

Environmental Fluid Dynamics II
Vorlesungsunterlagen: Allgemeine Einführung,
Flusshydraulik, Grundwasser

Olaf A. Cirpka

Eidgenössische Anstalt für Wasserversorgung, Abwasserreinigung
und Gewässerschutz (Eawag) · Überlandstr. 133 · 8600 Dübendorf

SS 2006 (18. April 2006)

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen für die Formulierung von Bilanzgleichungen	5
1.1	Mathematische Grundlagen	5
1.1.1	Differentialoperatoren	5
1.1.2	Integrations- und Differentiationsregeln	7
1.2	Zustandsvariablen	8
1.3	Allgemeine Erhaltungsgleichungen	9
1.3.1	Massenerhalt des Fluids	10
1.3.2	Impulserhalt des Fluids	10
1.3.3	Massenerhalt eines Inhaltsstoffes	12
1.3.4	Erhaltung der Wärme	14
1.3.5	Erhaltungsgleichungen in turbulenten Strömungen	15
1.4	Klassifizierung von Wasserinhaltsstoffen	15
1.4.1	Physikalische Zustandsform	15
1.4.2	Anlagerungs- und Abbauverhalten	16
1.4.3	Strömungsrelevante Stoffeigenschaften	16
2	Eindimensionale Strömung und Transport in Fließgewässern	19
2.1	Saint Venant Gleichungen	20
2.1.1	Reibungsansätze	22
2.1.2	Strömender und schießender Abfluss	24
2.1.3	Stationärer Abfluss	26
2.1.4	Flachwasserwellen in stehenden Gewässern	28
2.1.5	Charakteristische Form der <i>Saint Venant</i> Gleichungen	29
2.1.6	Vereinfachungen der <i>Saint Venant</i> Gleichungen	35
2.1.7	Rand- und Anfangsbedingungen	41
2.2	Stofftransport in Flüssen	43
2.2.1	Dispersion in einem Fluss	45
2.2.2	Analytische Lösungen der 1D Advektions-Dispersionsgleichung	46
3	Strömung und Transport in porösen Medien	55
3.1	Grundbegriffe	55
3.2	Klassifizierung des natürlichen Untergrunds	58
3.2.1	Sieblinien	58
3.2.2	Charakteristischer Korndurchmesser	59
3.2.3	Beschreibung der Hohlräume	59
3.2.4	Zum Begriff des <i>Porösen Mediums</i>	62
3.2.5	Klassifizierung der Gesteine nach ihren Strömungseigenschaften	63
3.3	Wasser im natürlichen Untergrund	63

3.3.1	Klassifizierung des unterirdischen Wassers nach dem Sättigungsgrad . . .	63
3.3.2	Hydrostatik und bodenphysikalischer Potentialbegriff	64
3.3.3	Hydraulische Typisierung von Grundwasserleitern	70
3.4	Grundwasserströmungsgleichung	71
3.4.1	Das Fließgesetz von Henry Darcy	71
3.4.2	Kontinuitätsgleichung für poröse Medien	83
3.4.3	Tiefenintegrierte Betrachtung	87
3.4.4	Querschnittsintegrierte Betrachtung	94
3.5	Analytische Berechnung der eindimensionalen stationären Grundwasserströmung	96
3.5.1	Gespannter Grundwasserleiter	96
3.5.2	Freier Grundwasserleiter	96
3.5.3	Halbgespannter Grundwasserleiter	98
3.5.4	Fragmentenmethode	99
3.6	Stationäre Brunnenströmung	101
3.6.1	Gespannter Grundwasserleiter	101
3.6.2	Halbgespannter Grundwasserleiter	104
3.6.3	Freier Grundwasserleiter	106
3.6.4	Fassungsvermögen und Ergiebigkeit	109
3.7	Analytische Berechnung der regionalen Grundwasserströmung	110
3.7.1	Superposition	110
3.7.2	Berücksichtigung von Rändern	114
3.8	Regionale Strömung in realen Grundwasserleitern	119
3.8.1	Konzeptionelle Modelle für Grundwasserleiter	119
3.8.2	Wirkung von Aquiferheterogenitäten	121
3.8.3	Wechselwirkung mit Oberflächengewässern	123
3.8.4	Dichteeffekte	127
3.9	Stofftransport in porösen Medien	128
3.9.1	Diffusion und Dispersion in porösen Medien	128
3.9.2	Advektions-Dispersionsgleichung für poröse Medien	134
3.9.3	Berücksichtigung einer Festphase in der Transportgleichung	135
3.9.4	Wirkung der Prozesse	137
3.10	Fließzeiten-Analyse	138
3.10.1	Bestimmung von Fließzeiten in stationären Strömungen	141
3.11	Lösungen für den advektiv-dispersiven Transport in Parallelströmung	144
3.11.1	Punktquelle und ausgedehnte Quelle im unendlichen Gebiet	144
3.11.2	Vereinfachte Lösung für eine dauerhafte Einleitung	145
3.11.3	Berücksichtigung von Rändern	146

Kapitel 1

Grundlagen für die Formulierung von Bilanzgleichungen

1.1 Mathematische Grundlagen

1.1.1 Differentialoperatoren

Der nabla-Operator ∇ ist der Vektor der partiellen räumlichen Ableitungen:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

wobei x_i [L] die i -te Raumkoordinate darstellt.

Der Gradient einer skalaren Größe (wie zum Beispiel der Konzentration) ist ein Vektor der in Richtung des größten Anstiegs zeigt:

$$\text{grad}(c) = \nabla c = \begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial x_1} \\ \frac{\partial c}{\partial x_2} \\ \frac{\partial c}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

wohingegen die Divergenz eines Vektors eine skalare Größe ist, die mit Quell-/Senkentermen verbunden ist:

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (1.3)$$

In der Strömungsmechanik beschreibt die Divergenz eines Flusses die Anreicherung bzw. Abnahme der transportierten Größe. In den Strömungsgleichungen wird der Massenfluss des Fluids betrachtet, in Stofftransportgleichungen der Massenfluss eines Inhaltsstoffes und in Wärme-transportgleichungen der Wärmefluss. Eine negative Divergenz des Massenflusses bedeutet die Zunahme und eine positive Divergenz die Abnahme der Konzentration.

In den Navier-Stokes Gleichungen betrachten wir auch den Gradienten eines Vektors (nämlich des Geschwindigkeitsvektors), was zu einer Matrixgröße führt. Eine eindeutige Notation verwendet hierfür den dyadischen Multiplikationsoperator \otimes :

$$\text{grad}(\mathbf{v}) = \nabla \otimes \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v}^T \quad (1.4)$$

Wenn wir den Ausdruck $\nabla \otimes \mathbf{v}$ mit \mathbf{A} bezeichnen, sind die Elemente von \mathbf{A} wie folgt definiert:

$$A_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (1.5)$$

Die Rotation eines Vektorfeldes ist das Kreuzprodukt des nabla-Operators mit dem Vektorfeld:

$$\text{rot}(\mathbf{v}) = \nabla \times \mathbf{v} = \det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Es ist zu erkennen, dass bei einer zweidimensionalen Betrachtung die Rotation $\nabla \times \mathbf{v}$ einen Vektor senkrecht zur Betrachtungsebene darstellt.

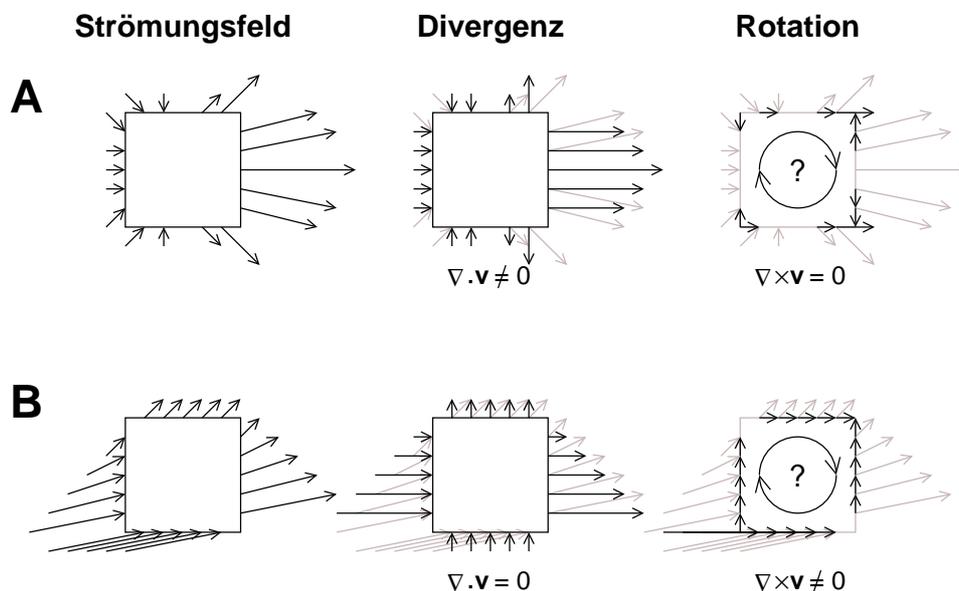


Abbildung 1.1: Veranschaulichung von Divergenz und Rotation eines zweidimensionalen Strömungsfeldes.

Abbildung 1.1 veranschaulicht die Bedeutung der Divergenz und der Rotation eines zweidimensionalen Strömungsfeldes. Beide Größen sind für ein Kontrollvolumen einfacher darzustellen als für einen Punkt. Für die Berechnung der Divergenz integrieren wir die Normalkomponente des Flusses über die Oberfläche des Kontrollvolumens. Für die Berechnung der Rotation integrieren wir die Parallelkomponente des Flusses. Im Beispiel A ist eine Quelle innerhalb des Kontrollvolumens vorhanden. Hieraus ergibt sich, dass das Integral der Normalkomponente des Flusses positiv ist, die Divergenz beträgt nicht null. In diesem Beispiel beträgt die Rotation jedoch null, weil die oberflächenparallelen Flusskomponenten sich im Integral ausgleichen. Im Gegensatz hierzu beträgt die Divergenz im Beispiel B null, wohingegen die Rotation nicht null ist. Dies ist der Fall, weil die Geschwindigkeit an der Unterkante höher ist als an der Oberkante, was typisch ist für alle Scherströmungen.

1.1.2 Integrations- und Differentiationsregeln

Wir betrachten eine räumlich differenzierbare skalare Funktion $u(x)$ in einem eindimensionalen System mit den Grenzen a und b . Dann gilt:

$$[u]_a^b = \int_a^b \frac{\partial u}{\partial x} dx \tag{1.7}$$

wobei $[u]_a^b = u(b) - u(a)$ bedeutet. Wir erweitern jetzt die Betrachtung auf eine differenzierbare Vektorfunktion $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ in einem dreidimensionalen, rechteckigen Kontrollvolumen mit den Begrenzungen $(0, 0, 0)$ und $(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= \int_0^{\Delta x_2} \int_0^{\Delta x_3} (v_1(\Delta x_1, x_2, x_3) - v_1(0, x_2, x_3)) \, dx_2 dx_3 \\ &+ \int_0^{\Delta x_1} \int_0^{\Delta x_3} (v_2(x_1, \Delta x_2, x_3) - v_2(x_1, 0, x_3)) \, dx_1 dx_3 \\ &+ \int_0^{\Delta x_1} \int_0^{\Delta x_2} (v_3(x_1, x_2, \Delta x_3) - v_3(x_1, x_2, 0)) \, dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^{\Delta x_1} \int_0^{\Delta x_2} \int_0^{\Delta x_3} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \, dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \end{aligned} \tag{1.8}$$

wobei $\oint_S d\mathbf{x}$ ein Oberflächenintegral, $\int_V d\mathbf{x}$ ein Volumenintegral und \mathbf{n} den normalen Einheitsvektor, der senkrecht zur Oberfläche steht und nach außen weist, darstellen. Gl. (1.8) ist als *Divergenztheorem* bekannt.

Als nächstes betrachten wir das Produkt zweier skalarer Raumfunktionen $u(\mathbf{x})$ und $v(\mathbf{x})$. Die Produktregel der Differentiation ergibt:

$$\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v \tag{1.9}$$

Wenn $u(\mathbf{x})$ eine skalare Größe ist und $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ein Vektorfeld, gilt:

$$\nabla \cdot (u\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla u + u\nabla \cdot \mathbf{v} \tag{1.10}$$

Einsetzen von Gl. (1.10) in das Divergenztheorem, Gl. (1.8), führt zum *Green-Gaußschen Integrationssatz*:

$$\oint_S \mathbf{n} \cdot (u\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_V \nabla \cdot (u\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_V (\nabla u) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_V u(\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \tag{1.11}$$

Gl. (1.11) wird normalerweise in der folgenden Form verwendet:

$$\boxed{\int_V u(\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \oint_S \mathbf{n} \cdot (u\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_V (\nabla u) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}} \tag{1.12}$$

1.2 Zustandsvariablen

Alle Teilgebiete der Kontinuumsmechanik beruhen auf der Erhaltung *extensiver Zustandsgrößen*. Extensive Größen eines Körpers verdoppeln sich, wenn wir die Masse verdoppeln. Typische Bilanzierungsgrößen in der Strömungsmechanik sind:

- die Masse und das Volumen eines Fluidpaketes,
- der Impuls eines Fluidpaketes,
- die Masse einer Einzelkomponente des Fluides (z.B. eines gelösten Stoffes),
- die Wärme des Fluids.

Der Massen-, Volumen- und Impulserhalt des Fluides stellt die Grundlage für die Strömungsgleichungen in Rohren und anderen technischen Systemen, Oberflächengewässern, im Grundwasser und in der Atmosphäre dar. Der Massenerhalt von Inhaltsstoffen führt zur Stofftransportgleichung, und die Wärmebilanz zur Wärmetransportgleichung.

Extensive Zustandsvariablen werden selten direkt gemessen. Anstatt dessen werden *intensive Zustandsgrößen* erfasst. Diese verändern sich nicht, wenn wir die Masse des Körpers verändern. Beispiele für intensive Zustandsgrößen sind die Konzentration eines gelösten Stoffes und die Temperatur. Wenn wir einen Eimer mit 5 ℓ Leitungswasser füllen, das 5 mg/ℓ Chlorid enthält, und fügen weitere 5 ℓ Leitungswasser mit der gleichen Konzentration hinzu, so bleibt die Chloridkonzentration konstant. Die Masse des gelösten Chlorids steigt jedoch von 25 mg auf 50 mg . Die Chloridkonzentration ist eine intensive Größe und die Masse des gelösten Chlorids eine extensive.

Der Zusammenhang zwischen intensiver und extensiver Größe wird als *Zustandsfunktion* bezeichnet. Unter konstanten Bedingungen sind viele Zustandsfunktionen linear (Masse entspricht Konzentration mal Volumen; Wärme ist Temperatur mal Dichte mal Volumen mal Wärmekapazität). Insofern erscheint die Unterscheidung zwischen extensiven und intensiven Größen zunächst irrelevant. Es ist jedoch wichtig festzuhalten, dass wir ausschließlich extensive Größen bilanzieren können. Wenn sich die Zustandsfunktion verändert, ändert sich die intensive Größe, obwohl die extensive Größe konstant bleibt. Beispiele hierfür sind:

1. Ein Ballon wird mit einem Helium/Luft-Gemisch befüllt. Wenn wir den Ballon steigen lassen, ändert sich die Masse des Sauerstoffs im Ballon nicht, die Konzentration nimmt jedoch ab, weil sich der Ballon aufgrund des abnehmenden Drucks ausdehnt.
2. Mit einer Sonde messen wir die Aktivität eines gelösten Stoffes, z.B. Chlorid. Das Verhältnis von Aktivität zu Konzentration wird als Aktivitätskoeffizient bezeichnet und hängt von der Ionenstärke, d.h. von den Konzentrationen aller gelösten Stoffe, ab. Wenn wir in ein Becherglas, das eine Chloridlösung enthält, einen Esslöffel eines Sulfatsalzes zugeben, ändert sich nicht die Chloridmasse im Becherglas wohl aber die Chloridaktivität.

Es ist also sicherer, Erhaltungsgleichungen auf der Grundlage extensiver Größen zu formulieren. Nichtsdestotrotz werden die meisten Gleichungen in die messbaren intensiven Größen überführt. Bei der Verwendung der sich hieraus ergebenden Transportgleichungen ist es wichtig, sich über die Annahmen bezüglich der Zustandsfunktionen im Klaren zu sein. So ist z.B. eine konzentrationsbezogene Transportgleichung, die für ein inkompressibles Fluid formuliert wurde, nicht auf ein kompressibles Fluid anwendbar.

1.3 Allgemeine Erhaltungsgleichungen

In diesem Abschnitt wiederholen wir, wie sich eine extensive Zustandsgröße in einem ortsfesten Kontrollvolumen verändert (*Eulersche Betrachtungsweise*). Dies setzt die Kenntnis aller internen Quellen und Senken sowie des Austausches über die Ränder des Bilanzvolumens voraus (siehe Abb. 1.2).

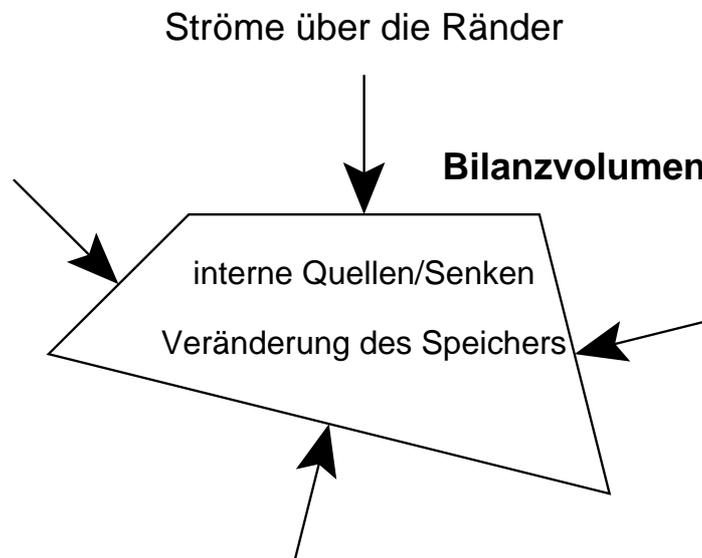


Abbildung 1.2: Bilanzbetrachtung für ein zweidimensionales Kontrollvolumen.

Im Folgenden betrachten wir eine extensive Speichergröße mit zugehöriger volumetrischer Dichte ϱ , eine Flussdichte \mathbf{f} und einen volumenbezogenen Quellen/Senkenterm s . Dann ergibt sich folgende Bilanzgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho d\mathbf{x} + \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} = \int_V s d\mathbf{x} \quad (1.13)$$

Unter Verwendung des Divergenztheorems, Gl. (1.8), und unter der Annahme, dass das Betrachtungsvolumen sich zeitlich nicht verändert, ergibt sich:

$$\int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} = \int_V s d\mathbf{x} \quad (1.14)$$

Im Grenzfall eines infinitesimal kleinen Bilanzvolumens fallen die Volumenintegrale weg:

$$\boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} = s} \quad (1.15)$$

Gl. (1.15) ist die Grundlage aller kontinuumsmechanischer Betrachtungen. Es gilt lediglich, für die einzelnen Probleme die zugehörigen Speichergrößen, Flussdichten und Quell/Senkenterme zu definieren.

1.3.1 Massenerhalt des Fluids

Beim Massenerhalt des Fluides ist die Masse $m = \int_V \rho dx$ die extensive Speichergröße (mit der Massendichte ρ des Fluids). Als Flussdichte wird das Produkt $\rho \mathbf{v}$ aus Massendichte und Geschwindigkeit verwendet. Als Quell/Senkenterm gehen wir von einer internen spezifischen Volumenquelle/senke q [T^{-1}] aus. Im Fall einer Quelle, bringt das eindringende Fluid seine Dichte ρ_{in} mit, im Fall einer Senke tritt Fluid mit der Dichte im Kontrollvolumen aus. Damit lautet die Bilanzgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho_* q} \quad (1.16)$$

mit

$$\rho_* = \begin{cases} \rho_{in} & \text{wenn } q > 0 \\ \rho & \text{wenn } q < 0 \end{cases}$$

Gl. (1.16) ist als *Kontinuitätsgleichung* bekannt. Im Fall eines Fluids mit konstanter Dichte, vereinfacht sich die Massenbilanz zu einer Volumenbilanz:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = q \quad (1.17)$$

1.3.2 Impulserhalt des Fluids

Jetzt betrachten wir die i -te Impulskomponente des Fluids, d.h. die Speichergröße ist $\int_V \rho v_i dx$. Als Impulsflussdichten treten konvektive und viskose Flüsse auf. Der konvektive Fluss $\rho v_i \mathbf{v}$ beschreibt den Transport des Impulses mit dem sich bewegenden Fluid. In der *Lagrangeschen Betrachtungsweise*, bei der man sich mit dem Fluidpaket mitbewegt, entfällt dieser Term. Der viskose Fluss $-\eta \nabla v_i$ ergibt sich aus molekularen Wechselwirkungen, bei denen der Impuls von einem Fluidteilchen auf das andere übertragen wird. Die dynamische Viskosität η [$ML^{-1}T^{-1}$] kann als Produkt der Massendichte ρ und der kinematischen Viskosität ν [L^2T^{-1}] ausgedrückt werden. Als Quell/Senkenterme tauchen der Druckgradient $-\partial p / \partial x_i$ in Richtung der betrachteten Impulskomponente, externe Kräfte f_i^{ext} , sowie im Fall der Vertikalkomponente die Erdbeschleunigungskraft $-\rho g \partial x_3 / \partial x_i$ auf:

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} v_i - \rho \nu \nabla v_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g \frac{\partial x_3}{\partial x_i} + f_i^{ext} \quad (1.18)$$

mit der Erdbeschleunigung g .

