{11,79 \frac{mg}{m^3} \cdot 8,314 \frac{J}{mol\,K} (273,15 + 26) K}{98'000 Pa \ (12 + 16) \frac{g}{mol} \cdot \frac{kg}{1000 g}}$$

$$= \underline{\underline{10,68\ ppm}}$$ Maximum nach 80 Minuten

Falls kontinuierlich Kerzen abgebrannt werden:

$$\underline{\underline{c_{ppm}(t) = \frac{c_{ppm} \cdot t}{80 \cdot 60 s}}}$$ Lineare Funktion

Das Maximum wird nie erreicht (linear steigende Konzentration):

$$\lim_{t \to \infty} \left(c_{ppm}(t) \right) = \infty$$

② Raum mit einem Luftwechsel von $N = 0{,}3\ \frac{1}{h}$

ⓐ Fliessgleichgewicht hat sich eingestellt

$M(t)$: Menge CO im Raum zum Zeitpunkt t in mg

Q: Quelle $\quad Q = \frac{34 \cdot 26\,mg}{80\,min\ 60\,\frac{s}{min}} = 0{,}184\,\frac{mg}{s}$

S: Senke $\quad S = N \cdot M(t) = 0{,}3\,\frac{1}{h} \cdot \frac{h}{60\,min}\ \frac{min}{60\,s} \cdot M(t) = 8{,}\overline{3} \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{s} \cdot M(t)$

DGL herleiten:

1.1) $M(t+\Delta t) = M(t) + Q\Delta t - S\Delta t$

$= M(t) + (Q - S)\,\Delta t$

$= M(t) + (Q - NM(t))\,\Delta t \qquad | -M(t)$

1.2) $M(t+\Delta t) - M(t) = (Q - NM(t))\,\Delta t \qquad | : \Delta t$

1.3) $\frac{M(t+\Delta t) - M(t)}{\Delta t} = Q - NM(t) \qquad | \lim\limits_{\Delta t \to 0}$

1.4) $\underline{\dot{M}(t) = Q - N\,M(t)}$

Aus 1.4) folgt sofort die Dgl für die Konzentration $(\cdot \frac{1}{V})$

2.1) $\frac{\dot{M}(t)}{V} = \frac{Q}{V} - N\,\frac{M(t)}{V}$

$\dot{C}(t) = \frac{Q}{V} - N\,C(t)$

Fliessgleichgewicht => keine Veränderung => $\dot{M}(t)$ bzw. $\dot{C}(t) = 0$

3.1) $\dot{M}(t) \overset{1.4)}{=} Q - N\,M(t) = 0 \qquad | + NM(t)$

3.2) $Q = N\,M(t) \qquad | : N$

3.3) $\frac{Q}{N} = M(t)$ dies wird erst zum Zeitpunkt $t = \infty$ erreicht

=> $M(t) = M(\infty) = M^{\infty}$

$\frac{Q}{N} = \frac{0{,}184\,\frac{mg}{s}}{8{,}\overline{3} \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{s}} = \underline{2210\,mg}$

2 a)

Umrechnen in mg/m³ und ppm

4) $[c_{CO}]_{\frac{mg}{m^3}} = \frac{2210\,mg}{75\,m^3} = 29{,}4\bar{6}\,\frac{mg}{m^3}$ @ 26°C

3.3)

4)

5) $[c_{CO}]_{ppm} \overset{①2)}{=} \frac{29{,}4\bar{6}\,\frac{mg}{m^3} \cdot 8{,}314\,\frac{J}{mol\,K} \cdot (273{,}15 + 26)\,K}{98'000\,Pa\;(12+16)\,\frac{g}{mol} \cdot \frac{kg}{1000\,kg}}$

$= \underline{\underline{26{,}71\,ppm}}$

Wäre der Raum völlig dicht würde dies nach 2,5 Kerzensätze erreicht werden (2,5 · 80 min = 3h 20 min => bzw. nach 3h 20 min).