Für die Erhaltung des Impulsvektors $\int_V \rho \mathbf{v} dx$ ergibt sich:

$$\boxed{\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \rho \nu \nabla \otimes \mathbf{v}) = -\nabla p - \rho g \nabla x_3 + \mathbf{f}^{ext}} \quad (1.19)$$

Gl. (1.19) ist als System der *Navier-Stokes-Gleichungen* bekannt. Es ist hier für ein ortsfestes Koordinatensystem formuliert. Die Anwendung der Produktregel der Differentiation und Einsetzen der Kontinuitätsgleichung, Gl.(1.16), ergibt:

$$v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla v_i - \nabla \cdot (\rho v \nabla v_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g \frac{\partial x_3}{\partial x_i} + f_i^{ext} \quad (1.20)$$

$$\underbrace{v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})}_{=v_i \rho_* q} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla v_i - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho v \nabla v_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - g \frac{\partial x_3}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} f_i^{ext} - \frac{\rho_*}{\rho} v_i q \quad (1.21)$$

bzw.:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho v \nabla \otimes \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla x_3 + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}^{ext} - \frac{\rho_*}{\rho} q \mathbf{v} \quad (1.22)$$

Wenn man den Dichtegradienten im viskosen Term vernachlässigt, ergibt sich:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} - v \nabla^2 \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla x_3 + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}^{ext} - \frac{\rho_*}{\rho} q \mathbf{v} \quad (1.23)$$

Der erste Term in Gl. (1.23), $\partial \mathbf{v} / \partial t$, ist als lokale Beschleunigung, der zweite Term, $\mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}$, als konvektive Beschleunigung bekannt, $\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v})$ ist für jede Komponente von \mathbf{v} die Summe aller zweiten Ableitungen. Er ergibt sich daraus, dass das Fluid seinen Impuls mit der Strömung mitnimmt. Ein ortsfester Beobachter sieht eine Beschleunigung, wenn das Fluid einen Geschwindigkeitsgradienten aufweist.

Coriolisbeschleunigung

Wir betrachten einen Punkt, der sich im rotierenden Koordinatensystem \mathbf{x}_r der Erde (Ost-, Nord- und Vertikalkomponente) mit der Relativgeschwindigkeit $d\mathbf{x}_r/dt$ bewegt. Ein Außenbetrachter im ruhenden Koordinatensystem \mathbf{x}_i (Initialsystem) sieht zusätzlich die Bewegungsgeschwindigkeit die sich aus der Rotation des \mathbf{x}_r -Systems ergibt:

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{x}_r}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_r \quad (1.24)$$

wobei $\boldsymbol{\Omega}$ den Rotationsvektor der Erddrehung beschreibt:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \cos \theta \\ \omega \sin \theta \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

mit der geographischen Breite θ und der Winkelgeschwindigkeit der Erde $\omega = 2\pi/d$. Zweifachanwendung der Koordinatentransformation ergibt die Transformation der Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{x}_r}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_r \right) + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{d\mathbf{x}_r}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_r \right) \\ &= \frac{d^2 \mathbf{x}_r}{dt^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{x}_r}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_r) \end{aligned} \quad (1.26)$$

$d^2 \mathbf{x}_i / dt^2$ und $d^2 \mathbf{x}_r / dt^2$ entsprechen den vollständigen Differentialen dv_i / dt und dv_r / dt der Geschwindigkeiten in den ortsfesten und rotierenden Koordinaten. Damit ergibt sich aus dem Wechsel in das rotierenden Koordinatensystem:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla_i \otimes \mathbf{v}_i = \frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial t} + \mathbf{v}_r \cdot \nabla_r \otimes \mathbf{v}_r + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r}_{\text{Coriolisbeschleunigung}} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_r)}_{\text{Zentrifugalbeschleunigung}} \quad (1.27)$$

Die Zentrifugalbeschleunigung ist für das System der Erde weitgehend vernachlässigbar. Der Coriolisterm muss jedoch bei großskaligen System berücksichtigt werden. Damit wird aus Gl. (1.23) in Koordinaten der Erde unter der Vernachlässigung weiterer externer Kräfte und Volumenquellen/senken:

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} - \nabla \cdot (v \nabla \otimes \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla x_3 - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}} \quad (1.28)$$

Dimensionslose Betrachtung

Um die Bedeutung einzelner Terme der Impulsgleichung in einem bestimmten System abzuschätzen, ist es sinnvoll, alle dimensionsbehafteten Größen durch dimensionslose Größen zu ersetzen. Hierzu wird im Wesentlichen eine charakteristische Länge ℓ_{ch} (z.B. die Größe des Betrachtungsraumes) und eine charakteristische Geschwindigkeit v_{ch} (z.B. der Betrag der mittleren Fließgeschwindigkeit) benötigt:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_* \ell_{ch}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_* v_{ch}, \quad t = t_* \frac{\ell_{ch}}{v_{ch}}, \quad \nabla = \frac{1}{\ell_{ch}} \nabla_* \quad (1.29)$$

$$p = p_* \rho g \ell_{ch}, \quad g = g_* \frac{v_{ch}^2}{\ell_{ch}}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_* \omega \quad (1.30)$$

wobei alle Größen mit einem Stern dimensionlos sind, und ∇_* die Ableitung nach den dimensionslosen Raumkoordinaten bedeutet. Einsetzen in Gl. (1.28) ergibt:

$$\frac{v_{ch}^2}{\ell_{ch}} \frac{\partial \mathbf{v}_*}{\partial t_*} + \frac{v_{ch}^2}{\ell_{ch}} \mathbf{v}_* \cdot \nabla_* \otimes \mathbf{v}_* - \frac{v v_{ch}}{\ell_{ch}^2} \nabla_*^2 \mathbf{v}_* = -g (\nabla_* p_* + \mathbf{e}_3) - 2v_{ch} \omega \boldsymbol{\Omega}_* \times \mathbf{v}_* \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_*}{\partial t_*} + \mathbf{v}_* \cdot \nabla_* \otimes \mathbf{v}_* - \frac{v}{v_{ch} \ell_{ch}} \nabla_*^2 \mathbf{v}_* = -\frac{g \ell_{ch}}{v_{ch}^2} (\nabla_* p_* + \mathbf{e}_3) - 2 \frac{\omega \ell_{ch}}{v_{ch}} \boldsymbol{\Omega}_* \times \mathbf{v}_* \quad (1.32)$$

Die dimensionslosen Kombinationen von Parametern, die in Gl. (1.32) erscheinen, werden als Kennzahlen mit bestimmten Namen zusammengefasst. So ist der Vorfaktor des viskosen Terms als inverse Reynoldszahl bekannt. Offensichtlich sind viskose Kräfte um so wichtiger, je kleiner die betrachteten Längen und Geschwindigkeiten sind. Die Coriolisbeschleunigung hingegen ist in System mit großen Längenausdehnungen und kleinen Geschwindigkeiten wichtig. Entsprechend werden Corioliskräfte in Flüssen vernachlässigt, müssen in großen Seen jedoch berücksichtigt werden.

1.3.3 Massenerhalt eines Inhaltsstoffes

Wir betrachten jetzt die Masse eines Inhaltsstoffes in unserem Kontrollvolumen, $m = \int_V c dx$, als extensive Speichergröße. Die Massenflussdichte \mathbf{J} [ML^2T^{-1}] setzt sich im Wesentlichen aus zwei Komponenten zusammen:

Advektiver Fluss Der advektive Fluss, $\mathbf{J}_a = c\mathbf{v}$, ergibt sich daraus, dass das fließende Fluid seine Inhaltsstoffe mitnimmt.

Diffusiv/dispersiver Fluss Der diffusive Massenfluss, $\mathbf{J}_d = -\mathbf{D}\nabla c$, mit dem Diffusionstensor \mathbf{D} [L^2T^{-1}], wirkt entgegen Konzentrationsgradienten. Er beruht auf der Brownschen Molekularbewegung der Fluidteilchen. Die zufällige Molekularbewegung beträgt im Mittel null. Bestehen Konzentrationsunterschiede, so werden diese durch die Zufallsbewegungen der einzelnen Teilchen ausgeglichen. In turbulenten Strömungen tritt auf einer größeren Skala dasselbe Phänomen auf, nur dass hier die zufällige Bewegung von ganzen Fluidpaketen anstelle einzelner Moleküle maßgeblich ist. Entsprechend ist der turbulente Diffusionskoeffizient D_t sehr viel größer als der molekulare Diffusionskoeffizient D_m . (Außerdem hängt der turbulente Koeffizient von den Strömungsverhältnissen ab). Bei der eindimensionalen Betrachtung von Scherströmungen, z.B. in Rohren und Flüssen, bestehen Geschwindigkeitsunterschiede im Querprofil, die ebenfalls zu einer diffusionsartigen Stoffübertragung führen. Sie wird als Dispersion bezeichnet. Derselbe Prozess besteht in porösen Medien, wo sich Geschwindigkeitsfluktuation aus der Umströmung von Körnern ergeben. Insbesondere in letzteren Fällen weist die Dispersion eine starke Richtungsabhängigkeit aus, weshalb im Allgemeinen ein Diffusions/Dispersionstensor \mathbf{D} verwendet wird.

Als Quellen/Senkenterm berücksichtigen wir einerseits eine volumenbezogene Reaktionsrate r [$\text{ML}^{-3}\text{T}^{-1}$] und andererseits den Eintrag bzw. Austrag mit ein- und austretendem Wasser. Dann wird aus unserer allgemeinen Erhaltungsgleichung, Gl. (1.15):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{v} - \mathbf{D}\nabla c) = r + c_*q \quad (1.33)$$

mit

$$c_* = \begin{cases} c_{in} & \text{wenn } q > 0 \\ c & \text{wenn } q < 0 \end{cases}$$

Auf die Divergenz des advektiven Massenflusses wenden wir jetzt die Produktregel der Differentiation an:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c + c\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla c) = r + c_*q \quad (1.34)$$

und berücksichtigen die Kontinuitätsgleichung, Gl. (1.16), in umgeformter Weise:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\rho_*}{\rho}q - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \quad (1.35)$$

Dann wird aus Gl. (1.33):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla c) = r + \left(c_* - c \frac{\rho_*}{\rho} \right) q + \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{c}{\rho} \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \quad (1.36)$$

Für den Fall einer internen Volumensenke, $q < 0$, gilt $c_* = c$ und $\rho_* = \rho$, sodass der zugehörige Senkenterm auf der rechten Seite verschwindet. Im Fall einer internen Volumenquelle, $q > 0$, muss man jedoch wissen, welche Dichte ρ_{in} und Konzentration c_{in} das zugeführte Fluid aufweist:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla c) = r + \left(c_{in} - c \frac{\rho_{in}}{\rho} \right) q_{in} + \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{c}{\rho} \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \quad (1.37)$$

Wenn eine konstante Dichte des Fluids angenommen werden kann, entfallen die Terme mit den Gradienten und Zeitableitungen der Dichte:

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) = r + (c_{in} - c) q_{in}} \quad (1.38)$$

Die Dichteterme würden im Übrigen auch entfallen, wenn man die Konzentration massen- statt volumenbezogen formulierte. Dies ist in atmosphärischen Anwendungen häufig der Fall.

Gl. (1.38) kann wie folgt verstanden werden: Die Konzentration an einem ortfesten Raumpunkt nimmt zu

1. infolge Advektion, wenn die oberstromige Konzentration größer ist als am Beobachtungspunkt ($-\mathbf{v} \cdot \nabla c$),
2. infolge Diffusion, wenn die zweite Ableitung der Konzentration positiv ist ($+\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c)$),
3. infolge einer Reaktion, wenn die Reaktionsrate positiv ist ($+r$),
4. durch den internen Fluidzutritt mit einer höheren Konzentration ($(c_{in} - c) q_{in}$).

Bei Vorliegen einer internen Volumensenke, würde zwar mit dem austretenden Fluid auch Masse des Inhaltsstoffes austreten, dies würde aber nicht die Konzentration verändern.

1.3.4 Erhaltung der Wärme

Im Wärmetransport stellt die thermische Energie $E = \int_V \rho C_p T dx$ [ML^2T^{-1}] die zu erhaltende extensive Speichergröße dar. Die Wärmeflussdichte \mathbf{H} [MT^{-2}] setzt sich wiederum aus einem konvektiven Anteil $\mathbf{H}_a = \mathbf{v} \rho C_p T$ und einem konduktiv-dispersiven Anteil $\mathbf{H}_d = -\lambda \nabla T$ zusammen. Hierbei ist die Konduktion ein molekularer Prozess, bei dem die Bewegungsenergie der Brownschen Molekularbewegung von einem Fluidteilchen auf das andere übertragen wird. Wie beim Stofftransport treten auf größeren Skalen zusätzliche diffusiv wirkende Wärmeflüsse auf, die aus Geschwindigkeitsfluktuationen zu erklären sind. Sie sind bei der jetzigen Betrachtung in der Wärmeleitfähigkeit λ [MLtempT^{-2}] subsummiert. Als Quell/Senkenterme berücksichtigen wir Wärmezu- und -abflüsse mit Volumenquellen sowie einen weiteren volumenbezogenen Term s_H [$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$]. Zur Vereinfachung gehen wir von inkompressiblen Fluiden mit konstanter Dichte aus, weil sonst die thermodynamischen Zustandsgrößen mitzuberechnen sind. Damit ergibt sich:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho C_p T - \lambda \nabla T) = \rho C_p T_* q + s_H \quad (1.39)$$

mit

$$T_* = \begin{cases} T_{in} & \text{wenn } q > 0 \\ T & \text{wenn } q < 0 \end{cases}$$

Einsetzen der Kontinuitätsgleichung ergibt analog zur Stofftransportgleichung:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T - \frac{1}{\rho C_p} \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = (T_{in} - T) q + \frac{s_H}{\rho C_p} \quad (1.40)$$

was formal identisch zum Stofftransport ist. Es ist jedoch anzumerken, dass Wärme auch durch Strahlung übertragen werden kann, was im Quell/Senkenterm s_H zu berücksichtigen ist.

Weitere Quell/Senkenterme ergeben sich durch Phasenübergänge (Schmelzen, Tauen, Kondensation und Verdampfung). Schließlich führt der Verlust kinetischer Energie durch innere Reibung zu einem Wärmeeintrag.

1.3.5 Erhaltungsgleichungen in turbulenten Strömungen

In turbulenten Strömungen schwanken die maßgeblichen Zustandsgrößen zeitlich und räumlich. Anstatt alle Wirbel einzeln aufzulösen, kann man sich für viele fluiddynamische Fragestellungen auf zeitlich gemittelte Größen beschränken, die im Weiteren als überstrichene Variablen dargestellt werden. Die Abweichungen vom Mittelwert werden mit einem Apostroph gekennzeichnet:

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}', p = \bar{p} + p', c = \bar{c} + c', T = \bar{T} + T' \quad (1.41)$$

Zur Vereinfachung, betrachtet wir ein Fluid mit konstanter Dichte und eine Strömung ohne interne volumetrische Quellen/Senken. Einsetzen in Gln. (1.17, 1.28, 1.38 & 1.40) und zeitliche Mittelung ergibt:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \otimes \bar{\mathbf{v}} + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} - \nu \nabla \otimes \bar{\mathbf{v}}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} - g \nabla x_3 - 2\Omega \times \bar{\mathbf{v}} \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{c} + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' c'} - \mathbf{D} \nabla \bar{c}) = 0 \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{T} + \nabla \cdot \left(\overline{\mathbf{v}' T'} - \frac{\lambda}{\rho C_p} \nabla \bar{T} \right) = \frac{s_H}{\rho C_p} \quad (1.45)$$

Bei der Mittelung fallen einzelne Schwankungen weg. Die neuen Gleichungen erhalten Mittelwerte sowie Korrelationen zwischen schwankenden Größen. Namentlich zu erwähnen sind der Reynoldsspannungstensor $\overline{\rho \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}$, der turbulent-diffusive Massenfluss $\overline{\mathbf{v}' c'}$ und der turbulent-diffusive Wärmefluss $\overline{\rho C_p \mathbf{v}' T'}$. Die Korrelationen müssen durch Größen approximiert werden, die bekannt sind, bzw. aus mittleren Größen ausgerechnet werden können (*Schließungsproblem* der Turbulenz). Hierzu werden zumeist parametrisierte Modelle verwendet, die formal den viskosen, diffusiven und konduktiven Termen entsprechen:

$$\overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} \approx -\nu_t \nabla \otimes \bar{\mathbf{v}} \quad (1.46)$$

$$\overline{\mathbf{v}' c'} \approx -\mathbf{D}_t \nabla \bar{c} \quad (1.47)$$

$$\overline{\mathbf{v}' T'} \approx -\Lambda_t \nabla \bar{T} \quad (1.48)$$

mit dem turbulenten Viskositätstensor ν_t , dem turbulenten Diffusionstensor \mathbf{D}_t und dem turbulenten Konduktionstensor Λ_t . Da die turbulenten Schwankungen eine Strömungseigenschaft darstellen, sind die Koeffizienten für den Impuls-, Massen- und Wärmeaustausch in erster Näherung identisch:

$$\mathbf{D}_t \approx \nu_t \approx \Lambda_t \quad (1.49)$$

1.4 Klassifizierung von Wasserinhaltsstoffen

1.4.1 Physikalische Zustandsform

Wasserinhaltsstoffe können in unterschiedlicher physikalischer Zustandsform auftreten, und zwar als

- gelöste Stoffe (in molekularer Lösung, Ionenlösung oder kolloidale Lösung),
- im Wasser unlösliche Feststoffe (Suspension, Schwebstoffe und Geschiebe),
- emulgierte Stoffe (im Wasser unlösliche Flüssigkeiten).

Gelöste Stoffe sind an die Wasserteilchen gebunden und weisen keine Relativbewegung zum Wasser auf. Man unterscheidet zwischen Stoffen, welche die Dichte und die Zähigkeit des Wassers nicht oder nur unwesentlich verändern (hydrodynamisch neutrale Stoffe) und solche, die diese Fluideigenschaften verändern, was Rückwirkungen des Transports auf die Strömung nach sich zieht.

Suspendierte Stoffe werden im Vergleich zu gelösten Stoffen durch die Schwerkraft vertikal verfrachtet; die Stärke der relativen Vertikalbewegung hängt von Partikeldurchmesser und -dichte ab. Schwebstoffe werden im strömenden Wasser in der Schwebe gehalten werden, wohingegen Geschiebe nur entlang der Gewässersohle transportiert werden.

Emulgierte Stoffe weisen Eigenschaften auf, die eine Vermischung und Lösung im Wasser nicht zulassen. Thermodynamisch instabile Emulsionen zerfallen in ihre Einzelphasen. Der Transport dieser Stoffe ist als Mehrphasenströmung zu beschreiben. Thermodynamisch stabile Emulsionen verhalten sich wie eine eigenständige Phase mit eigenständigen Strömungseigenschaften.

1.4.2 Anlagerungs- und Abbauverhalten

Auch bezüglich ihres Umweltverhaltens kann man die Wasserinhaltsstoffe in verschiedene Gruppen einteilen:

- Perseverante Stoffe sind solche, die weder chemischen noch biologischen Reaktionen ausgesetzt sind, noch durch Absetzen, Ausfällen oder Adsorption dem Wasser entzogen werden. Dies sind im hydrodynamischen Sinne konservative Stoffe. Ein typischer Vertreter dieser Gruppe ist zum Beispiel Chlorid.
- Persistente sind ebenfalls konservative Substanzen, die zwar nicht chemisch oder biologisch abgebaut werden, aber durch physikochemische Vorgänge am Korngerüst angelagert werden. Im Grundwasser bewegen sie sich langsamer als perseverante Stoffe, weil sie durch die Sorption zurückgehalten werden.
- Abbaubare Substanzen sind solche Wasserinhaltsstoffe, die durch chemische oder biologische Prozesse umgewandelt und abgebaut werden.
- Leichtflüchtige Substanzen neigen dazu, in die Gasphase überzutreten.

1.4.3 Strömungsrelevante Stoffeigenschaften

Aus hydromechanischer Sicht lassen sich folgende Gruppen von Wasserinhaltsstoffen unterscheiden:

- *Hydrodynamisch neutrale, mischbare Stoffe* (Tracer)

Hierzu gehören

- alle gelösten oder suspendierten Wasserinhaltsstoffe bei sehr geringen Konzentrationen,
 - Stoffe bei beliebigen Konzentrationen, die keine merkliche Änderung der Dichte oder der Zähigkeit des Wassers verursachen. Die rechnerische Erfassung des Transports von Tracern ist erheblich einfacher als für andere Stoffgruppen.
- *Hydrodynamisch aktive Stoffe*

Hierzu zählen alle diejenigen Wasserinhaltsstoffe, die eine Dichte- oder Zähigkeitsänderung des Wassers bewirken und dadurch das Strömungsfeld beeinflussen. Beispiele hierfür sind hohe Feststoff- oder Salzkonzentrationen oder auch Temperaturunterschiede bei Warm- oder Kaltwassereinleitung. Die Wirkung der aktiven Wasserinhaltsstoffe kann drastische Abweichungen von der unbeeinflussten Strömung und damit vom Tracertransport verursachen. Eine realistische rechnerische Erfassung dieser Erscheinung ist nur mit großem Aufwand möglich.
 - *Nicht mischbare Stoffe* weisen in aller Regel gegenüber Wasser sowohl eine unterschiedliche Dichte ρ als auch eine unterschiedliche Zähigkeit μ auf. Darüberhinaus treten Grenzflächenphänomene zwischen den Phasen auf, die die Strömung aller beteiligten Fluide beeinflussen.

Kapitel 2

Eindimensionale Strömung und Transport in Fließgewässern

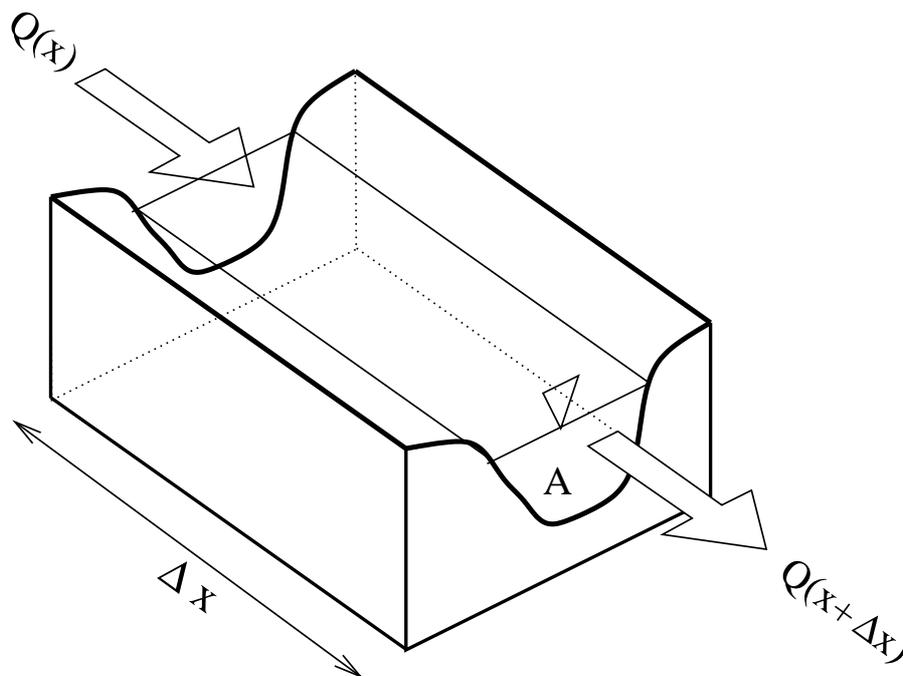


Abbildung 2.1: Eindimensionale Massenbilanz für einen Flussabschnitt.

Als Kontrollvolumen betrachten wir einen Flussabschnitt, wie er in Abb. 2.1 dargestellt ist, als eindimensionales System. Für die Formulierung allgemeiner Erhaltungsgleichungen gehen wir wiederum von einer extensiven Speichergröße mit zugehöriger volumetrischer Dichte ρ , einer Flussdichte f , wobei wir ausschließlich die Komponente in Längsrichtung x betrachten, und einen volumenbezogenen Quell/Senkenterm s aus. Der wassererfüllte Querschnitt A [L^2] kann jedoch räumlich und zeitlich variieren. Dann ergibt sich unter Anwendung des Divergenztheorems, Gl. (1.8), folgende Bilanzgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A \rho dA + \frac{\partial}{\partial x} \int_A f dA = \int_A s dA \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial (A\bar{\rho})}{\partial t} + \frac{\partial (A\bar{f})}{\partial x} = \bar{s} \quad (2.2)$$

wobei überstrichene Größen über den Querschnitt gemittelt wurden und \bar{s} einen längenbezogenen Quell/Senkenterm darstellt.

2.1 Saint Venant Gleichungen

Wir gehen davon aus, dass sich die Dichte des Wassers nicht verändert. Deshalb können wir die Massenbilanz des Fluids durch eine Volumenbilanz ersetzen. Der spezifische Volumenfluss entspricht der Geschwindigkeit v , dessen Integral über die Querschnittsfläche der Durchfluss Q [L^3T^{-1}] ist. Als Quell/Senkenterme treten laterale Zu- und Abflüsse \tilde{q} [L^2T^{-1}] auf. Dann lautet die *Kontinuitätsgleichung* für den Fluss:

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \tilde{q}} \quad (2.3)$$

Die lateralen Zu-/Abflüsse beschreiben das Wasservolumen, das pro Längeneinheit des Flusses und pro Zeiteinheit dem Gewässer seitlich zufließt (z.B. durch Grundwasserex- und -infiltration oder Eintritt von Seitenbächen, Kanaleinleitungen etc.).

Die Kontinuitätsgleichung wird manchmal in der Wassertiefe h und der mittleren Geschwindigkeit v anstelle der Querschnittsfläche A und des Durchflusses Q formuliert. Dieser Wechsel ergibt:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} = b \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(Av)}{\partial x} = v \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial x} = vb \frac{\partial h}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.5)$$

wobei b die Breite des Gewässers in der Höhe der Wasserspiegellage darstellt und im Allgemeinen vom Wasserstand abhängig ist. Einsetzen in Gl. (2.3) ergibt:

$$b \frac{\partial h}{\partial t} + vb \frac{\partial h}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial x} = \tilde{q} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{A}{b} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tilde{q}}{b} \quad (2.7)$$

Anmerkung: In einem Rechtecksgerinne entspricht A/b genau der Wassertiefe h . Für den Impulserhalt (*Bewegungsgleichung*) stellen wir folgende Überlegungen an:

1. Als zu erhaltende Größe betrachten wir den Gesamtlängsimpuls in der Querschnittsfläche:

$$\rho \int_A v d\mathbf{x} = \rho Q$$

2. Die Druckverteilung innerhalb des Querschnittes ist hydrostatisch:

$$p = p_{atm} + (z_0 + h - z) \rho g$$

mit dem atmosphärischen Druck p_{atm} , der Lage der Sohle z_0 , der Vertikalkoordinate z und der Wassertiefe h . Entsprechend gilt für den Gesamtquerschnitt:

$$p + \rho g z = (z_0 + h) \rho g$$

$$\int_A \nabla (p + \rho g z) d\mathbf{x} = \frac{\partial (z_0 + h)}{\partial x} A \rho g = \left(-I_0 + \frac{\partial h}{\partial x} \right) A \rho g$$

mit dem Sohlneigungsgefälle $I_0 = -\partial z_0 / \partial x$.

3. Viskose Kräfte in der Längsrichtung werden vernachlässigt.
 4. Die Corioliskraft wird vernachlässigt.
 5. Für die konvektive Impulsübertragung in Längsrichtung gilt:

$$\rho \int_A v^2 d\mathbf{x} = \rho \frac{Q^2}{A} \beta$$

mit dem Ungleichförmigkeitsfaktor β , der berücksichtigt, dass die Geschwindigkeit innerhalb des Profils fluktuiert:

$$\beta = 1 + \frac{A}{Q^2} \int_A \left(v(\mathbf{x}) - \frac{Q}{A} \right)^2 d\mathbf{x}$$

6. Schließlich tritt als wesentlicher Senkenterm die Sohlschubspannung τ_0 auf. Die Sohlschubspannung ist die Längskraft, die pro Flächeneinheit vom Fließgewässer in die Flusssohle eingetragen wird. Die mit der Kraft übertragene Energie dissipiert, weil die Sohle im Wesentlichen unbeweglich ist. Im Querschnitt wirkt die Sohlschubspannung über den benetzten Umfang U .

Damit ergibt sich folgende Bilanzgleichung für den Gesamtimpuls im Querschnitt A :

$$\underbrace{\rho \frac{\partial Q}{\partial t}}_{\text{Speicherung}} + \underbrace{\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \beta \right)}_{\text{Divergenz des konvektiven Flusses}} = \underbrace{I_0 A \rho g}_{\text{Beschleunigung durch Sohlneigung}} - \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x} A \rho g}_{\text{Beschleunigung durch Gradient der Wassertiefe}} - \underbrace{U \tau_0}_{\text{Sohlsreibung}} \quad (2.8)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \beta \right) + \frac{\partial h}{\partial x} A g = I_0 A g - U \frac{\tau_0}{\rho}} \quad (2.9)$$

Die mittlere Geschwindigkeit Q/A wird mit \bar{v} bezeichnet. Dann ergibt Einsetzen der Kontinuitätsgleichung, Gl. (2.3):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial (\bar{v} A)}{\partial t} = \bar{v} \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \bar{v} \bar{q} - \bar{v} \frac{\partial Q}{\partial x} + A \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \beta \right) = \frac{\partial (Q \bar{v} \beta)}{\partial x} = \bar{v} \beta \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial (\bar{v} \beta)}{\partial x} \quad (2.11)$$

Für $\beta \approx 1$, ergibt sich damit nach Einsetzen in Gl. (2.9):

$$A \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} A \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x_1} A g = I_0 A g - U \frac{\tau_0}{\rho} - \bar{v} \tilde{q} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x_1} g = I_0 g - \frac{\tau_0}{r_{hy} \rho} - \frac{\bar{v} \tilde{q}}{A} \quad (2.13)$$

mit dem *hydraulischen Radius* $r_{hy} = A/U$. Üblicherweise wird der Reibungsterm in Form eines Reibungsgefälles I_R ausgedrückt:

$$I_R = \frac{\tau_0}{g r_{hy} \rho} \quad (2.14)$$

Dann lautet die Bewegungsgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} g = (I_0 - I_R) g - \frac{\bar{v} \tilde{q}}{A}} \quad (2.15)$$

Anmerkung: Die Bewegungsgleichung in Flüssen entspricht im Wesentlichen der Euler-Gleichung (Navier-Stokes ohne viskose Terme) mit einem Beschleunigungsterm, der sich aus der Neigung der Wasseroberfläche ergibt, und einem Reibungsterm, der sich aus der Haftbedingung an der Gewässersohle ergibt.

Das System der Kontinuitäts- und Bewegungsgleichungen, Gln. (2.3 & 2.9), wird als *St. Venant Gleichungen* bezeichnet.

Der konvektive Beschleunigungsterm in der ausdifferenzierten Form lässt sich als halbe räumliche Ableitung der Geschwindigkeit zum Quadrat ausdrücken:

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{v}^2}{2} \right) \quad (2.16)$$

Damit können die räumlichen Ableitungen auf der rechten Seite sowie das Sohlgefälle wie folgt zusammengefasst werden:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial H_E}{\partial x} g = -I_R g - \frac{\bar{v} \tilde{q}}{A} \quad (2.17)$$

mit der Energiehöhe H_E :

$$H_E = \frac{\bar{v}^2}{2g} + h + z_0 \quad (2.18)$$

Die Energiehöhe fasst die mechanischen Energieformen (kinetische Energie, potenzielle Energie, Druck) in einer einzelnen Größe zusammen. Der im Wasserbau übliche Bezug auf eine Höhe ist insofern praktisch, als dass der Anteil aus der Wasserspiegellage direkt messbar ist. Die Größe $\bar{v}^2/(2g)$ wird als Geschwindigkeitshöhe bezeichnet, die Summe $\bar{v}^2/(2g) + h$ als spezifische Energiehöhe H_0 . Abb. 2.2 veranschaulicht die Definition der diversen Höhen.

2.1.1 Reibungsansätze

Für die Bestimmung des Reibungsgefälles werden im Wesentlichen zwei Ansätze verwendet. Die Gleichung nach *Darcy-Weisbach* beruht auf dem dimensionslosen Reibungsbeiwert λ :

$$I_R = \frac{\lambda \bar{v}^2}{8g r_{hy}} \quad (2.19)$$

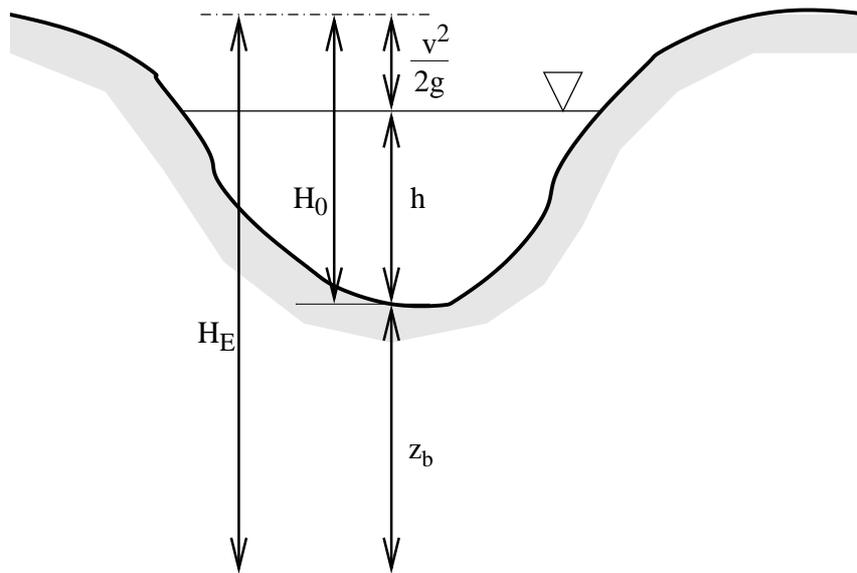


Abbildung 2.2: Definition der verwendeten Höhen.

Tabelle 2.1: Typische Werte für die Reibungskoeffizienten nach Stricker, k_{st} , und Manning, n .

Sohlmaterial	k_{st} [$m^{1/3}/s$]	n [$s/m^{1/3}$]
Künstliche Kanäle		
Beton	83	0.012
Kiessohle mit Wand aus		
Beton	50	0.020
gefugtes Mauerwerk mit glatten Steinen	43	0.023
grob gehauenes Mauerwerk	30	0.033
Natürliche Gerinne		
glatte Sohle, geradlinig	25-40	0.025-0.040
glatte Sohle, mäandrierend	20-33	0.030-0.050
verkrautet, mit Becken, mäandrierend	20	0.050
Bergbach mit Blockwerk	10-25	0.040-0.100
Starker Bewuchs, Unterholz	5-20	0.050-0.200

Der Ansatz von *Darcy-Weisbach* wird vornehmlich in der Rohrhydraulik verwendet. In der Gerinnehydraulik ist der empirische Ansatz von *Gauckler-Manning-Strickler* gebräuchlicher:

$$I_R = \frac{\bar{v}^2}{k_{st}^2 r_{hy}^{\frac{4}{3}}} = \frac{\bar{v}^2 n^2}{r_{hy}^{\frac{4}{3}}} \quad (2.20)$$

Je größer der *Strickler*-Beiwert k_{st} [$m^{1/3}/s$] ist, desto glatter ist die Gewässersohle. Der Kehrwert des *Strickler*-Beiwertes k_{st} wird als *Manning*-Beiwert n bezeichnet, er wird überwiegend in der englischsprachigen Literatur verwendet. Typische Werte für die Reibungskoeffizienten sind in Tabelle 2.1 angegeben.

Die Variabilität der Koeffizienten in Tabelle 2.1, insbesondere für natürliche Gerinne, verdeutlicht, dass die Reibungsbeiwert im Einzelfall kalibriert werden müssen. Typischerweise ergibt sich eine größere Rauigkeit (n größer, k_{st} kleiner) für niedrigeren Abfluss.

2.1.2 Strömender und schießender Abfluss

Wir betrachten nun den Fall, dass die spezifische Energiehöhe H_0 und der Abfluss Q bekannt sind. Welche Abflusstiefe h stellt sich ein? Um dies zu berechnen, benötigen wir die Definition der spezifische Energiehöhe H_0 :

$$H_0 = \frac{\bar{v}^2}{2g} + h = \frac{Q^2}{2gA^2} + h \quad (2.21)$$

$$\Rightarrow Q^2 = A^2 2g (H_0 - h) \quad (2.22)$$

Für den Fall eines Rechteckgerinnes, $A = hb$, ergibt sich:

$$Q = bh\sqrt{2g(H_0 - h)} \quad (2.23)$$

oder in dimensionsloser Form:

$$Q_* = h_*\sqrt{2 - 2h_*} \quad (2.24)$$

mit

$$Q_* = \frac{Q}{bH_0\sqrt{gH_0}}, h_* = \frac{h}{H_0} \quad (2.25)$$

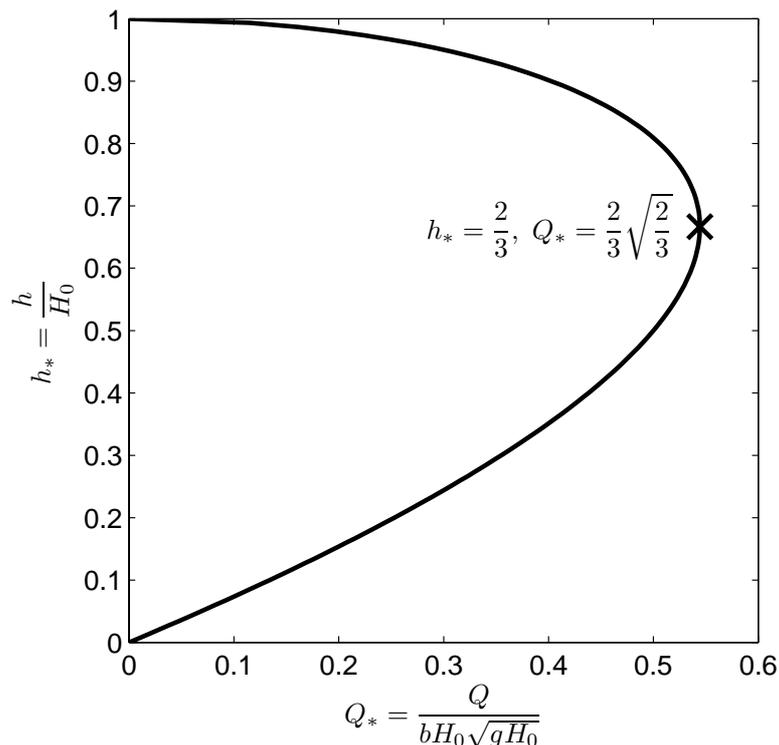


Abbildung 2.3: Abflusstiefe h als Funktion des Abflusses Q bei vorgegebener spezifischer Energiehöhe H_0 in einem Rechteckgerinne.

Abb. 2.3 zeigt den Graph der Funktion $h_*(Q_*)$. Offensichtlich ist der Zusammenhang nicht eindeutig. Es gibt mit der Ausnahme eines bestimmten Abflusses zwei Lösungen. Die beiden Lösungen gehören zu zwei grundsätzlich verschiedenen Abflussregimen, die damit zusammenhängen ob ein Rückstau besteht oder nicht. Wie in Abschnitt 2.1.5 hergeleitet wird,

ist die maßgebliche Größe hierzu die dimensionslose *Froude-Zahl* Fr , die das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Gravitationskräften beschreibt:

$$Fr = \sqrt{\frac{\bar{v}^2 b}{Ag}} = \sqrt{\frac{Q^2 b}{gA^3}} \quad (2.26)$$

Es kann gezeigt werden, dass der Zusammenhang zwischen Abflusstiefe und Abfluss nur für die kritische Froude-Zahl mit dem Wert eins eindeutig ist. Dieses Abflussregime wird *Grenzabfluss* genannt. Für die Regime mit kleineren und größeren Froude-Zahlen gilt:

$Fr < 1$: **Strömender Abfluss** In diesem Abflussregime ist die Wasserspiegellage an einem bestimmten Punkt sowohl vom oberstromigen als auch vom unterstromigen Wasserstand abhängig. Das heißt, es besteht Rückstau. Die Wassertiefen sind deshalb hoch und die Geschwindigkeiten niedrig. Dies ist das typische Abflussverhalten in Gerinnen mit sogenanntem mildem Gefälle ("normaler" Fluss).

$Fr > 1$: **Schießender Abfluss** In diesem Abflussregime ist die Wasserspiegellage an einem bestimmten Punkt ausschließlich vom oberstromigen Wasserstand abhängig. Es besteht kein Rückstau. Im Vergleich zum strömenden Abfluss sind die Wassertiefen niedrig und die Geschwindigkeiten hoch. Dies ist das typische Abflussverhalten in Gerinnen mit steilem Gefälle (z.B. steiler Gebirgsbach), bei starken Verengungen (Venturi) oder im Ausfluss eines Schützes.

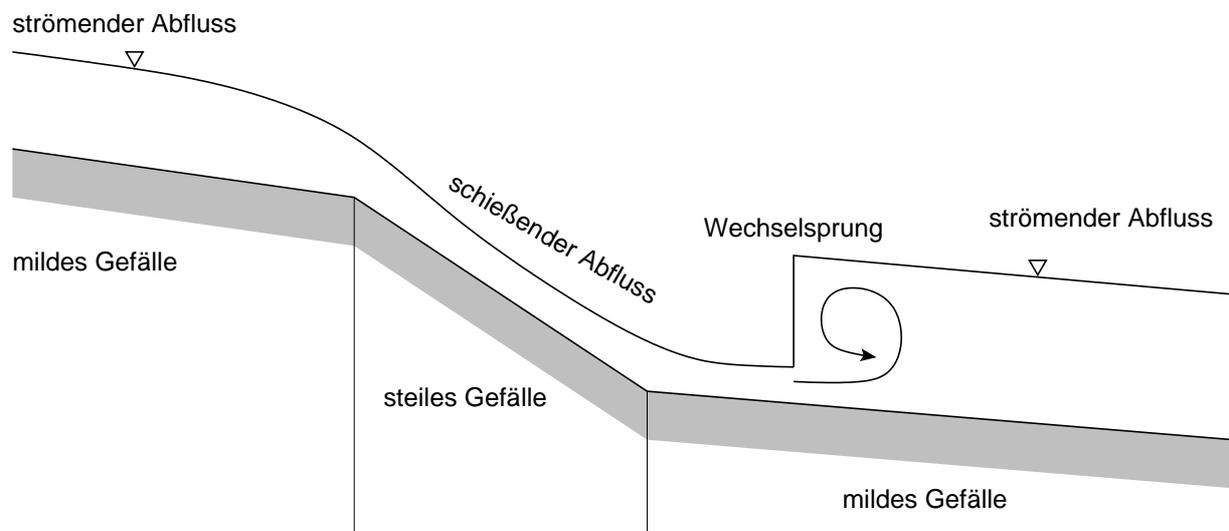


Abbildung 2.4: Kontinuierlicher Übergang von strömendem zu schießendem Abfluss bei steiler werdendem Gefälle sowie Wechselsprung bei Übergang von schließendem zu strömendem Abfluss.

Wie in Abbildung 2.4 veranschaulicht wird, ist im Längsprofil der Übergang von strömendem zu schießendem Abfluss (steiler werdendes Gefälle) kontinuierlich. Der Übergang von schließendem zu strömendem Abfluss hingegen erfolgt abrupt in einem sogenannten *Wechselsprung*. Wechselsprünge können z.B. unterhalb von Schützen und Rampen gut beobachtet werden: Auf der Rampe stellt sich eine schließende Strömung ein; das Gefälle unterhalb der Rampe ist jedoch mild; der Übergang im Wechselsprung ist abrupt und mit einer Wasserwalze quer zur

Strömung verbunden. Hier wird lokal Energie dissipiert. Wehre, Rampen, Schütze und ähnliche Bauwerke zur Wasserregulierung sehen deshalb im Bereich des Wechselsprunges ein sogenannten Tosbecken mit einer befestigten Sohle vor. Hochwasserentlastungsanlagen von Staubecken bestehen typischerweise aus einer sogenannten Schussrinne (steile Rinne seitlich des Damms mit schießender Strömung) und einem Tosbecken, in dem die kinetische Energie umgewandelt wird.

2.1.3 Stationärer Abfluss

Wir betrachten nun den stationären Zustand, der sich bei gleichbleibenden Randbedingungen nach einer hinreichend langen Zeit einstellt. Im stationären Zustand betragen alle zeitlichen Ableitungen null. Für die Kontinuitätsgleichung, Gl. (2.3), bedeutet dies:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \tilde{q} \quad (2.27)$$

$$\Rightarrow \boxed{Q(x) = Q_0 + \int_0^x \tilde{q}(\xi) d\xi} \quad (2.28)$$

Das heißt, der Durchfluss ist bei vernachlässigbaren lateralen Zuflüssen konstant. Für die Bewegungsgleichung, Gl. (2.9), ergibt sich für $\beta \approx 1$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \frac{\partial h}{\partial x} Ag = (I_0 - I_R) Ag \quad (2.29)$$

Umformungen des ersten Terms ergeben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) &= Q^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{A} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial Q^2}{\partial x} \\ &= -\frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{2Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} \\ &= -\bar{v}^2 b \frac{\partial h}{\partial x} + 2\bar{v} \tilde{q} \end{aligned}$$

sodass die Bewegungsgleichung wie folgt formuliert werden kann:

$$\begin{aligned} (Ag - \bar{v}^2 b) \frac{\partial h}{\partial x} &= -2\bar{v} \tilde{q} + (I_0 - I_R) Ag \\ \left(1 - \frac{\bar{v}^2 b}{Ag} \right) \frac{\partial h}{\partial x} &= -\frac{2\bar{v}}{Ag} \tilde{q} + I_0 - I_R \end{aligned} \quad (2.30)$$

Unter Verwendung der Froude-Zahl wird aus der stationären Bewegungsgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{I_0 - I_R - \frac{2Q}{A^2 g} \tilde{q}}{(1 - Fr^2)}} \quad (2.31)$$

die zur Berechnung der Wasserspiegellage räumlich integriert werden muss.