② ⓑ$_\alpha$ exakt

DGL 1.4) aus Aufgabe ②ⓐ lösen:

1) $\dot{M}(t) = Q - NM(t)$

homogene DGL Lösen:

2) $\dot{M}(t) = -NM(t)$

Ansatz:

3.1) $M(t) = A \exp(Bt)$

3.2) $\dot{M}(t) = BA \exp(Bt)$

Einsetzen in 1):

4.1) $BA \exp(Bt) = -NA \exp(Bt)$

Koeffizientenvergleich:

4.2) $BA = -NA \Rightarrow B = -N$

Homogene Lösung (2) mit 4.2)):

5) $L_h = A \exp(-Nt)$

Variation der Konstante

6) $\dot{L}_h = -NL_h$ (homogene DGL)

Ansatz für partikuläre Lösung:

7) $L_p = L_h L$

Einsetzen von 7) in 1)

8.1) $\dot{L}_p = Q - NL_p$

8.2) $\dot{L}_h L + L_h \dot{L} = Q - NL_h L \qquad | -Q + NL_h L$

8.3) $\dot{L}_h L + L_h \dot{L} - Q + NL_h L = 0 \qquad | \ \dot{L}_h \overset{6)}{=} -NL_h$

8.4) $-\cancel{NL_h L} + L_h \dot{L} - Q + \cancel{NL_h L} = 0 \qquad | +Q ; \cdot \frac{1}{L_h}$

8.4) $\dot{L} = \frac{Q}{L_h} \overset{5)}{=} \frac{Q}{A\exp(-Nt)} \qquad | \int$

8.5) $L = \frac{Q}{AN} \exp(Nt)$

② ⓑ$_\beta$

Partikuläre Lösung berechnen (8.5) in 7) einsetzen)

$$9.1)\ L_p = L_h L = \cancel{A}\exp(-Nt) \cdot \frac{Q}{\cancel{A}N}\exp(Nt)$$

$$9.2)\ L_p = \underbrace{\frac{Q}{N}\exp(\underbrace{Nt - Nt}_{=0})}_{=1} = \frac{Q}{N}$$

Allgemeine Lösung der DGL (homogene 5) & partikuläre 9.2) Lösung):

$$10)\ A\exp(-Nt) + \frac{Q}{N} = M(t)$$

Anfangsbedingung einsetzen:

$$11.1)\ M(0) = 0 = A\underbrace{\exp(-N0)}_{=1} + \frac{Q}{N}$$

$$11.2)\quad 0 = A + \frac{Q}{N} \qquad \Big| - \frac{Q}{N}$$

$$11.3)\quad A = -\frac{Q}{N}$$

Allgemeine Lösung mit bestimmter Konstante A (10) mit 11.3)):

$$12)\ \underline{\underline{M(t) = \frac{Q}{N} - \frac{Q}{N}\exp(-Nt)}}$$

Kontrolle $M(\infty) = M^\infty = \frac{Q}{N}$ sein (② ⓐ):

$$13)\ \lim_{t\to\infty}\left[\frac{Q}{N} - \frac{Q}{N}\exp(-Nt)\right] = \frac{Q}{N} \quad \checkmark$$

Konzentration als Funktion der Zeit (12) durch V dividieren und 2) aus Aufgabe ① verwenden):