Im Fall eines Rechteckgerinnes ($A = hb$) ohne laterale Zuflüsse ($\tilde{q} = 0$) ergibt sich:

$$\boxed{\begin{aligned} Q(x) &= Q_0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{I_0 - I_R}{(1 - Fr^2)} \\ Fr &= \frac{\bar{v}}{\sqrt{hg}} \end{aligned}} \quad (2.32)$$

Normalabfluss

Der *Normalabfluss* beschreibt den Zustand, bei dem das Reibungsgefälle genau dem Sohlgefälle entspricht, $I_0 = I_R$. Für den Fall eines gleichförmigen Profils und einer Strömung ohne laterale Zuflüsse, $\tilde{q} = 0$, entspricht der Normalabfluss dem Fall einer gleichförmigen Strömung, d.h., weder der Durchfluss Q noch die Abflusstiefe h hängt vom Ort ab. Der Normalabfluss stellt sich in einem Gerinne bei gleichbleibenden Bedingungen nach einer ausreichend langen Fließstrecke unabhängig von den Randbedingungen am Zu- und Abfluss ein. Unter Verwendung des Reibungsansatzes nach Gauckler-Manning-Strickler ergibt sich folgende Beziehung:

$$I_0 = I_R = \frac{n^2 \bar{v}^2}{r_{hy}^{\frac{4}{3}}} \quad (2.33)$$

Für ein Rechteckgerinne ($Q = \bar{v}hb$) mit sehr großer Breite ($r_{hy} \approx h$) können wir also die Abhängigkeit der Wassertiefe h vom Durchfluss Q bei Normabfluss wie folgt errechnen:

$$h \approx \left(\frac{nQ}{b\sqrt{I_0}} \right)^{\frac{3}{5}} \quad (2.34)$$

Für nichtrechteckige Profile und für schmaler Gerinne ist ein iteratives Verfahren zur Berechnung der Normabflusstiefe notwendig.

Staukurvenberechnung

Mit einer Staukurve wird die stationäre Wasserspiegellage in einem Fluss oberhalb eines Bauwerkes bezeichnet. Im Folgenden gehen wir von strömendem Abfluss aus. Am Bauwerk wird entweder die Wasserspiegelage auf eine feste Höhe eingeregelt, oder es handelt sich um einen Übergang von strömenden zu schießendem Abfluss. Im letztgenannten Fall wäre die Froude-Zahl am Bauwerk eins. In beiden Fällen übt die Randbedingung am Bauwerk bei strömendem Abfluss einen Einfluss auf die oberstromige Wasserspiegellage aus. Wir unterteilen den zu betrachtenden Flussabschnitt in viele kleine Abschnitte mit Länge Δx und führen die Berechnung stückweise durch:

1. Berechnung des Durchflusses Q durch stückweise Integration des lateralen Zuflusses von oberstrom nach unterstrom:

$$Q(x + \Delta x) = Q(x) + \tilde{q}\Delta x \quad (2.35)$$

2. Berechnung der Wassertiefe h durch stückweise Integration von unterstrom nach oberstrom:

- (a) Berechnung der Querschnittsfläche A , der Geschwindigkeit \bar{v} , des Reibungsgefälles I_R und der Froude-Zahl Fr für die bereits berechnete Abflusstiefe $h(x)$:
- (b) Berechnung der Abflusstiefe $h(x - \Delta x)$ durch Integration von Gl. (2.31) unter Annahme des Gradientens an der Stelle x :

$$h(x - \Delta x) = h(x) - \frac{I_0 - I_R - \frac{2Q}{A^2g}\tilde{q}}{(1 - Fr^2)} \Bigg|_x \Delta x \quad (2.36)$$

Zur Vereinfachung haben wir den Term $(I_0 - I_R - 2Q\tilde{q}/(A^2g)) / ((1 - Fr^2))$ jeweils an der Stelle x ausgewertet, wo die Wasserspiegellage bereits bekannt ist. Bei aufwändigeren Verfahren erfolgt die Auswertung am Mittelpunkt des zu betrachtenden Abschnittes. Dann ist eine iterative Berechnung notwendig.

2.1.4 Flachwasserwellen in stehenden Gewässern

Wir betrachten ein Rechteckgerinne mit ebenem Grund. Dann lauten die *Saint Venant* Gleichungen bei reibungsfreier Betrachtung ohne laterale Zuflüsse:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial(hv)}{\partial x} \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -g\frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.38)$$

Wir unterteilen nun die Geschwindigkeit in einen mittleren Anteil \bar{v} und eine Fluktuation v' , wobei wir von einem stehenden Gewässer ausgehen (mittlere Geschwindigkeit $\bar{v} = 0$). Ebenso wird die Wassertiefe in einen mittleren, konstanten Anteil \bar{h} und eine Fluktuation h' unterteilt:

$$v = \bar{v} + v' \quad (2.39)$$

$$\bar{v} = 0 \quad (2.40)$$

$$h = \bar{h} + h' \quad (2.41)$$

Da die Fluktuationen klein sind, vernachlässigen wir im Weiteren Produkte von Fluktuationen. Hieraus ergibt sich:

$$v\frac{\partial v}{\partial x} = v'\frac{\partial v'}{\partial x} \approx 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial(vh)}{\partial c} = v'\frac{\partial h'}{\partial x} + \bar{h}\frac{\partial v'}{\partial x} + h'\frac{\partial v'}{\partial x} \approx \bar{h}\frac{\partial v'}{\partial x} \quad (2.43)$$

Damit lauten die linearisierten *Saint Venant* Gleichungen:

$$\frac{\partial h'}{\partial t} = -\bar{h}\frac{\partial v'}{\partial x} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -g\frac{\partial h'}{\partial x} \quad (2.45)$$

Wir leiten Gl. (2.44) nach dem Ort und Gl. (2.45) nach der Zeit ab:

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t \partial x} = -\bar{h}\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} = -g\frac{\partial^2 h'}{\partial t \partial x} \quad (2.47)$$

und setzen Gl. (2.46) in Gl. (2.47) ein:

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} = g\bar{h}\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} \quad (2.48)$$

Gl. (2.48) beschreibt einen harmonischen Schwinger, der mit folgendem generellen Ansatz gelöst werden kann:

$$v'(x, t) = v'_{\max} \sin(\omega t + \lambda x + \varphi) \quad (2.49)$$

Hierbei sind v'_{\max} die Amplitude, ω und λ eine zeitliche und räumliche Frequenz und φ der Phasenwinkel. Die zeitlichen und räumlichen zweiten Ableitungen lauten:

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} = -v'_{\max} \omega^2 \sin(\omega t + \lambda x + \varphi) \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = -v'_{\max} \lambda^2 \sin(\omega t + \lambda x + \varphi) \quad (2.51)$$

Der Vergleich mit Gl. (2.48) ergibt, dass das Verhältnis aus ω und λ vom System bestimmt ist. Es handelt sich hierbei um die Ausbreitungsgeschwindigkeit c einer Oberflächenwelle:

$$c \equiv \frac{\omega}{\lambda} = \sqrt{g\bar{h}} \quad (2.52)$$

Für nicht-rechteckige Profile verändert sich die Definition der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Oberflächenwelle c zu:

$$c = \sqrt{\frac{gA}{b}} \quad (2.53)$$

Die Geschwindigkeitsfluktuationen lassen sich nun mit der folgenden trigonometrischen Funktion beschreiben.

$$v'(x, t) = v'_{\max} \sin\left(\lambda \left(\sqrt{g\bar{h}}t + x\right) + \varphi\right) \quad (2.54)$$

Hierbei ergeben sich die räumliche Frequenz λ und der Phasenwinkel aus weiteren Randbedingungen. So werden in einem geschlossenen Becken, alle harmonischen Schwingungen gedämpft, deren Wellenlänge nicht ein Vielfaches der doppelten Beckenlänge entspricht. Dies ist darin begründet, dass am Beckenrand die Geschwindigkeit immer null betragen muss. Wellen, die einen Geschwindigkeitsknoten am Rand haben, werden damit bevorzugt (Resonanzfrequenz).

2.1.5 Charakteristische Form der *Saint Venant* Gleichungen

Die *Saint Venant* Gleichungen stellen ein gekoppeltes System hyperbolischer Differentialgleichungen dar. Für diesen Typ von partiellen Differentialgleichungen lassen sich Linien im Zeit-Raum-Kontinuum definieren, längs derer aus den partiellen Differentialgleichungen gewöhnliche Differentialgleichungen werden. Diese Linien werden als *Charakteristiken* bezeichnet. Charakteristiken ermöglichen es, den Einfluss der Zustandsgrößen an einem bestimmten Punkt zu einer bestimmten Zeit auf benachbarte Punkte zu einer späteren Zeit vorherzusagen.

Charakteristiken sind nicht notwendigerweise mit Bahnlinien identisch. Dies soll anhand des Autoverkehrs verdeutlicht werden. Abb. 2.5 verdeutlicht die Bahnlinie eines einzelnen Autos (*Lagrange'sche* Betrachtungsweise) und die Autodichte in einem Kontrollvolumen (*Euler'sche* Betrachtungsweise). In Abb. 2.6 sind die Bahnlinien von Fahrzeugen aufgezeichnet, die mit einem gleichmäßigen Abstand zueinander fahren. Ein Fahrzeug bremst und beschleunigt, sodass seine Bahnlinie im $t(x)$ -Diagramm zeitweilig steiler verläuft. Das folgende Fahrzeug bremst und beschleunigt auch, um den Abstand konstant zu halten, allerdings zeitlich verzögert. Alle weiteren Fahrzeuge müssen auch zeitweilig langsamer fahren. Das Störsignal, das aus dem Bremsen und Wiederbeschleunigen besteht, setzt sich also von Fahrzeug zu Fahrzeug fort. Es bildet eine eigenständige "Welle", die mit einer Charakteristik beschrieben werden kann. Die Charakteristik des Störsignals hat jedoch eine andere Fortpflanzungsgeschwindigkeit als die mittlere Fahrzeuggeschwindigkeit, sie kann sogar gegenläufig sein.

Euler-Betrachter: "Wie verändert sich die Auto-Dichte über die Zeit ?"

Lagrange-Betrachter: "Wohin bewegt sich ein Auto mit der Zeit ?"

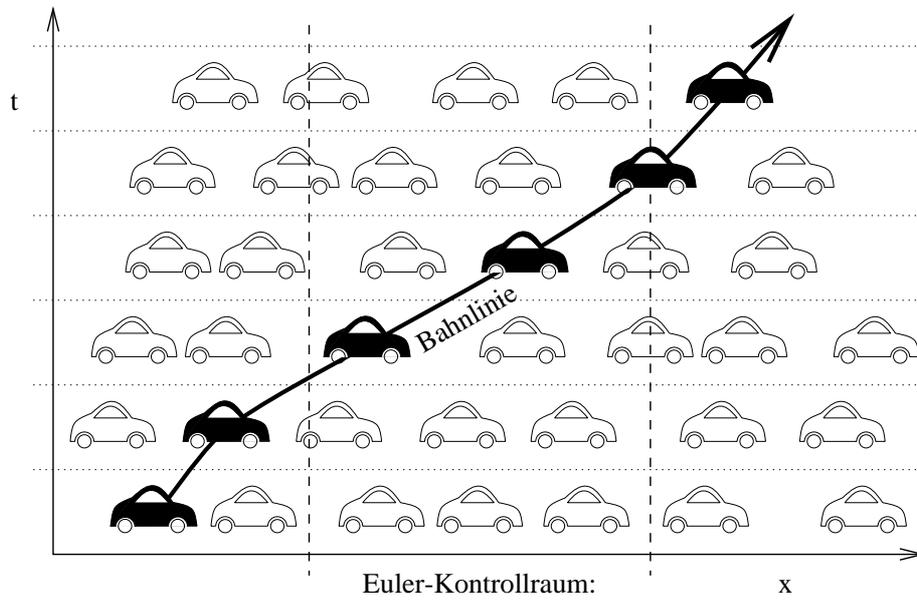


Abbildung 2.5: Verdeutlichung der *Euler*'schen und *Lagrange*'schen Betrachtungsweise am Beispiel des Autoverkehrs.

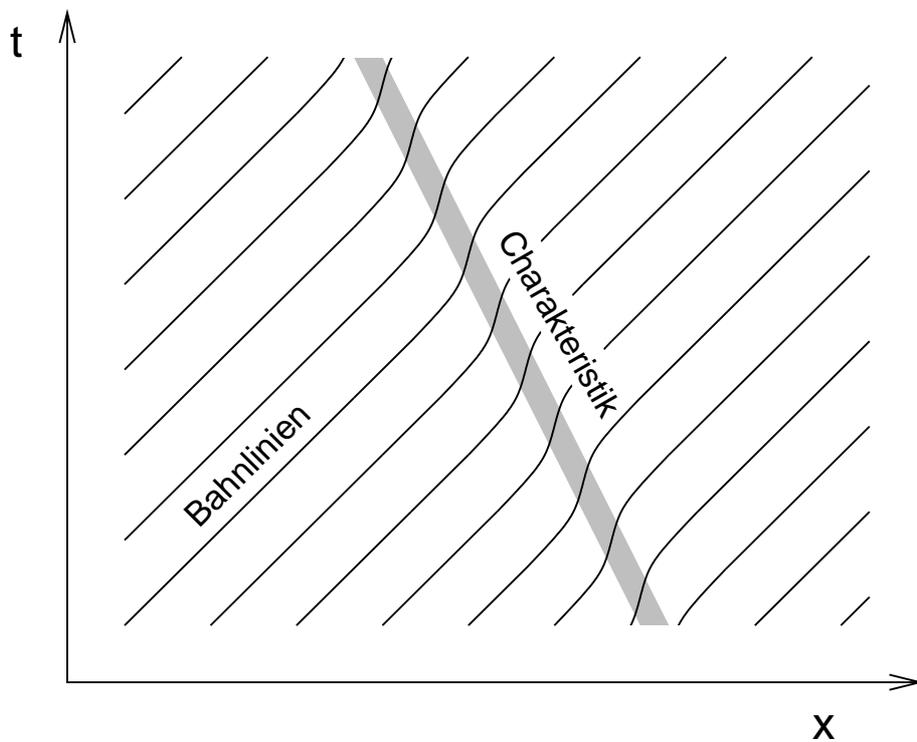


Abbildung 2.6: Charakteristik am Beispiel einer Störung im Autoverkehr

In der Strömungsmechanik treten ebenfalls Wellen auf, die sich mit einer Geschwindigkeit fortpflanzen, welche sich von der mittleren Fließgeschwindigkeit des Wassers unterscheidet. Für die *Saint Venant* Gleichungen ist die Oberflächenwelle maßgeblich, für die kompressible Gasströmung Schallwellen.

Ableitung mit Hilfe einer Variablensubstitution

Zur Herleitung der charakteristischen Form wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Oberflächenwelle c verwendet. In den *Saint Venant* Gleichungen wird die Abflusstiefe h durch c ersetzt. Hierzu müssen zunächst die partiellen Ableitungen gebildet werden:

$$A = \frac{c^2 b}{g}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial c} = \frac{2cb}{g} \quad (2.55)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial c} = \frac{\partial h}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial c} = \frac{2c}{g} \quad (2.56)$$

Diese Beziehungen werden nun in die Kontinuitätsgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{A}{b} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\tilde{q}}{b} \\ \frac{2c}{g} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{A}{b} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{2c\bar{v}}{g} \frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{\tilde{q}}{b} \\ \frac{\partial(2c)}{\partial t} + \frac{Ag}{bc} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial(2c)}{\partial x} &= \frac{\tilde{q}g}{bc} \\ \frac{\partial(2c)}{\partial t} + c \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial(2c)}{\partial x} &= \frac{c\tilde{q}}{A} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Genauso kann mit der Bewegungsgleichung vorgegangen werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} + g(I_0 - I_R) - \frac{v}{A} \tilde{q} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + c \frac{\partial(2c)}{\partial x} &= g(I_0 - I_R) - \frac{v}{A} \tilde{q} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Anstelle der Gleichungen (2.57 & 2.58) werden nun die Summe und die Differenz der beiden Gleichungen verwendet:

$$\frac{\partial(\bar{v} + 2c)}{\partial t} + (\bar{v} + c) \frac{\partial(\bar{v} + 2c)}{\partial x} = -\frac{\bar{v} - c}{A} \tilde{q} + g(I_0 - I_R) \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial(\bar{v} - 2c)}{\partial t} + (\bar{v} - c) \frac{\partial(\bar{v} - 2c)}{\partial x} = -\frac{\bar{v} + c}{A} \tilde{q} + g(I_0 - I_R) \quad (2.60)$$

Die Gleichungen (2.59 & 2.60) lassen sich mit Hilfe der Definition des vollständigen Differentials, Gl. (2.61), leicht in Gleichungen für die Charakteristiken überführen:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.61)$$

$$\boxed{\frac{d(\bar{v} + 2c)}{dt} = -\frac{\bar{v} - c}{A}\tilde{q} + g(I_0 - I_R)} \quad (2.62)$$

$$\boxed{\frac{d(\bar{v} - 2c)}{dt} = -\frac{\bar{v} + c}{A}\tilde{q} + g(I_0 - I_R)} \quad (2.63)$$

wobei für Gl. (2.62) die Charakteristik mit folgender Fortpflanzungsgeschwindigkeit beschrieben wird:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \bar{v} + c} \quad (2.64)$$

Für Gl. (2.63) wird die Charakteristik wie folgt beschrieben:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \bar{v} - c} \quad (2.65)$$

Die Charakteristik mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\bar{v} + c$ wird als p-Charakteristik (von "plus") bezeichnet, die mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\bar{v} - c$ als m-Charakteristik (von "minus").

Entlang der p- und m-Charakteristik vereinfachen sich die *Saint Venant* Gleichungen zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen Gl. (2.62 & 2.63). Allerdings ist der Verlauf der Charakteristiken im $x(t)$ -Diagramm von der Lösung dieser Differentialgleichungen abhängig.

Aus Gl. (2.64) geht hervor, dass bei der Gerinneströmung immer ein Einfluss von oberstrom zu unterstrom besteht. Entsprechend muss bei der Betrachtung eines Flussabschnittes mindestens eine Randbedingung am oberstromigen Rand angegeben werden. Aus Gl. (2.65) geht hervor, dass nur dann ein Einfluss von unterstrom nach oberstrom (Rückstau) besteht, wenn die mittlere Fließgeschwindigkeit v kleiner ist als die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Oberflächenwelle c . Für diesen Fall muss zusätzlich zur oberstromigen Randbedingung auch eine unterstromige angegeben werden (siehe Abb. 2.7(a)). Für $\bar{v} > c$ verläuft auch die zweite Charakteristik von oberstrom nach unterstrom. Deshalb müssen für diesen Fall zwei Randbedingungen am oberstromigen Rand definiert werden. Dies ist in Abb. 2.7(b) veranschaulicht.

Das Verhältnis von \bar{v} zu c ist uns bereits als *Froude-Zahl* Fr bekannt:

$$Fr = \frac{\bar{v}}{c} = \sqrt{\frac{Q^2 b}{g A^3}} \quad (2.66)$$

Dass die Größe $c = \sqrt{gA/b}$ tatsächlich die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Oberflächenwellen darstellt, lässt sich leicht durch Einsetzen von $\bar{v} = 0$ zeigen. Ohne Grundströmung setzt sich eine Störung mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von $\pm c$ im Oberflächengewässer fort.

Ableitung aufgrund einer Eigenwert-Analyse

Die Substitution der Abflusstiefe h durch die Oberflächengeschwindigkeit $c = \sqrt{gA/b}$ in Abschnitt 2.1.5 erscheint zunächst willkürlich. Man kann jedoch die charakteristische Form der *Saint Venant* Gleichungen auch auf eine Weise herleiten, bei der keine vorherige Kenntnis über eine günstige Variablensubstitution erforderlich ist. Hierzu wird das Gleichungssystem in quasi-

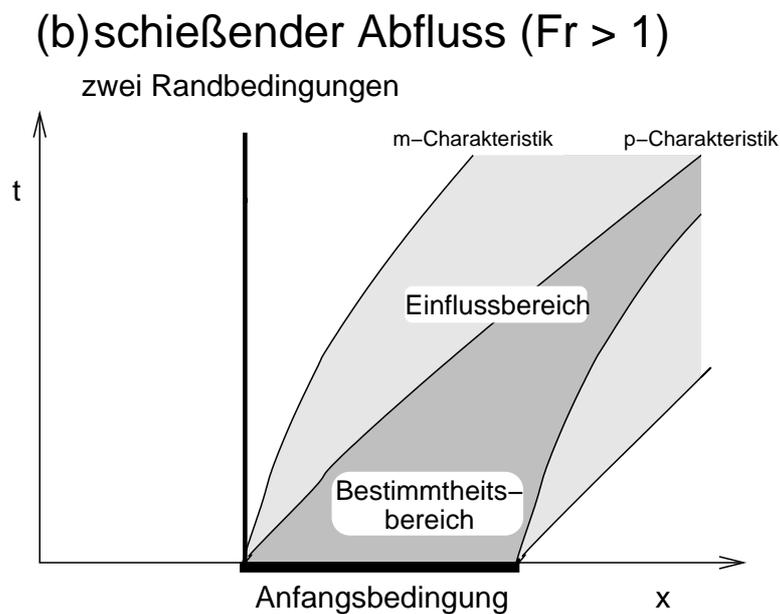
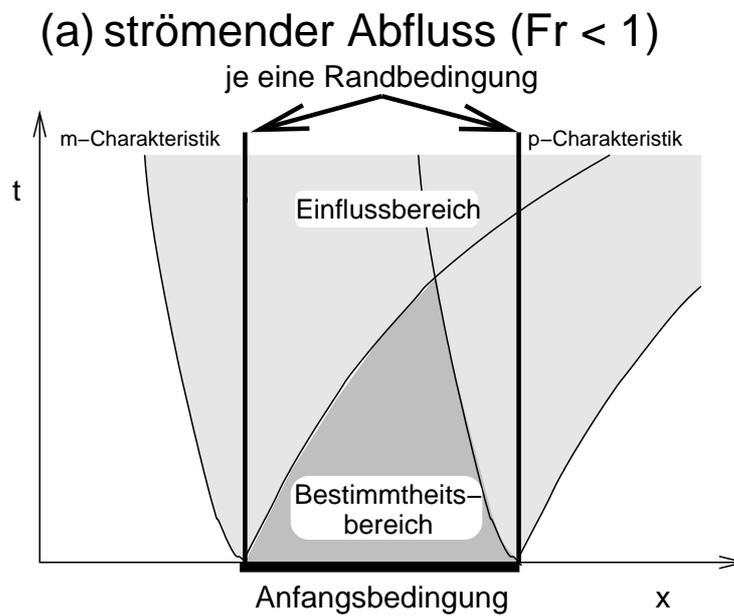


Abbildung 2.7: Verlauf der Charakteristiken, Bestimmtheits- und Einflussbereich sowie Position der Randbedingungen für die *Saint Venant* Gleichungen bei (a) strömendem und (b) schießendem Abfluss.

linearer Form in Matrix-Schreibweise aufgestellt:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{v} & A \\ g & \bar{v} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\tilde{q}}{b} \\ g(I_0 - I_R) - \frac{\bar{v}}{A} \tilde{q} \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}} \quad (2.67)$$

Die Matrix \mathbf{L} hat die Eigenwerte:

$$\lambda_1 = \bar{v} + \sqrt{g \frac{A}{b}} \quad \lambda_2 = \bar{v} - \sqrt{g \frac{A}{b}} \quad (2.68)$$

Die Eigenwerte sind offensichtlich identisch mit den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Charakteristiken. Die zugehörigen Eigenvektoren sind:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{A}{gb}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{A}{gb}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Für jede quadratische Matrix \mathbf{L} der Ordnung m mit den Eigenvektoren $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ gilt:

$$\mathbf{L} = \mathbf{E} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}^{-1} \quad (2.70)$$

mit $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m]$ und $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_i)$

Gl. (2.67) kann nun in allgemeiner Form wie folgt umgewandelt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= \mathbf{r} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{E} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= \mathbf{r} \\ \mathbf{E}^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= \mathbf{E}^{-1} \mathbf{r} \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} &= \mathbf{E}^{-1} \mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.71)$$

wobei \mathbf{w} so zu wählen ist, dass gilt:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial w_m}{\partial u_m} \end{bmatrix} = \mathbf{E}^{-1} \quad (2.72)$$

Da die Matrix $\mathbf{\Lambda}$ Diagonalgestalt hat, kann eine einzelne Zeile i in Gl. (2.71) wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = (\mathbf{E}^{-1} \mathbf{r})_i \quad (2.73)$$

und damit in die charakteristische Form überführt werden:

$$\frac{dw_i}{dt} = (\mathbf{E}^{-1}\mathbf{r})_i \quad (2.74)$$

$$\text{entlang } \frac{dx_i}{dt} = \lambda_i \quad (2.75)$$

Die Matrizen $\mathbf{\Lambda}$, \mathbf{E} , und \mathbf{E}^{-1} lauten für die *Saint Venant* Gleichungen:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \bar{v} + \sqrt{\frac{gA}{b}} & 0 \\ 0 & \bar{v} - \sqrt{\frac{gA}{b}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{A}{gb}} & -\sqrt{\frac{A}{gb}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{gb}{A}} & 1 \\ -\sqrt{\frac{gb}{A}} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (2.55) kann gezeigt werden, dass hierbei Gl. (2.72) durch folgenden Vektor erfüllt wird:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{v}}{2} + \sqrt{\frac{Ag}{b}} \\ \frac{\bar{v}}{2} - \sqrt{\frac{Ag}{b}} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Für die Transformation der rechten Seite ergibt sich:

$$\mathbf{E}^{-1}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(g(I_0 - I_R) - \left(\bar{v} - \sqrt{\frac{gA}{b}} \right) \frac{\tilde{q}}{A} \right) \\ \frac{1}{2} \left(g(I_0 - I_R) - \left(\bar{v} + \sqrt{\frac{gA}{b}} \right) \frac{\tilde{q}}{A} \right) \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Setzt man Gln. (2.76, 2.77 & 2.78) in Gl. (2.71) ein ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(\bar{v}/2 + c)}{\partial t} \\ \frac{\partial(\bar{v}/2 - c)}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{v} + c & 0 \\ 0 & \bar{v} - c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\bar{v}/2 + c)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\bar{v}/2 - c)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(-\frac{\bar{v} - c}{A} \tilde{q} + g(I_0 - I_R) \right) \\ \frac{1}{2} \left(-\frac{\bar{v} + c}{A} \tilde{q} + g(I_0 - I_R) \right) \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

was identisch zu Gln. (2.59 & 2.60) ist.

2.1.6 Vereinfachungen der *Saint Venant* Gleichungen

Bei der numerische Lösung der *Saint Venant*-Gleichungen führt insbesondere die konvektive Beschleunigung zu Stabilitätsproblemen. Wenn bei der Strömungsberechnung die Kontinuitätsgleichung, Gl. (2.80), und alle Terme der Bewegungsgleichung berücksichtigt werden, spricht man von einer *hydrodynamischen Welle*. Da sich die beiden Beschleunigungsterme gegenseitig fast aufheben, führt ihre Vernachlässigung nur zur kleinen Fehlern. Diese Vereinfachung wird als *Diffusionswelle* bezeichnet. Bei der *kinematischen Welle* wird zusätzlich der Druckgradient vernachlässigt. In allen Fällen bleibt die Kontinuitätsgleichung Gl. (2.80) un-

verändert:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\bar{v} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{A}{b} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\tilde{q}}{b} \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\bar{v}}{A} \tilde{q} + g \frac{\partial h}{\partial x} \underbrace{-g(I_0 - I_R)}_{\text{kinematische Welle}} = 0 \quad (2.81)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\bar{v}}{A} \tilde{q}}_{\text{Diffusionswelle}} + \underbrace{g \frac{\partial h}{\partial x} - g(I_0 - I_R)}_{\text{hydrodynamische Welle}} = 0$$

Kinematische Welle

Die Vereinfachung der Bewegungsgleichung zu $I_0 = I_R$ (Normalabfluss) führt zu einer eindeutigen Beziehung zwischen der Abflusstiefe h und der mittleren Geschwindigkeit v . Dies kann anhand des Reibungsansatzes von *Darcy-Weisbach* veranschaulicht werden:

$$I_0 = I_R = \frac{\lambda \bar{v}^2}{8gr_{hy}} \\ \Rightarrow \bar{v} = \sqrt{\frac{8I_0gr_{hy}}{\lambda}} \quad (2.82)$$

Nach Gl. (2.82) ist die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} eine nichtlineare Funktion des hydraulischen Radius r_{hy} und damit der Abflusstiefe h . Es besteht jedoch keine Abhängigkeit zum räumlichen Gradienten der Abflusstiefe $\partial h/\partial x$. Damit ist es möglich, die Geschwindigkeit \bar{v} in der Kontinuitätsgleichung durch den algebraischen Ausdruck aus Gl. (2.82) zu ersetzen:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\bar{v} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{A}{b} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r_{hy}} \frac{\partial r_{hy}}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\tilde{q}}{b} \quad (2.83)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} = - \underbrace{\left(\frac{A}{b} \sqrt{\frac{2I_0g}{\lambda r_{hy}}} \frac{\partial r_{hy}}{\partial h} + \sqrt{\frac{8I_0gr_{hy}}{\lambda}} \right)}_{v_{kw}} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\tilde{q}}{b} \quad (2.84)$$

Für Fälle ohne diffusen lateralen Wasserzutritt beschreibt Gl. (2.84) eine reine Translation. Die Abflusstiefe h setzt sich mit der Geschwindigkeit v_{kw} im Fließgewässer fort. v_{kw} ist größer als die mittlere Fließgeschwindigkeit \bar{v} und hängt über den hydraulischen Radius r_{hy} von der Abflusstiefe h ab. Das heißt, eine hohe Abflusstiefe h wird schneller fortgepflanzt als eine niedrige.

Für sehr breite Gerinne können folgende Vereinfachungen vorgenommen werden:

$$\frac{A}{b} \approx h \\ U \approx b \quad (2.85)$$

$$r_{hy} = \frac{A}{U} \approx h$$

$$\Rightarrow v_{kw} \approx \frac{3}{2} \bar{v} \quad (2.86)$$

Das heißt, die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit beträgt ungefähr das Anderthalbfache der mittleren Fließgeschwindigkeit. Für den Reibungsansatz nach *Gauckler-Manning-Strickler* ergibt sich:

$$v_{kw} \approx \frac{5}{3} \bar{v} \quad (2.87)$$

Diffusionswelle

Bei dem Diffusionswellenansatz wird in der Bewegungsgleichung zusätzlich zum Sohlgefälle und der Reibung auch der Druckgradient berücksichtigt. Dies führt zu einer Beziehung zwischen Abflusstiefe und mittlerer Geschwindigkeit, die neben der lokalen Abflusstiefe h auch den räumlichen Gradienten $\partial h/\partial x$ beinhaltet. Unter Verwendung des Reibungsansatzes von *Darcy-Weisbach* lautet diese Beziehung:

$$I_R = I_0 - \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\lambda \bar{v}^2}{8gr_{hy}}$$

$$\Rightarrow \bar{v} = \sqrt{\frac{8gr_{hy} \left(I_0 - \frac{\partial h}{\partial x} \right)}{\lambda}} \quad (2.88)$$

Aus Gl. (2.88) ergibt sich die hysteretische Wasserstands-Abfluss-Beziehung (Pegelkurve) für eine Hochwasserwelle. Bei auflaufendem Wasser ($\frac{\partial h}{\partial x} < 0$) wird bei gleicher Abflusstiefe mehr Wasser abgeführt als bei ablaufendem Wasser ($\frac{\partial h}{\partial x} > 0$). Dies wird in Abb. 2.8 veranschaulicht. Die durch Rückstau verursachte Hysterese bewirkt ein Retentionsvermögen des Fließgewässers: Die maximale Abflusstiefe einer Hochwasserwelle ist an einem unterstromigen Pegel niedriger als an einem oberstromigen, das Hochwasser hält jedoch auch länger an.

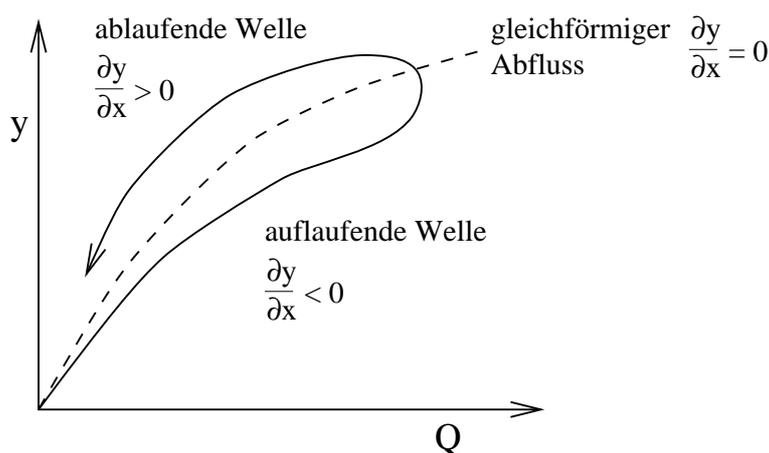


Abbildung 2.8: Hysteretische Abflusstiefe-Abfluss-Beziehung für den Diffusionswellenansatz.

Aus Gl. (2.88) läßt sich die partielle Ableitung der mittleren Geschwindigkeit v nach dem

hydraulischen Radius r_{hy} ermitteln:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial r_{hy}} = \frac{\left(I_0 - \frac{\partial h}{\partial x}\right) \frac{8g}{\lambda}}{2\sqrt{\left(I_0 - \frac{\partial h}{\partial x}\right) \frac{8gr_{hy}}{\lambda}}} = \frac{\left(I_0 - \frac{\partial h}{\partial x}\right) \frac{8g}{\lambda}}{2\bar{v}} = \frac{\left(I_0 - \frac{\partial h}{\partial x}\right) \frac{8gr_{hy}}{\lambda}}{2\bar{v}r_{hy}} = \frac{\bar{v}}{2r_{hy}} \quad (2.89)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial (\partial h / \partial x)} = -\frac{\frac{8gr_{hy}}{\lambda}}{2\sqrt{\left(I_0 - \frac{\partial h}{\partial x}\right) \frac{8gr_{hy}}{\lambda}}} = -\frac{8gr_{hy}}{2\bar{v}\lambda} = -\frac{\bar{v}}{2\left(I_0 - \frac{\partial h}{\partial x}\right)} \quad (2.90)$$

Gl. (2.89) kann nun wie im Fall der kinematischen Welle in die Kontinuitätsgleichung eingesetzt werden:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\bar{v} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{A}{b} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r_{hy}} \frac{\partial r_{hy}}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{A}{b} \frac{\partial \bar{v}}{\partial (\partial h / \partial x)} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\tilde{q}}{b} \quad (2.91)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} = -\underbrace{\left(\bar{v} + \frac{A}{b} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r_{hy}} \frac{\partial r_{hy}}{\partial h}\right)}_{v_{dw}} \frac{\partial h}{\partial x} + \underbrace{\left(-\frac{A}{b} \frac{\partial \bar{v}}{\partial (\partial h / \partial x)}\right)}_{D^*} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\tilde{q}}{b} \quad (2.92)$$

mit

$$v_{dw} = \bar{v} \left(1 + \frac{A}{b} \frac{1}{2r_{hy}} \frac{\partial r_{hy}}{\partial h}\right) \quad (2.93)$$

$$D^* = \frac{A}{b} \frac{\bar{v}}{2\left(I_0 - \frac{\partial h}{\partial x}\right)} \quad (2.94)$$

Gl. (2.92) ist formal äquivalent zur Advektions-Dispersions-Gleichung mit dem Quellen-/Senkenterm \tilde{q}/b , der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_{dw} und dem Dispersionskoeffizienten D^* . Allerdings hängen diese Koeffizienten wiederum nichtlinear von der betrachteten Zustandsgröße, der Abflusstiefe h , ab.

Für den Fall, dass das Sohlgefälle sehr viel größer ist als der Druckgradient ($I_0 \gg \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|$), können die Koeffizienten v_{dw} und D^* wie folgt vereinfacht werden:

$$v_{dw} \approx v_{kw} \quad (2.95)$$

$$D^* \approx \frac{A}{b} \frac{\bar{v}}{2I_0} \frac{\partial r_{hy}}{\partial h} \quad (2.96)$$

Für sehr breite Gerinne können wiederum folgende Vereinfachungen vorgenommen werden:

$$\frac{A}{b} \approx h$$

$$r_{hy} = \frac{A}{U} \approx h$$

Tabelle 2.2: Parameter für den Vergleich der vereinfachten Ansätze für die *Saint-Venant*-Gleichungen

Streckenlänge	$L = 10000 \text{ m}$
Profilform	Rechteck
Breite	$b = 10$
Strickler-Koeffizient	$k_{st} = 40 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$
Sohlgefälle	$I_0 = 0.002$
Oberstromige Randbedingung	vorgegebener Zufluss
Unterstromige Randbedingung	Normalabfluss
Basisabfluss	$Q_B = 25 \text{ m}^3/\text{s}$
Form der Eingangswelle	Pearson-III-Verteilung
Fußpunkt der Welle	$t_0 = 0 \text{ s}$
Schwerpunktzeit	$t_M = 10 \text{ min}$
Variationskoeffizient	$\sigma_{rel} = 0.5$
Fülle der Welle	$V_{welle} = 25000 \text{ m}^3$
Räumliche Diskretisierung	$\Delta x = 10 \text{ m}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} v_{dw} &\approx v_{kw} \approx \frac{3}{2} \bar{v} \\ D^* &\approx \frac{h \bar{v}}{2I_0} \end{aligned} \quad (2.97)$$

Die Verwendung der Näherungsansätze von Gl. (2.97) vereinfacht die zu lösende partielle Differentialgleichung. Sie sind jedoch nur auf sehr breite, nahezu rechteckige Gerinne mit schwachem Druckgradienten anwendbar.

Vergleich der Ansätze

Sowohl die kinematische Welle als auch die Diffusionswelle weisen gegenüber der vollständigen hydrodynamischen Welle den Vorteil auf, dass nur eine partielle Differentialgleichung für die Abflusstiefe h zu lösen ist. Bei der hydrodynamischen Welle sind zwei gekoppelte partielle Differentialgleichungen für die Abflusstiefe h und die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} zu lösen.

Beim Ansatz der *kinematischen Welle* wird die Abflusstiefe lediglich mit einer vom Wert der Abflusstiefe abhängigen Geschwindigkeit verfrachtet. Verformungen der Welle ergeben sich ausschließlich aus der Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Abflusstiefe. Es wird eine eindeutige Beziehung zwischen Abflusstiefe und mittlerer Geschwindigkeit angenommen.

Beim Ansatz der *Diffusionswelle* wird die Abflusstiefe nicht nur verfrachtet, sondern auch räumlich verschmiert. Damit wird die Retentionswirkung des Fließgewässers berücksichtigt. Die Beziehung zwischen Abflusstiefe und mittlerer Geschwindigkeit ist hysteretisch ("Abflussschleife").

Bei der *hydrodynamischen Welle* werden zusätzlich die Beschleunigungsglieder in der Bewegungsgleichung berücksichtigt. Wie groß sind die Fehler, die sich aus ihrer Vernachlässigung im Diffusionswellenansatz ergeben?

Hierzu soll eine Beispielwelle betrachtet werden, deren Parameter in Tabelle 2.2 aufgelistet sind. Abb. 2.9 zeigt den zeitlichen Verlauf der Glieder der Bewegungsgleichung für die Beispielwelle 100 m unterstrom des Kanalansfangs. Die beiden Beschleunigungsglieder heben sich gegenseitig beinahe auf. Dies erklärt, warum mit dem Diffusionswellenansatz eine gute Näherung an die Lösung der vollständigen *Saint Venant*-Gleichungen erreicht werden kann.

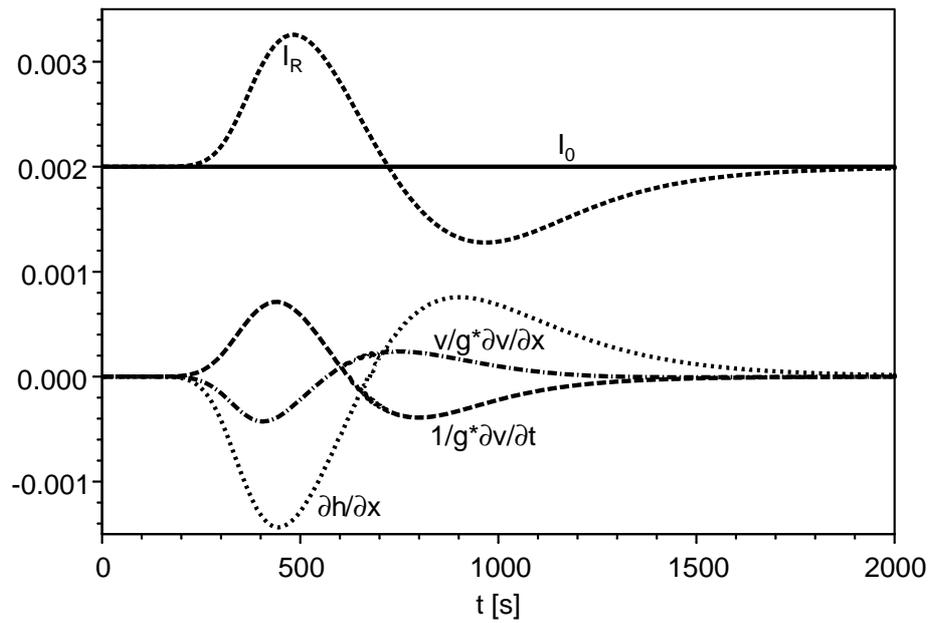


Abbildung 2.9: Zeitlicher Verlauf der Terme der Bewegungsgleichung 100 m nach Kanalanschluss.

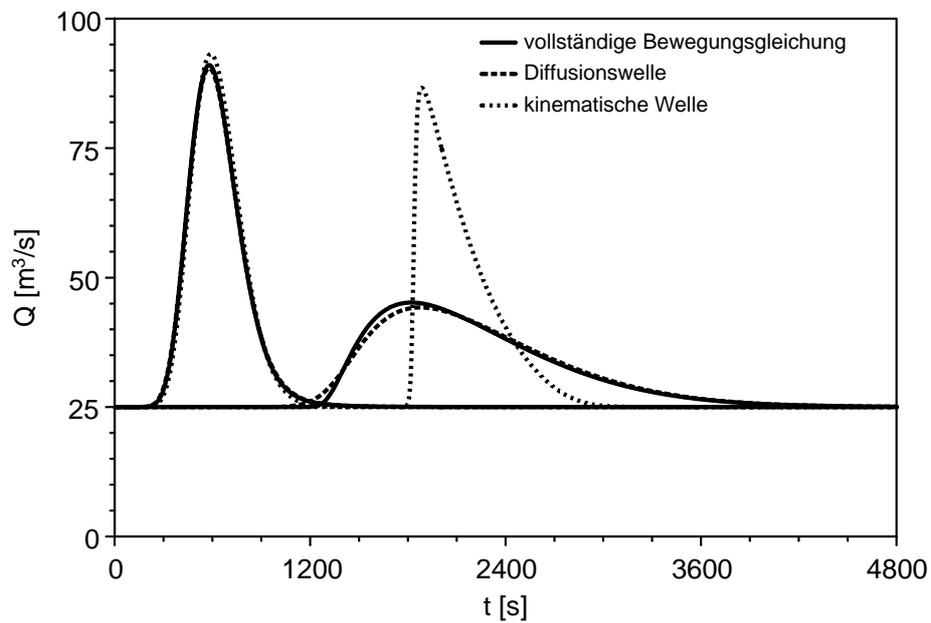


Abbildung 2.10: Abflussganglinie für die Beispielwelle 100 m und 5000 m nach Kanalanschluss unter Verwendung verschiedener Vereinfachungen der Bewegungsgleichung.