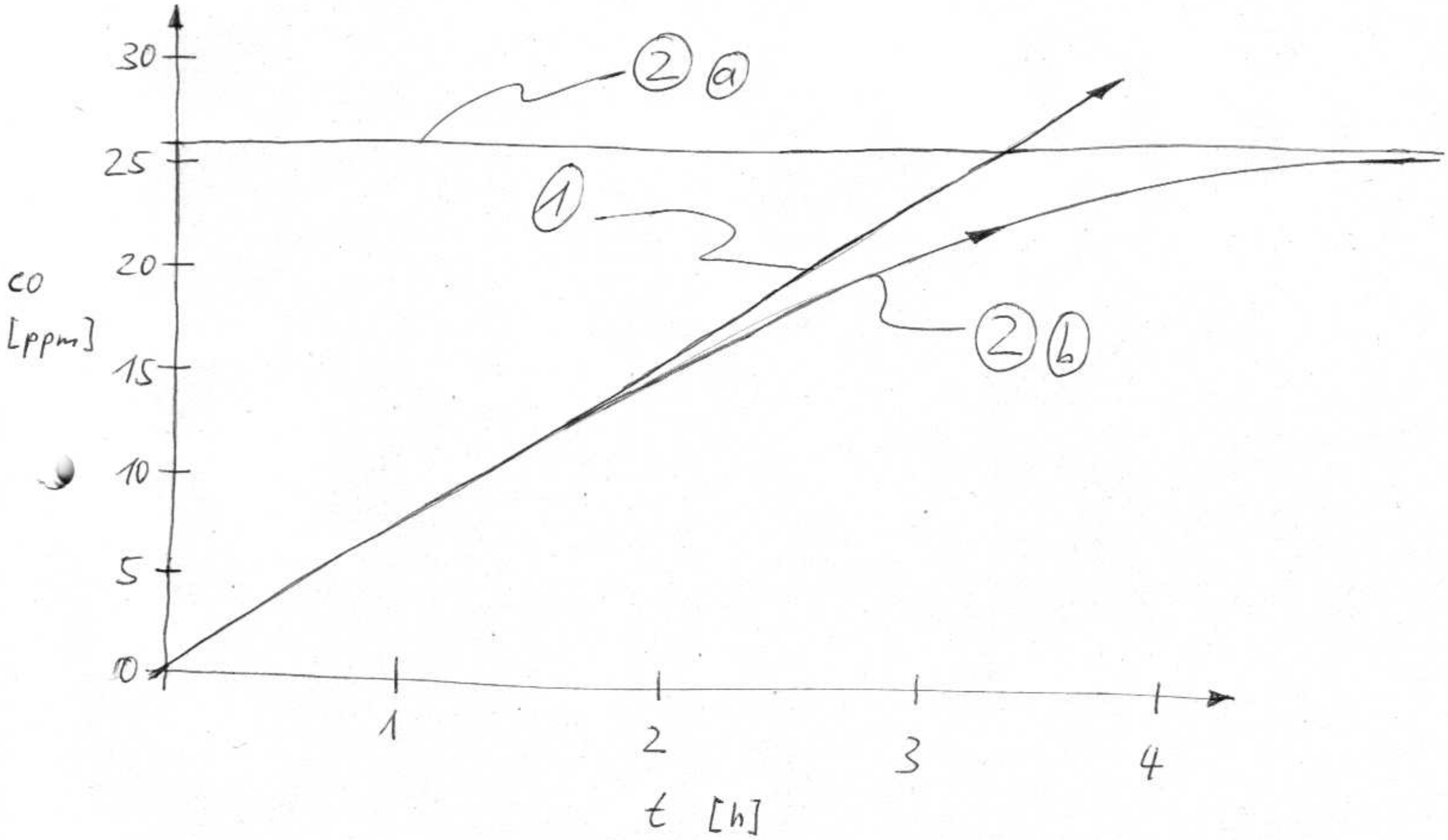
$$\underline{\underline{c_{ppm}(t) = \left[\frac{Q}{N} - \frac{Q}{N}\exp(-Nt)\right]\frac{1}{V} \cdot \frac{RT}{pM_i}}}$$

(2)

(c) Den „Worst-Case" lässt sich leicht mit Aufgabe (2)(a) berechnen, ob man überhaupt in die Nähe kommt ist einfach abzuschätzen (Aufgabe (1)).

Die exakte Lösung ((2)(b)) lässt sich grafisch einfach abschätzen wenn (1) und (2)(a) gelöst wurden.

Es handelt sich um eine „Einwachsfunktion", zum Zeitpunkt $t=0$ weist sie die Steigung der Funktion $c_{ppm}(t)$ aus Aufgabe (1) auf und konvergiert anschliessend zum Wert welcher in Aufgabe (2)(a) berechnet wurde.



③ Zusatzfrage:

Wenn es im Raum absolut keine Luftströmung geben würde, würde das CO aufsteigen (CO ist leichter als O_2). Dies ist jedoch aus folgenden Gründen nicht der Fall:

1) Eine Durchmischung auf Grund der thermischen Bewegung der Gasmoleküle findet immer statt.
   => Langsame Durchmischung der Luft
   => Um den Baum erhöhte CO-Konzentration, da die Kerzen auf dem Baum die CO-Quellen sind.
2) Turbulenz auf Grund von Bewegung der Luftmassen im Raum (Personen die sich bewegen, ...)
   => schnellere Durchmischung der Luft
   => erhöhte CO-Konzentration um die Quelle (Baum)
3) Konvektion: Die Luft steigt im Bereich des Baums auf, da die „Kerzen" die Luft erwärmen. Ebenso steigen die Produkte der Verbrennung auf (sind im Vergleich zur Umgebungsluft viel wärmer).
   => „Frische" Luft strömt unten Richtung Baum
   => CO-Konzentration ist unter dem Baum am tiefsten

Der Effekt 3) überwiegt alle anderen Effekte. Daher besteht für die Katze eine geringere Belastung. Ebenso folgt auch, dass die Katze sich nicht unter den Baum legt, um sich an den „Kerzen" zu wärmen (Strahlungswärme einer brennenden Kerze ist sehr gering).