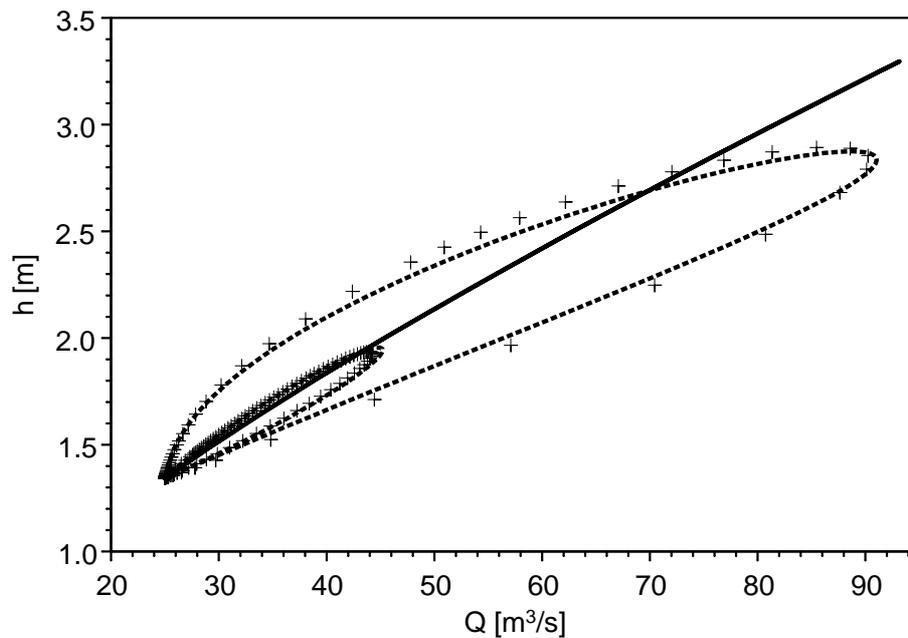


Abbildung 2.11: Schlüsselkurven für die Beispielwelle 100 m und 5000 m nach Kanalanschluss unter Verwendung verschiedener Vereinfachungen der Bewegungsgleichung. Gestrichelte Linie: vollständige Bewegungsgleichung, Kreuze: Diffusionswelle, durchgezogene Linie: kinematische Welle.

Aus Abb. 2.9 wird auch deutlich, daß die Vernachlässigung des Druckgradienten zu einer signifikanten Verfälschung führen muss.

In Abb. 2.10 sind die Abflussganglinien unter Verwendung der unterschiedlichen Ansätze aufgeführt. Die Verwendung der Diffusionswelle führt bei den gegebenen Parametern zu fast identischen Ergebnissen wie die vollständige hydrodynamische Welle. Im Gegensatz dazu weichen die Ergebnisse der kinematischen Welle deutlich von denen der anderen Ansätze ab. Die hydrodynamische Welle wird durch die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Abflusstiefe steiler. Dies widerspricht nicht nur dem Verlauf unter der Berücksichtigung der Retentionswirkung, es führt auch zu zusätzlichen numerischen Schwierigkeiten.

2.1.7 Rand- und Anfangsbedingungen

Die *Saint Venant*-Gleichungen sind ein System gekoppelter partieller Differentialgleichungen, deren Lösung für instationäre Fragestellungen eine Anfangsbedingung für alle Zustandsgrößen im gesamten Untersuchungsgebiet sowie Randbedingungen an den Gebietsrändern erfordert. Für stationäre Fragestellungen sind ausschließlich Randbedingungen erforderlich.

Klassifizierung von Randbedingungen

In der Mathematik werden Randbedingungen von partiellen Differentialgleichungen danach klassifiziert, ob der Wert der betrachteten Zustandsgröße u selbst, ihre erste Ableitung, eine Kombination aus beiden oder ihre zweite Ableitung am Rand vorgegeben ist. Für gekoppelte Differentialgleichungen mehrerer Zustandsgrößen u_i kann auch ein funktionaler Zusammenhang zwischen den einzelnen Zustandsgrößen angegeben werden.

Tabelle 2.3: Mathematische Klassifizierung von Randbedingungen (R.B.) für die Zustandsgröße u .

R.B. erster Art	<i>Dirichlet</i> -R.B.	Zustandsgröße u vorgegeben
R.B. zweiter Art	<i>Neumann</i> -R.B.	Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}$ vorgegeben
R.B. dritter Art	<i>Cauchy</i> -R.B.	Kombination $au + b\frac{\partial u}{\partial x}$ vorgegeben
	freie R.B.	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
spezielle R.B. für mehrere Zustandsgrößen		$u_i = f(u_j)$

Typische Randbedingungen für die *Saint Venant*-Gleichungen

Randbedingungen bei strömendem Abfluss Die oberstromige Randbedingung besteht typischerweise aus der *Dirichlet*-Randbedingung eines Durchflusses. Für die unterstromige Randbedingung wird typischerweise eine Abflusstiefe definiert. Hierzu bestehen folgende Möglichkeiten:

- ein fester Wert für die Abflusstiefe (z.B. bei Bauwerken mit konstantem Stauziel),
- Normalabflusstiefe (, wenn unterstrom keine Kontrollbauwerke liegen),
- Grenzabflusstiefe, d.h. $Fr = 1$ (z.B. bei Wehren),
- eine feste Beziehung zwischen Abflusstiefe und Abfluss (z.B. an einer Pegelstation).

Anmerkung Bei Verwendung des kinematischen Wellenansatzes entfällt die explizite Angabe einer unterstromigen Randbedingung. Sie ist jedoch implizit durch die Vereinfachung der Bewegungsgleichung vorgegeben, nämlich als Normalabflusstiefe ($I_R = I_0$).

Randbedingungen bei schießendem Abfluss Bei schießendem Abfluss müssen sowohl der Durchfluss als auch die Abflusstiefe am oberstromigen Rand definiert werden. Wenn weiter oberstrom aber außerhalb des Modellgebiets strömender Abfluss besteht, stellt die Grenzabflusstiefe eine sinnvolle Wahl dar.

Wie beim strömenden Abfluss entfällt bei der Wahl des kinematischen Wellenansatzes die direkte Angabe der zweiten, in diesem Fall oberstromigen, Randbedingung. Sie ist wiederum implizit als Normalabflusstiefe vorgegeben.

Typische Anfangsbedingungen

Als Anfangsbedingungen könnten theoretisch beliebige räumliche Verteilungen der betrachteten Zustandsgrößen eingesetzt werden. Es empfiehlt sich jedoch, konsistente Anfangsbedingungen zu wählen. Hierzu ist es gebräuchlich, die stationäre Lösung bei den Anfangsrandbedingungen zu wählen.

Für die Anfangs- und die Randbedingungen gilt, dass sie einen starken Einfluss auf die Lösung haben. Insbesondere bei unregulierten Bächen und Flüssen empfiehlt es sich deshalb, das Berechnungsgebiet größer zu wählen als das eigentliche Untersuchungsgebiet und die Berechnung zu einem früheren Zeitpunkt zu starten als dem eigentlichen Untersuchungszeitraum.

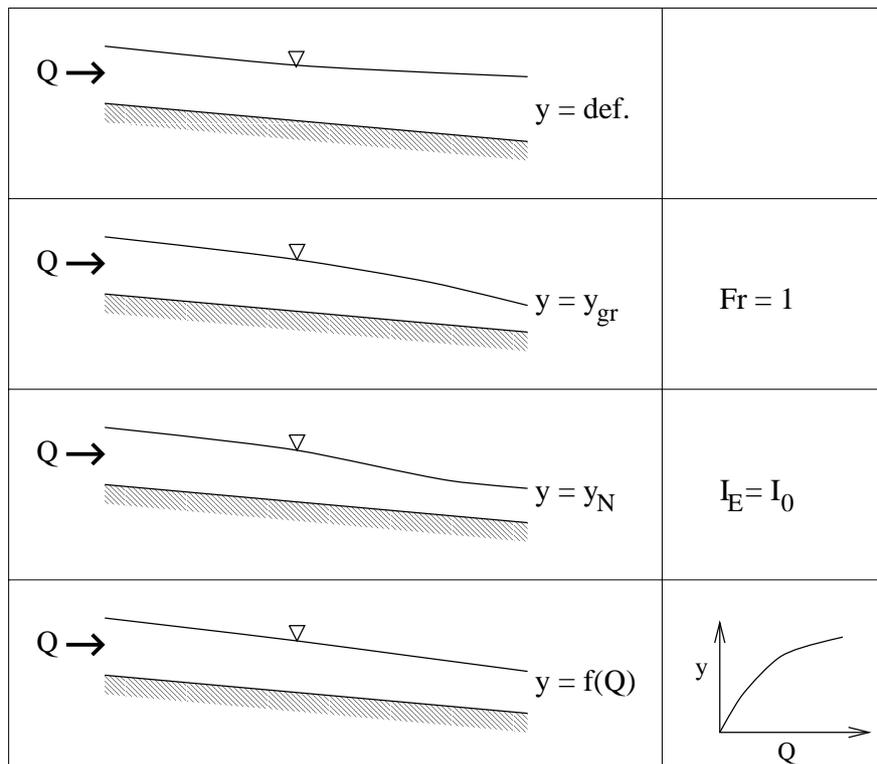


Abbildung 2.12: Saint Venant-Gleichungen bei strömendem Abfluss.

Durch Variation der Rand- und Anfangsbedingungen kann überprüft werden, wie stark sie sich auf die Lösung auswirken. Bei ausreichend großen Gebieten und langen Zeitabschnitten nimmt der Einfluss der Rand- und Anfangsbedingungen ab.

2.2 Stofftransport in Flüssen

Wir betrachten jetzt wieder einen Flussabschnitt als Kontrollvolumen (siehe Abb. 2.1). Die zu erhaltende Größe in einem infinitesimal kurzen Flussabschnitt ist die Masse eines gelösten Stoffes im Querschnitt:

$$A\bar{c} = \int_A c dA = A\bar{c} \quad (2.98)$$

wobei \bar{c} [ML⁻³] die mittlere Konzentration im Querschnitt darstellt.

Wir vernachlässigen diffusive und turbulent-diffusiv Massenflüsse und beschränken den zu betrachtenden Gesamtmassenstrom auf die advective Komponente:

$$A\bar{f} = \int_A cv dA = \int_A (\bar{c} + c')(\bar{v} + v') dA = A(\bar{c}\bar{v} + \overline{c'v'}) \quad (2.99)$$

Der Term $\bar{c}\bar{v}A = \bar{c}Q$ [MT⁻¹] ist der advective Gesamtmassenstrom, der sich aus der mittleren Konzentration und dem Abfluss ergibt. Die Fluktuationen der Konzentrationen c' und der Geschwindigkeit v' über den Querschnitt können miteinander korrelieren, sodass der Term $\overline{c'v'}$ im Allgemeinen ungleich null ist.

Anmerkung: Hier betrachten wir NICHT turbulente Schwankungen der Geschwindigkeit und der Konzentration, sondern Abweichungen der über die Turbulenz bereits gemittelten Konzentration und Geschwindigkeit vom Querschnittsmittel. So hat die Geschwindigkeit einen klaren Trend mit der Tiefe: Direkt am Grund besteht die Haftbedingung ($v = 0$), wohingegen an der Wasseroberfläche die Maximalgeschwindigkeit erreicht wird. Dazwischen besteht ein \pm logarithmisches Geschwindigkeitsprofil. Diesem Trend überlagert sind zusätzliche turbulente Schwankungen.

Bei einer eindimensionalen Betrachtung ist es grundsätzlich nicht möglich, Variationen über den Querschnitt explizit zu berücksichtigen. Als Parametrisierung gehen wir davon aus, dass sich der Massenfluss $\overline{c'v'}$ durch ein Dispersionsgesetz beschreiben lässt, in dem der Massenfluss proportional zum negativen Längsgradienten der Konzentration ist, und die Proportionalitätskonstante als Dispersionskoeffizient bezeichnet wird:

$$\overline{c'v'} \approx -D \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (2.100)$$

Damit ergibt sich für den Gesamtmassenstrom:

$$A\bar{f} = A \left(\bar{c}\bar{v} - D \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) \quad (2.101)$$

Als längenbezogenen Quell/Senkenterm betrachten wir eine Reaktionsrate r [T^{-1}], die mit der Querschnittsfläche A zu multiplizieren ist, sowie Quell/Senkenterme infolge eines lateralen Wasseraustausches

$$\tilde{s} = Ar + c_*\tilde{q} \quad (2.102)$$

mit

$$c_* = \begin{cases} c_{in} & \text{wenn } \tilde{q} > 0 \\ \bar{c} & \text{wenn } \tilde{q} < 0 \end{cases}$$

Hierbei ist c_{in} die Konzentration im lateral zufließenden Wasser. Einsetzen in die allgemeine Erhaltungsgleichung, Gl. (2.2), ergibt:

$$\boxed{\frac{\partial (\bar{c}A)}{\partial t} + \frac{\partial (Q\bar{c})}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(AD \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) = Ar + c_*\tilde{q}} \quad (2.103)$$

Gl. (2.103) ist als Advektions-Dispersionsgleichung bekannt. Wir differenzieren jetzt die ersten beiden Terme aus und berücksichtigen die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial (\bar{c}A)}{\partial t} = \bar{c} \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \bar{c}\tilde{q} - \bar{c} \frac{\partial Q}{\partial x} + A \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} \quad (2.104)$$

$$\frac{\partial (Q\bar{c})}{\partial x} = \bar{c} \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (2.105)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial (\bar{c}A)}{\partial t} + \frac{\partial (Q\bar{c})}{\partial x} = A \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{c}\tilde{q} + Q \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (2.106)$$

und berücksichtigen die Definition der Konzentration c_* im zu- bzw. abfließenden Wasser. Dann ergibt sich:

$$A \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + Q \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(AD \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) = Ar + (c_{in} - \bar{c})\tilde{q}_{in} \quad (2.107)$$

Gl. (2.103) beinhaltet die Divergenz des advektiven Massenstroms, in Gl. (2.107) erscheint anstatt dessen das Produkt aus Abfluss und Konzentrationsgradient. Hierzu musste die Kontinuitätsgleichung, Gl. (2.3), berücksichtigt werden. Es ergibt sich, dass sich die Konzentration durch laterale Abflüsse nicht verändert. Bei lateralen Zuflüssen ist entscheidend, ob das zufließende Wasser eine Konzentration c_{in} mitbringt, die größer oder kleiner als die Konzentration c im Fluss selber ist.

Im Allgemeinen wird der Gradient des über den Querschnitt integrierten Dispersionskoeffizienten vernachlässigt:

$$\frac{\partial}{\partial x} (AD) \approx 0 \quad (2.108)$$

Dann kann die Advektions-Dispersionsgleichung für einen Fluss wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} = r + (c_{in} - \bar{c}) \frac{\tilde{q}_{in}}{A} \quad (2.109)$$

2.2.1 Dispersion in einem Fluss

Die Dispersion in einem Fluss ergibt sich daraus, dass die Geschwindigkeit in der Nähe der Sohle sehr viel geringer ist als die Geschwindigkeit an der Wasseroberfläche. Wenn ein Stoffpuls gleichmäßig über die gesamte Querschnittsfläche zugegeben wird, wird der Stoff an der Oberfläche schneller transportiert als am Grund. Über den Querschnitt gemittelt, dehnt sich der Puls in Längsrichtung stark aus. Gleichzeitig ergibt sich ein starker Konzentrationsgradient zwischen Sohle und Oberfläche bzw. Ufer und Gerinnemitte. Der turbulente Austausch baut diesen Gradienten ab. Je stärker die Turbulenz ist, umso gleichförmiger ist die Konzentrationsverteilung über den Querschnitt. Als Maß für die Entwicklung der Turbulenz kann die Sohl Schubspannung τ_0 verwendet werden. Sie kann in die Sohl Schubspannungsgeschwindigkeit v_* umgerechnet werden:

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{I_{RThyd} g} \quad (2.110)$$

Es gelten folgende grundsätzliche Abhängigkeiten:

- Je größer v_* , desto schneller kann die turbulente Vermischung Konzentrationsunterschiede im Querschnitt ausgleichen.
- Je höher die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} , desto stärker die Geschwindigkeitsunterschiede im Profil und umso stärker wird der Stoffpuls auseinandergezogen.
- Der turbulente Austausch in der Vertikalen erfolgt sehr viel schneller als in der Horizontalen. Je breiter das Gerinne ist, desto länger braucht die Turbulenz, um Konzentrationsgradienten auszugleichen.

Folgende halb-empirische Gleichung für den Längsdispersionskoeffizienten in einem Fluss bei eindimensionaler Beschreibung des Stofftransports hat sich bewährt [Fischer 1967, Fischer et al. 1979]:

$$D = c_f \frac{b^2 \bar{v}^2}{v_* h} \quad (2.111)$$

$$c_f \approx 0.011 \quad (2.112)$$

Bei kurzen Fließabständen gilt dieser Ansatz nicht, hier ist eine mehrdimensionale Betrachtung des Stofftransportes nötig. Um den angegebenen Dispersionskoeffizienten zu erreichen, muss eine Mindeststrecke zurückgelegt werden, die als *advective Periode* bezeichnet wird. Fischer et al. [1979] geben hierfür folgende Abschätzung an:

$$x > 4 \frac{b\bar{v}^2}{v_* h} \quad (2.113)$$

2.2.2 Analytische Lösungen der 1D Advektions-Dispersionsgleichung

Für einfache Bedingungen lassen sich analytische Lösungen der Transportgleichung, Gl. (2.109), angeben. Insbesondere ist vorauszusetzen, dass sich die Koeffizienten v und D weder im Raum noch in der Zeit ändern.

Stationärer Stofftransport

Zunächst betrachten wir den stationären Stofftransport, wie er sich bei unendlich lang andauernder Stoffeinleitung in einer Fließgewässer ergibt. Ein idealer Tracer würde ausschließlich durch laterale Zuflüsse verdünnt. Deshalb betrachten wir Stoffe, für die wir näherungsweise einen linearen Abbau (z.B. infolge mikrobieller Aktivität) annehmen können. An einem Anfangspunkt $x = 0$, kennen wir die Konzentration c_0 .

Abbau erster Ordnung Das Abbaugesetz erster Ordnung lautet:

$$r = -\lambda c \quad (2.114)$$

mit dem Zerfallskoeffizienten λ [T^{-1}]. Dann ergibt sich im stationären Zustand folgende Differentialgleichung mit Randbedingungen:

$$v \frac{\partial c}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \lambda c = 0 \quad (2.115)$$

$$c(0) = c_0 \quad (2.116)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = 0 \quad (2.117)$$

Die zweite Randbedingung besagt, dass die Konzentration im Unendlichen gegen null geht. Sie wäre für rein advetiven Transport, $D = 0$, nicht notwendig. Wie durch Trennung der Variablen leicht zu zeigen ist, entspricht die Lösung für $D = 0$ der Exponentialfunktion mit negativem Argument. Für den advektiv-dispersiven Fall, $D > 0$, verwenden wir denselben Ansatz:

$$c(x) = c_0 \exp(-\alpha x) \quad (2.118)$$

ohne jedoch den Koeffizienten α [L^{-1}] bereits zu kennen. Differentiation ergibt:

$$\frac{\partial c}{\partial x} = -\alpha c_0 \exp(-\alpha x) = -\alpha c \quad (2.119)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \alpha^2 c \quad (2.120)$$

Einsetzen in Gl. (2.115) ergibt:

$$-D\alpha^2 c - v\alpha c + \lambda c = 0 \quad (2.121)$$

$$\Rightarrow -D\alpha^2 - v\alpha + \lambda = 0 \quad (2.122)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 4\lambda D}}{2D} \quad (2.123)$$

Um die zweite Randbedingung zu erfüllen, muss α positiv sein. Entsprechend ergibt sich:

$$\alpha = \frac{\sqrt{v^2 + 4\lambda D} - v}{2D} = \frac{2\lambda}{\sqrt{v^2 + 4\lambda D} + v} \quad (2.124)$$

wobei die zweite Identität hergeleitet werden kann, indem man Nenner und Zähler mit $\sqrt{v^2 + 4\lambda D} + v$ erweitert. Damit wird der Grenzfall des rein advektiven Transports mit linearem Zerfall wiedergegeben:

$$\lim_{D \rightarrow 0} \alpha = \frac{\lambda}{v} \quad (2.125)$$

Große Dispersionskoeffizienten bewirken im Vergleich zum advektiven Fall eine langsamere Abnahme der Konzentration mit dem Fließweg.

Die vollständige Lösung lautet also:

$$c(x) = c_0 \exp\left(-\frac{2\lambda x}{\sqrt{v^2 + 4\lambda D} + v}\right) \quad (2.126)$$

Abbau erster Ordnung plus gleichförmiger Eintrag Wir erweitern jetzt die Reaktionsrate um einen Term nullter Ordnung:

$$r = -\lambda c + r_0 \quad (2.127)$$

Dies entspräche einem gleichförmigen Eintrag über die gesamte Länge des Flusses. Eine solche Reaktionsrate könnte einem grob vereinfachten Modell des Sauerstoffs entsprechen, bei dem die Produktion durch Photosynthese unabhängig von der Konzentration ist und der Abbau durch Respiration zumindest in einem bestimmten Konzentrationsbereich mit der Konzentration linear skaliert.

Für einen Stoff, der ein solches Reaktionsverhalten aufweist, kann eine Fließgleichgewichtskonzentration c_∞ angegeben werden, bei der die Nettoreaktionsrate gerade null beträgt. Diese Konzentration wird in einem Fluss im asymptotischen Limit erreicht:

$$c_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} c(x) : r(c_\infty) = 0 \quad (2.128)$$

$$\Rightarrow 0 = -\lambda c_\infty + r_0 \quad (2.129)$$

$$\Rightarrow c_\infty = \frac{r_0}{\lambda} \quad (2.130)$$

Nun betrachten wir anstelle der Konzentration selber die Abweichung c' von der Fließgleichgewichtskonzentration c_∞ :

$$c(x) = c_\infty + c'(x) \quad (2.131)$$

Damit lässt sich die Reaktionsrate wie folgt ausdrücken:

$$r = -\lambda(c_\infty + c') + r_0 = -\lambda\left(\frac{r_0}{\lambda} + c'\right) + r_0 = -\lambda c' \quad (2.132)$$

Das heißt, der Term nullter Ordnung verschwindet. Da c_∞ keine räumlichen Gradienten aufweist, können die Gradienten von c durch jene von c' ersetzt werden, und es ergibt sich eine Transportgleichung für die Abweichung c' von der Fließgleichgewichtskonzentration c_∞ , die formal identisch ist zu der Transportgleichung mit rein linearem Reaktionsterm:

$$v \frac{\partial c'}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c'}{\partial x^2} + \lambda c' = 0 \quad (2.133)$$

$$c'(0) = c_0 - c_\infty \quad (2.134)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = 0 \quad (2.135)$$

Für c' stellt Gl. (2.126) mit $c_0 - c_\infty$ statt c_0 als Faktor die analytische Lösung dar. Rücktransformation zu c ergibt:

$$c(x) = \frac{r_0}{\lambda} + \left(c_0 - \frac{r_0}{\lambda} \right) \exp \left(- \frac{2\lambda x}{\sqrt{v^2 + 4\lambda D} + v} \right) \quad (2.136)$$

Die Betrachtung der Abweichung vom Gleichgewichtszustand ist ein übliches Verfahren in der Umweltphysik. So kann man im Wärmehaushalt eines Flusses eine Gleichgewichtstemperatur errechnen, bei der die Summe aller Wärmeflüsse null beträgt (siehe Vorlesung *Hydrosphäre*). Obwohl die Abhängigkeiten in Wirklichkeit nichtlinear sind, kann für kleine Abweichungen von der Gleichgewichtstemperatur ein linearer Zusammenhang zwischen Nettofluss und Temperaturabweichung angesetzt werden. Dann ergibt sich bei einer lokalen Störung in der linearisierten Lösung ein exponentielles Angleichen an den Gleichgewichtszustand.

Instationärer Stofftransport

Pulsartige Anfangsverteilung Wir kommen nun zur Grundlösung für die eindimensionale Advektions-Dispensionsgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die Grundlösung gilt für eine Punkteinleitung in ein unendliches Gebiet. Aus ihr lassen sich Lösungen für verteilte Anfangsbedingungen oder Einleitungen ableiten. Unter Berücksichtigung eines linearen Zerfalls, betrachten wir:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = -\lambda c$$

$$\text{Anfangsbedingung} \quad c(t_0, x) = \frac{m}{A_e} \delta(x) \quad (2.137)$$

$$\text{Randbedingung} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} c(t, x) = 0$$

Hierbei ist m die Masse des Stoffes und $\delta(x)$ die Dirac-Deltafunktion, die einen Puls mit infinitesimal kleiner Ausdehnung und einem Integral von eins beschreibt. Die analytische Lösung ist eine räumliche Gaußverteilung mit dem Mittelwert $x = vt$ und der Varianz $2Dt$. Der lineare Zerfall bewirkt eine exponentielle Abnahme der Gesamtmasse mit der Zeit:

$$c(x, t) = \frac{m}{A_e} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp \left(- \frac{(x - vt)^2}{4Dt} \right) \exp(-\lambda t) \quad (2.138)$$

Konzentrationsprofile für unterschiedliche Zeitpunkte sind in Abb. 2.13 aufgetragen. Im konservativen Fall beträgt die Maximalkonzentration $m/A_e/\sqrt{4\pi Dt}$, d.h., sie nimmt mit der Zeit ab. Im reaktiven Fall ergibt sich eine weitere Abnahme durch den Zerfallsterm.

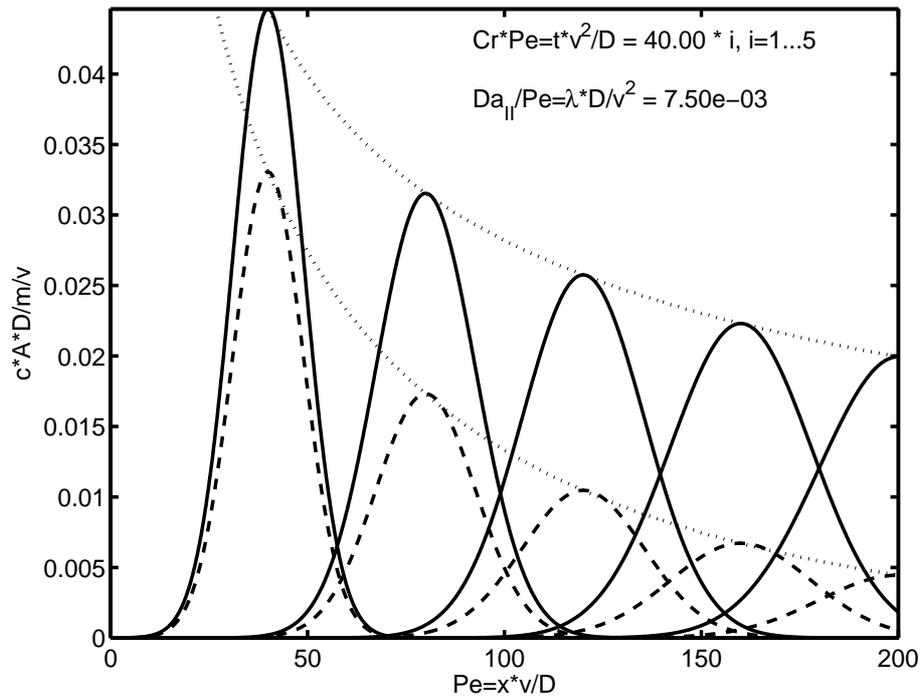


Abbildung 2.13: Konzentrationsprofile infolge einer Punkteinleitung in ein eindimensionales Gebiet. Durchgezogene Linie: konservativer Transport; gestrichelte Linie: Transport mit linearem Abbau; gepunktete Linien: Verlauf der Peakkonzentrationen.

Räumlich verteilte Anfangskonzentration Wie bereits angedeutet, kann aus der Grundlösung für die punktartige Zugabe die Lösung für beliebige Anfangsverteilungen ermittelt werden:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = -\lambda c$$

Anfangsbedingung $c(t_0, x) = c_{ini}(x)$ (2.139)

Randbedingung $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c(t, x) = 0$

Die Lösung erfolgt durch Faltung. Voraussetzung für die Zulässigkeit der Faltung ist die Linearität des Systems und seine Invarianz bezüglich Translation. Das heißt:

- Wenn die Anfangskonzentration mit einem konstanten Faktor multipliziert wird, verändert sich die Konzentration zu jedem beliebigen späteren Zeitpunkt um denselben Faktor.
- Eine Verschiebung der Anfangsverteilung führt zur gleichen Verschiebung der späteren Konzentrationsverteilung.
- Die Reaktion des Systems auf eine Zugabe an Punkt x_1 wird nicht durch die Zugabe an Punkt x_2 beeinflusst.

Unter diesen Bedingungen gilt das Prinzip der linearen Superposition. Wir können, wie in Abb. 2.14 dargestellt, die Anfangsverteilung in beliebig kleine Abschnitte unterteilen. Wenn wir die Konzentrationsverteilung infolge eines einzelnen Pulses mit Einheitsmasse kennen, können wir für jeden Puls die Systemantwort ermitteln und anschließend die Antworten auf alle Pulse addieren:

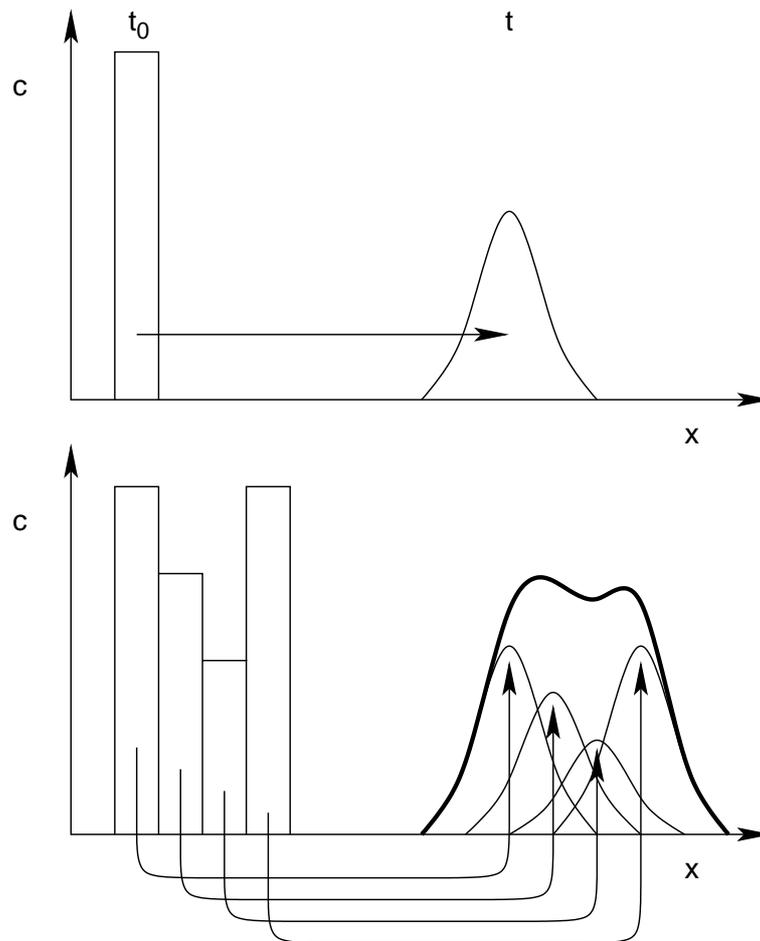


Abbildung 2.14: Prinzip der Konzentrationsermittlung durch Faltung. Oben: Systemantwort auf einen Einheitspuls. Unten: Die Ausgangsverteilung wird (unendlich fein) diskretisiert und für jeden Puls die Systemantwort ermittelt. Die Gesamtantwort ergibt sich durch Summation über alle Pulse.

$$c(x, t) = \sum_i h_{\Delta}(x - \xi_i, t) c_{ini}(\xi_i) \quad (2.140)$$

hierbei ist $h_{\Delta}(x, t)$ die Konzentrationsverteilung, die sich aus einer Anfangskonzentration in Form eines Rechteckpulses der Breite Δx mit Konzentration 1 ergibt. ξ_i beschreibt die räumliche Mittelpunktslage für den Puls i der diskretisierten Anfangsverteilung. Der Übergang auf eine infinitesimal kleine Diskretisierung führt zu:

$$c(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{\delta}(x - \xi, t) c_{ini}(\xi) d\xi \quad (2.141)$$

mit

$$h_{\delta}(x', t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x' - vt)^2}{4Dt}\right) \exp(-\lambda t) \quad (2.142)$$

Hierbei ist $h_{\delta}(x, t)$ die Systemantwort auf einen Dirac-Puls, der sich im Anfangszustand am Ursprung $x = 0$ befindet.

Als Beispiel können wir die Lösung des sogenannten *Riemann-Problems* errechnen. Für alle x -Werte kleiner null beträgt die Anfangskonzentration c_{ini} und für alle x -Werte größer null beträgt sie null:

$$\text{Anfangsbedingung } c(t_0, x) = c_{ini}H(-x) \equiv \begin{cases} c_{ini} & \text{für } x < 0 \\ \frac{c_{ini}}{2} & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (2.143)$$

Damit ergibt sich die Konzentrationsverteilung zum Zeitpunkt t :

$$\begin{aligned} c(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} c_{ini}H(-\xi) \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x-\xi-vt)^2}{4Dt}\right) \exp(-\lambda t) d\xi \\ &= c_{ini} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x-\xi-vt)^2}{4Dt}\right) d\xi \exp(-\lambda t) \\ &= \frac{c_{ini}}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x-vt}{\sqrt{4Dt}}\right) \exp(-\lambda t) \end{aligned} \quad (2.144)$$

mit der komplementären Fehlerfunktion $\operatorname{erfc}(x)$:

$$\operatorname{erfc}(x) \equiv 1 - \operatorname{erf}(x) \equiv 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi \quad (2.145)$$

Werte der Fehlerfunktion sind in mathematischen Tabellenwerken aufgelistet [Abramowitz & Stegun 1974] und in den meisten Tabellenkalkulationsprogrammen implementiert (siehe auch Tabelle 2.4). Die Konzentrationsverteilung nach Gl. (2.144) ist Abb. 2.15 für den konservativen Fall ($\lambda = 0$) aufgetragen. Es ist deutlich zu erkennen, wie die Konzentrationsfront durch die Advektion fortschreitet und dabei durch die Dispersion gespreizt wird.

Als zweites Beispiel sei eine Rechteck-Verteilung mit der Anfangsbreite w angegeben:

$$\text{Anfangsbedingung } c(t_0, x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -\frac{w}{2} \\ c_{ini} & \text{für } -\frac{w}{2} \leq x \leq \frac{w}{2} \\ 0 & \text{für } x > \frac{w}{2} \end{cases} \quad (2.146)$$

Die Faltung ergibt:

$$c(x, t) = c_{ini} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x-\xi-vt)^2}{4Dt}\right) d\xi \exp(-\lambda t) \quad (2.147)$$

$$= \frac{c_{ini}}{2} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x+\frac{w}{2}-vt}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-\frac{w}{2}-vt}{\sqrt{4Dt}}\right) \right) \exp(-\lambda t) \quad (2.148)$$

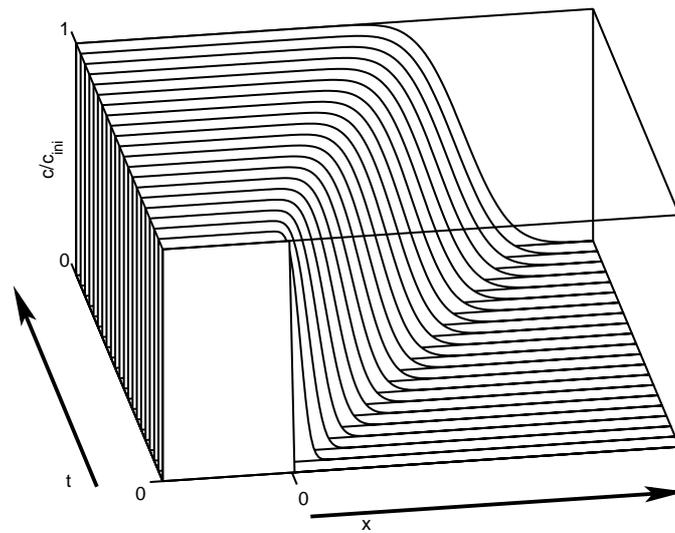


Abbildung 2.15: Konzentrationsverteilung für den advektiv-dispersiven 1-D Transport bei einer stufenartigen Anfangsverteilung (Riemann-Problem).

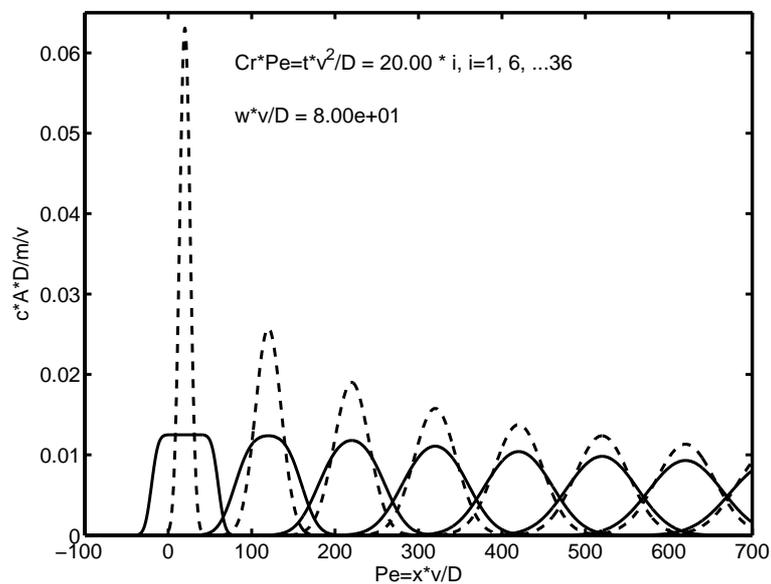


Abbildung 2.16: Konzentrationsverteilung im konservativen Transport. Durchgezogene Linie: Anfangsverteilung rechteckig; gestrichelte Linie: Anfangsverteilung Dirac-Puls.

Die Konzentrationsverteilung ist Abb. 2.16 für den konservativen Fall aufgetragen. Zum Vergleich zeigt Abb. 2.16 auch die Konzentrationsverteilung bei pulsartiger Anfangsverteilung mit gleicher Masse. Die Dispersion verschmiert die Konzentrationsverteilung, sodass die Anfangsverteilung nach einer ausreichend langen Fließzeit unbedeutend wird.

Kapitel 3

Strömung und Transport in porösen Medien

3.1 Grundbegriffe

Tabelle 3.1: Auszug aus: DIN 4044: "Hydromechanik im Wasserbau – Begriffe"

1 Begriffe ohne Zeichen				
Nr	Benennung	Erklärung (Definition)		
1.4	artesisch gespanntes Grundwasser	Wasser eines Grundwasserkörpers (1.34), dessen Grundwasserdruckfläche (1.32) oberhalb der Erdoberfläche liegt		
1.25	freies Grundwasser	Wasser eines Grundwasserkörpers (1.34), dessen Grundwasser-oberfläche (1.35) und Grundwasserdruckfläche (1.32) identisch sind		
1.29	gespanntes Grundwasser	Wasser eines Grundwasserkörpers (1.34), dessen Grundwasser-oberfläche (1.35) unter der Grundwasserdruckfläche liegt		
1.32	Grundwasser- druckfläche	Geometrischer Ort der Endpunkte aller Standrohrspiegelhöhen (2.1.35) einer Grundwasser-oberfläche (1.35)		
1.33	Grundwasserstands- gleiche, Grundwasser- isohypse	Linie gleicher Standrohrspiegelhöhen (2.1.35) einer Grundwasser- druckfläche (1.32) zum Beobachtungszeitpunkt (vergleiche Grundwassergleiche in DIN 4049 Teil 1)		
1.34	Grundwasserkörper	Grundwasservorkommen oder Teil eines solchen, das eindeutig abgegrenzt oder abgrenzbar ist		
1.35	Grundwasser- ober- fläche	obere Grenzfläche eines Grundwasserkörpers (1.34) zum Beobachtungszeitpunkt		
1.36	Grundwasser- strömung	Strömung von unterirdischem Wasser, das die Hohlräume der Erd- rinde zusammenhängend ausfüllt, unter dem ausschließlichen oder nahezu ausschließlichen Einfluss von Druck-, Schwer- und Kapillarkraft (2.3.5) des Wassers <i>Anmerkung: Für Grundwasserströmungen gilt in der Regel ($Re < 1$) das Darcy-Gesetz: $\mathbf{q} = -k_0/\kappa(\nabla p + \rho \mathbf{g})$</i>		
2 Begriffe mit Zeichen				
2.1 Geometrische Größen				
2.1.2	Grundwasser- querschnittsfläche	A_{GW}	m^2	Fläche die bei einem Schnitt durch einen Grundwasserkörper (1.34) normal zu dessen Grundwasserstromlinien entsteht
2.1.35	potentielle	h_p	m	Summe aus Druckhöhe (2.1.21) und wird fortgesetzt

Fortsetzung Tabelle 3.1				
Nr	Benennung	Zeichen	Einheit	Erklärung (Definition)
	Energiehöhe, Standrohrspiegelhöhe (piezometrische Höhe)			geodätischer Höhe (2.1.63) (Standrohrspiegelhöhe des Grundwasser, vergleiche DIN 4049 Teil 1)
2.1.55	Grundwassermächtigkeit	m_{GW}	m	Lotrechter Abstand zwischen Grundwasserunterfläche (siehe DIN 4049 Teil 1) und Grundwasseroberfläche (1.35) zum Beobachtungszeitpunkt (Zeichen h_{GW} in DIN 4049 Teil 1)
2.1.60	Grundwasserabsenkungshöhe	s_{GW}	m	Durch eine Grundwasserentnahme (siehe DIN 4049 Teil 1) hervorgerufene Verringerung der Höhe der Standrohrspiegelhöhe (2.1.35)
2.2 Kinematische Größen einschließlich Zeiten				
2.2.3	Grundwasserdurchfluss	Q_{GW}	m^3/s	Quotient aus Wasservolumen (2.1.5), das eine bestimmte Grundwasserquerschnittsfläche (2.1.2) durchfließt und der dazu benötigten Zeit
2.2.25	Abstandsgeschwindigkeit	v_a	m/s	Quotient aus der Länge eines Stromlinienabschnittes und der vom Grundwasser beim Durchfließen dieses Abschnittes benötigten Zeit: $v_a = \Delta s / \Delta t$
2.2.26	Bahngeschwindigkeit	v_b	m/s	Geschwindigkeit eines Grundwasserteilchens entlang seines tatsächlichen Weges
2.2.29	Filtergeschwindigkeit	q	m/s	Differentialquotient aus Durchfluss (2.2.1) und zugehöriger Querschnittsfläche bei porösen Medien $q = dQ/dA$
2.2.33	Porengeschwindigkeit	v_p	m/s	$v_p = q/n_f$ (siehe 2.2.29 und 2.5.21)
2.3 Dynamische Größen				
2.3.6	Sohlenwasserdruckkraft	F_{So}	kN	Durch den Sohlenwasserdruck (2.3.24) auf ein im Grundwasser stehendes Bauwerk wirkende Kraft
2.3.24	Sohlenwasserdruck	p_{So}	kN/m^2	Druck des Grundwassers auf die Sohle eines Bauwerks
2.4 Stoff- und Zustandsgrößen				
2.4.6	spezifischer Speicherkoeffizient	S_0	$1/m$	Die auf ein bestimmtes Volumen bezogene Änderung des gespeicherten Wasservolumens des Grundwasserraumes bei Änderung der Standrohrspiegelhöhe (2.1.35) um 1 m
2.4.8	Transmissivität	T_{GW}	m^2/s	Integral der Durchlässigkeit (2.4.9) über die Grundwassermächtigkeit (2.1.55) $T_{GW} = K \cdot m_{GW}$
2.4.9	Durchlässigkeit für Grundwasser, hydraulische Leitfähigkeit	K	m/s	Quotient aus Filtergeschwindigkeit (2.2.29) und zugehörigem Standrohrspiegelgefälle (2.5.9) <i>Anmerkung: Die Durchlässigkeit hängt ab von den Eigenschaften des Wassers (z.B. Dichte, Viskosität) und den Eigenschaften des Grundwasserleiters (Poren, Trennfugen)</i> $K = q/I_{St}$ (siehe 2.2.29 und 2.5.9)
2.4.10	Permeabilität	k_0	m^2	Maß für die Durchlässigkeit (2.4.9) des Untergrundes $k_0 = (\nu/g) \cdot K$ (siehe 2.4.16, 2.2.17 und 2.4.9)
2.5 Kenngrößen und Verhältnisgrößen				
2.5.9	Standrohr-	I_{St}	1	$I_{St} = dh_p/ds$

wird fortgesetzt

Fortsetzung Tabelle 3.1				
Nr	Benennung	Zeichen	Einheit	Erklärung (Definition)
	spiegelgefälle des Grundwassers			Quotient aus der Differenz der Standrohrspiegelhöhen (2.1.35) an den Endpunkten eines Stromlinienabschnittes und dessen Länge, wenn diese Länge gegen Null konvergiert
2.5.15	Speicherkoeffizient	S	1	$S = S_0 \cdot m_{GW}$ (siehe 2.4.6 und 2.1.55)

3.2 Klassifizierung des natürlichen Untergrunds

Der natürliche Untergrund wird in der Geologie als Gestein bezeichnet. Wir unterscheiden zwischen *Lockergesteinen*, die aus losen Körnern bestehen (vom Ton bis zum Blockwerk), und *Festgesteinen* (Fels), die verfestigt (konsolidiert) sind. Obwohl Lockergesteine nur einen kleinen Anteil der Erdkruste darstellen, sind sie für die wasserwirtschaftliche Nutzung besonders wichtig. Unverfestigte Sand- und Kiesablagerungen (z.B. in Flusstälern) stellen die ergiebigsten Grundwasserleiter dar.

3.2.1 Sieblinien

Lockergesteine werden primär durch ihre Korngrößenverteilung charakterisiert (Bodenart). Die Bestandteile mit einem Durchmesser $< 2 \mu\text{m}$ werden als Ton bezeichnet, die Fraktion $2 \mu\text{m} - 63 \mu\text{m}$ als Schluff, die Fraktion $63 \mu\text{m} - 2 \text{mm}$ als Sand, die Fraktion $2 \text{mm} - 6.3 \text{cm}$ als Kies und $> 6.3 \text{cm}$ als Steine und Blockwerk. Lehm besteht etwa zu gleichen Teilen aus Ton, Schluff und Sand.

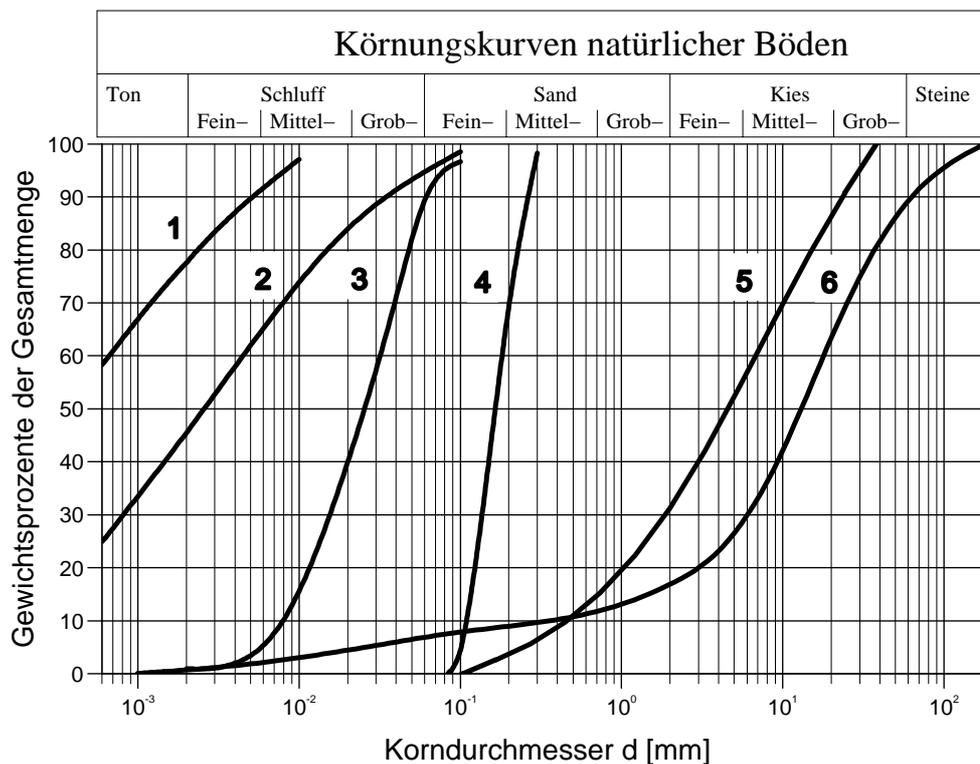


Abbildung 3.1: Korngrößenanalyse der im Text erwähnten Gesteine.

Die Gewichte der Teilfraktionen werden in % der Gesamtfraction als Summenkurve dargestellt, wobei auf der waagerechten Achse nach rechts die Logarithmen der Korndurchmesser aufgetragen werden (siehe auch DIN 18 123). Dadurch wird der Feinbereich besser erkennlich. Diese Summenkurve wird auch als Körnungskurve bezeichnet. Die Kornverteilungskurve gibt

nur die Gewichte der Teilfraktionen an, besitzt die Form der Häufigkeitskurve und wird für den prozentualen Anteil der Mineralbestandteile verwendet. In dem Bild sind die Körnungskurven von 6 natürlichen Böden gezeichnet; 1: Ton (Kleiner Belt), 2: Ton (Paris), 3: Schlufflehm (Niederösterreich), 4: Feinsand (Nordseedüne), 5: sandiger Kies (Donau bei Regensburg), 6: Lehmi-ger Kies (München).

3.2.2 Charakteristischer Korndurchmesser

Viele Fragestellungen erfordern die Definition eines "charakteristischen" Korndurchmessers, um die Eigenschaften einer Kornmatrix zu beschreiben. Da das Porenraumgefüge aber über eine sehr komplexe Geometrie verfügt, ist eine solche Festlegung nicht in einer eindeutigen Art und Weise zu treffen. In der Literatur werden unterschiedliche "charakteristische" Korndurchmesser genannt (d_{10} , d_{50} , d_{60} , d_{85}). Hierbei ist d_m die Korngröße bei $m\%$ Siebdurchgang: Z.B. d_{10} bezeichnet den Durchmesser, der von 10 Massenprozent der Körner unterschritten wird. Je nach Fragestellung bieten sich unterschiedliche Werte als "charakteristisch" an:

- Bestimmung der Durchlässigkeit:
Aus experimentellen Untersuchungen zeigt sich, dass hierfür der d_{10} ein guter Indikator ist.
- Bestimmung der kapillaren Steighöhe:
Da hierfür die kleineren Poren maßgebend sind, wird auch hierfür der d_{10} herangezogen.
- Aussagen über gemittelte Strömungseigenschaften (Reynoldszahl, REV):
Hierfür wird ein mittlerer Korndurchmesser (d_{50}) herangezogen.

In der Literatur können je nach Autor andere Festlegungen getroffen sein. Eine bessere Charakterisierung der Matrix wird durch Einbeziehung der Ungleichförmigkeitszahl U und Krümmungszahl C der Sieblinie erreicht:

$$U = \frac{d_{60}}{d_{10}}$$

$$C = \frac{(d_{30})^2}{d_{10} \cdot d_{60}}$$

Eigentlich interessieren wir uns in der Hydromechanik mehr für die Durchmesser der Hohlräume als der Körner. Da jedoch eine Bestimmung der Porendurchmesser sehr schwierig ist, verwenden wir mit dem charakteristischen Korndurchmesser d_{10} eine leicht bestimmbare Ersatzgröße.

3.2.3 Beschreibung der Hohlräume

Die Bewegung von Fluiden in Gesteinen erfolgt in den Hohlräumen. Im Fall von Lockergesteinen, stellen zumeist die *Poren*, also die Hohlräume zwischen den Körnern, den wichtigsten zusammenhängenden Hohlraumkörper dar. Diese sind in Festgesteinen häufig verfüllt. Festgesteine können jedoch aufgrund der auf sie wirkenden Kräfte brechen. Es entstehen *Klüfte*, die Fluide z.T. sehr viel besser leiten als die Poren des kompakten Felses. Handelt es sich bei dem Fels um Kalkstein (in Ausnahmefällen auch Gips), können die Klüfte durch Lösung

des Gesteins unter Einwirkung sauren Infiltrationswassers aufgeweitet werden. Die Hohlräume in diesen als *Karstgesteinen* bezeichneten Felsen können im Extremfall Ausmaße begehbarer Höhlen annehmen. Wir unterscheiden entsprechend zwischen Poren-, Kluft- und Karstgrundwasserleitern (siehe Tabelle 3.2). Bestimmte Festgesteine, z.B. Sandsteine, weisen sowohl zusammenhängende Poren als auch ein ausgeprägtes Kluftnetzwerk auf.

Tabelle 3.2: Klassifizierung der Grundwasserleiter nach ihrer Hohlraumform.

	Poren-GWL	Kluft-GWL	Karst-GWL
Hohlräume	Poren	Klüfte	Karstspalten
Wassertemperatur	konstant	wenig schwankend	schwankend
mittlere Fließgeschwindigkeit	niedrig	je nach Art und Flächenanteil der Klüfte	hoch

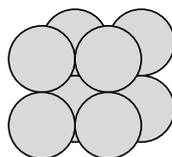
Maßgebend für die Wasserführung in Gesteinen ist nicht nur der Gesamthohlraumanteil (Porosität) sondern auch die Verbindung unter den Hohlräumen. In der DIN 4049, Teil 1 (Hydrologie) werden deshalb folgende Hohlraumanteile unterschieden:

Tabelle 3.3: Definition unterschiedlicher Hohlraumanteile.

Hohlraumanteil	n	$n := \frac{V_H}{V_H + V_K}$	V_H = Volumen aller Hohlräume (Poren, Klüfte und Höhlen) V_K = Korn- bzw. Gesteinsvolumen
durchflusswirksamer Hohlraumanteil	n_f	$n_f := \frac{V_F}{V_H + V_K}$	V_F = Volumen der vom Grundwasser durchflossenen Hohlräume
speichernutzbarer Hohlraumanteil	n_{sp}	$n_{sp} := \frac{V_G}{V_H + V_K}$	V_G = Anteil des durch Schwerkraft entwässerbaren Hohlraumvolumens

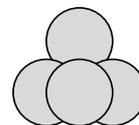
Bei der Berechnung von Grundwasserströmungen ist der durchflusswirksame Hohlraumanteil maßgebend.

Würfellaagerung:



n=47.6 %

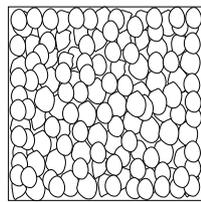
Tetraederlagerung:



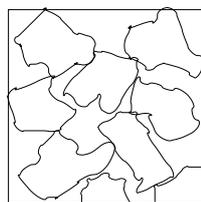
n=25.9 %

Abbildung 3.2: Porosität einer Kugelpackung als Funktion der Packungsart.

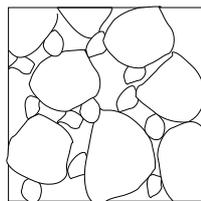
Wie in den Abbildungen 3.2 & 3.3 veranschaulicht wird, spielt die Art der Kornlagerung und die Kornform eine bedeutende Rolle für den Hohlraumanteil. Wegen der unterschiedlichen Einflussfaktoren lässt sich der Hohlraumanteil in der Natur nur grob abschätzen bzw. muss lokal ermittelt werden.



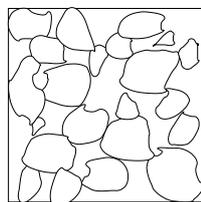
**gleich große Körner mit glatter Oberfläche:
geringer Hohlraumanteile**



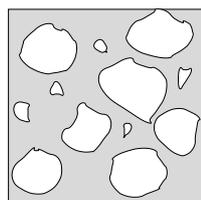
**Körner mit "rauher" Oberfläche:
größerer Hohlraumanteil**



**Körner mit "Distanzkorn":
sehr großer Hohlraumanteil**



**Körner mit sperriger Lagerung:
sehr großer Hohlraumanteil**



**Körner mit "Füllkorn":
sehr kleiner Hohlraumanteil**

Abbildung 3.3: Porosität als Funktion der Kornform.

Tabelle 3.4: Typische Werte für Hohlraumanteile.

Lockergesteine	n [%]	n_f [%]
Schluff (Silt), tonig–feinsandig	40-50	0,5-5
Feinsand	40-50	10-15
Grobsand, Feinkies (gut sortiert)	30-40	20-25
Kies, sandig	20-30	15-20
Kiesige Fussablagerungen (Mischung u. Wechsellagerung von Kies, Sand u. Schluff)		ca. 10
Schutthalden, sandig–lehmiger Gehängeschutt, sandig–steinige Gehängelehmedecken		5-35
Festgesteine	n [%]	n_f [%]
Tonsteine, Mergelsteine, klüftig, unverwittert		0-0,5
Sandsteine, teilmementiert oder sekundär ausgelaugt		5-20
Dolomite, grobkörnig–porös und stark geklüftet		bis 20
Basalte, dicht, geklüftet		1-2
Basaltlaven und vulkanische Tuffe (jung, nur teilverfestigt)		10-30
Granite, Gneise, kristalline Schiefer, bergfrisch (aufgelockert und verwittert viel höhere Werte, siehe Lockergesteine)		0-0,2

3.2.4 Zum Begriff des *Porösen Mediums*

Ein poröses Medium ist ein Festkörper bzw. ein Haufwerk von vielen Festkörpern, der von Hohlräumen (Poren, Klüfte, etc.) durchzogen wird. Größe, örtliche Verteilung und Form dieser Hohlräume variieren von Ort zu Ort. Die Hohlräume sind von ein oder mehreren Fluiden (Flüssigkeiten und Gase) ausgefüllt.

Die Strömung in einem porösen Medium kann, wie jede andere Strömung, mit den Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben werden, sofern die genaue Geometrie der Hohlräume bekannt ist. Dies ist unter praktischen Gesichtspunkten weder möglich noch erwünscht. Wir begnügen uns anstatt einer Beschreibung im Maßstab einzelner Poren mit räumlich gemittelten Aussagen. Wir gehen davon aus, dass die räumlich gemittelten Eigenschaften des porösen Mediums im Maßstab eines *Repräsentativen Elementarvolumens (REV)*, das typische Kantenlängen von wenigen *cm* aufweist, statistisch gleichverteilt ist. In diesem Betrachtungsmaßstab dürfen wir das poröse Medium durch ein Kontinuum approximieren.

Mit der Beschreibung des natürlichen Untergrundes als poröses Medium ist es nicht möglich, Prozesse in einzelnen Poren zu beschreiben. Durch die Mittelung erhalten wir Mittelungsgrößen, die im Maßstab einzelner Poren nicht bestehen:

- Anstelle der genauen Hohlraumgeometrie, wird nur der Anteil der Hohlräume am Gesamtvolumen betrachtet.
- Statt der genauen Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der Poren wird ein Gesamtdurchfluss je Flächeneinheit (Filtergeschwindigkeit) verwendet. Dieser hängt von der Durchlässigkeit des porösen Mediums ab. Die Durchlässigkeit ließe sich aus einem äquivalenten mittleren Porendurchmesser ableiten.

- Während Einzelporen an einer bestimmten Stelle nur von einem einzelnen Fluid erfüllt sind, können im porösen Medium mehrere Fluide koexistieren (ein Teil der Hohlräume ist von einem bestimmten Fluid erfüllt, ein anderer Teil von einem anderen). Alle Fluide werden als Kontinuum betrachtet, die sich gegenseitig durchdringen.

3.2.5 Klassifizierung der Gesteine nach ihren Strömungseigenschaften

Als *Grundwasserleiter* (GWL, "Aquifer") wird der "Gesteinskörper bezeichnet, der geeignet ist, Grundwasser weiterzuleiten" (DIN 4049). Als *Grundwasserhemmer* (Grundwassergeringleiter, "Aquitard") wird der "Gesteinskörper bezeichnet, der im Vergleich zu einem benachbarten Gesteinskörper gering wasserdurchlässig ist" (DIN 4049).

Der Begriff der Durchlässigkeit wird in Abschnitt 3.4.1 näher definiert. Wichtig ist die Relativaussage bezüglich der Durchlässigkeit. In einem Kiesgrundwasserleiter wirkt eine Feinsandeinlagerung wasserhemmend, wohingegen dieselbe Feinsandeinlagerung in einer tonigen Deponieabdichtung als bevorzugte Wasserwegsamkeit angesehen würde.

3.3 Wasser im natürlichen Untergrund

3.3.1 Klassifizierung des unterirdischen Wassers nach dem Sättigungsgrad

Grundwasser ist "unterirdisches Wasser, das die Hohlräume der Erdrinde zusammenhängend ausfüllt und dessen Bewegung ausschließlich oder nahezu ausschließlich von der Schwerkraft und den durch die Bewegung selbst ausgelösten Reibungskräften bestimmt wird" (DIN 4049).

Die oberflächennahen Hohlräume des Untergrunds sind zumindest partiell von Luft erfüllt. Betrachten wir das Hohlraumvolumen ($V_p = V_\ell + V_w$), das Volumen der Bodenkörner V_k , der Luft V_ℓ und des Wassers V_w , können wir folgende Größen definieren:

$$\text{Porosität } n = \frac{V_p}{V_k + V_p} = \frac{\text{Porenvolumen}}{\text{Gesamtvolumen}} \quad (3.1)$$

$$\text{Wassergehalt } \Theta_w = \frac{V_w}{V_k + V_p} = \frac{\text{Wasservolumen}}{\text{Gesamtvolumen}} \quad (3.2)$$

$$\text{Wassersättigungsgrad } S_w = \frac{V_w}{V_p} = \frac{\Theta_w}{n} = \frac{\text{Wasservolumen}}{\text{Porenvolumen}} \quad (3.3)$$

$$\text{Luftsättigungsgrad } S_\ell = \frac{V_\ell}{V_p} = \frac{\Theta_\ell}{n} = \frac{\text{Luftvolumen}}{\text{Porenvolumen}} \quad (3.4)$$

Die Sättigungsgrade von Luft S_ℓ und Wasser S_w addieren sich zu eins. Der Bereich des Untergrundes mit einer Wassersättigung $S_w < 1$ wird als *ungesättigte Bodenzone* bezeichnet. Das Wasser in der ungesättigten Bodenzone wird *nicht* Grundwasser sondern Bodenwasser genannt. Beachten Sie, dass der hier verwendete Bodenbegriff sich ausschließlich auf den Wassergehalt bezieht. In den Geowissenschaften werden verwitterte Deckschichten als Böden bezeichnet. Bei niedrigen Flurabständen können Bereiche des bodenkundlich als Boden angesprochenen Gesteins in der gesättigten Grundwasserzone liegen, bei hohen Flurabständen kann die ungesättigte Bodenzone Anteile des Ausgangsgesteins umfassen.

Das Bodenwasser unterliegt Kapillarkräften (s.u.). Der Übergangsbereich zwischen ungesättigter Bodenzone und gesättigter Grundwasserzone wird als *Kapillarsaum* bezeichnet. Im

Kapillarsaum beträgt zwar die Wassersättigung $S_w = 1$, Kapillarkräfte können jedoch trotzdem nicht vernachlässigt werden.

3.3.2 Hydrostatik und bodenphysikalischer Potentialbegriff

Die Hydrostatik befasst sich mit Drücken und Kräften in Hydrosystemen mit ruhendem Wasser. Diese Systeme stehen im thermodynamischen Gleichgewicht. Im thermodynamischen Gleichgewicht ist das chemische Potential überall gleich groß. Dieser Potentialbegriff, der auch in der Bodenphysik verwendet wird, bezieht sich auf die *Energiedichte* des Fluids; das Potential hat entsprechend die Einheit eines Drucks.

Dem gegenüber steht der Potentialbegriff aus der Höheren Mathematik, der eine Eigenschaft eines Vektorfeldes ist: Die negative Ableitung des Potentials ergibt an jedem Punkt im Gebiet das Vektorfeld (sofern das Vektorfeld ein Potential hat). Die sogenannte Potentialströmung beschreibt genau einen solchen Fall. Hier ergibt die negative Ableitung des Potentials die Geschwindigkeit. Das Potentialfeld lässt sich mit der Laplace-Gleichung beschreiben. Die stationäre Grundwasserströmung bei gleichförmiger und isotroper Durchlässigkeit stellt eine Potentialströmung dar. Hierbei ist die Standrohrspiegelhöhe h proportional zum Potential im mathematischen Sinn.

Im Folgenden verwenden wir den allgemeiner gehaltenen und thermodynamisch begründeten Potentialbegriff der Bodenphysik. Das Gesamtpotential p_{tot} ergibt sich als Summe mehrerer Teilpotentiale:

$$p_{tot} = \rho g z + \underbrace{p_\ell + p_h + p_c}_p + \left[p_o + \frac{\rho v^2}{2} + \dots \right] \quad (3.5)$$

Die Bedeutung der einzelnen Teilpotentiale ist in Tabelle 3.5 aufgelistet und wird in den folgenden Abschnitten genauer behandelt.

Tabelle 3.5: Teilpotentiale des Wassers im Untergrund.

Teilpotential	Art/Ursache der Energie	
geodätisches Potential	$\rho g z$	Arbeit gegen die Erdanziehung
Luftdruck	p_ℓ	
hydrostatischer Druck	p_h	Auflast des darüberliegenden Wassers (im Grundwasser positiv, in der ungesättigten Zone null)
Kapillardruck = Matrixpotential = Saugspannung	p_c	Adhäsion an der Kornmatrix und Oberflächenspannung des Wassers (im Grundwasser null, in der ungesättigten Zone negativ)
Druck	p	$p_\ell + p_h + p_c$
osmotischer Druck	p_o	Energie durch hohe Salinität
kinetisches Potential	$\frac{\rho v^2}{2}$	kinetische Energie des fließenden Wassers (im ruhenden Wasser null, kann bei schleichender Strömung vernachlässigt werden)

Im Folgenden vernachlässigen wir das osmotische Potential (Annahme: keine starken Salinitätsdifferenzen) und das kinetische Potential (Annahme: langsame Strömungsgeschwindigkeit $\approx 1 \text{ m/d}$). Außerdem betrachten wir beim Druck den Differenzdruck zum Luftdruck (Annahme: Luftdruck konstant). Wir können das verbleibende Gesamtpotential auch als Höhe einer Wassersäule h_{tot} formulieren:

$$h_{tot} = \underbrace{\frac{p_h}{\rho g}}_h + z + \underbrace{\frac{p_c}{\rho g}}_{h_c} \quad (3.6)$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht ist die Energiedichte des Wassers überall gleich. Das heißt, das Gesamtpotential ist räumlich konstant.

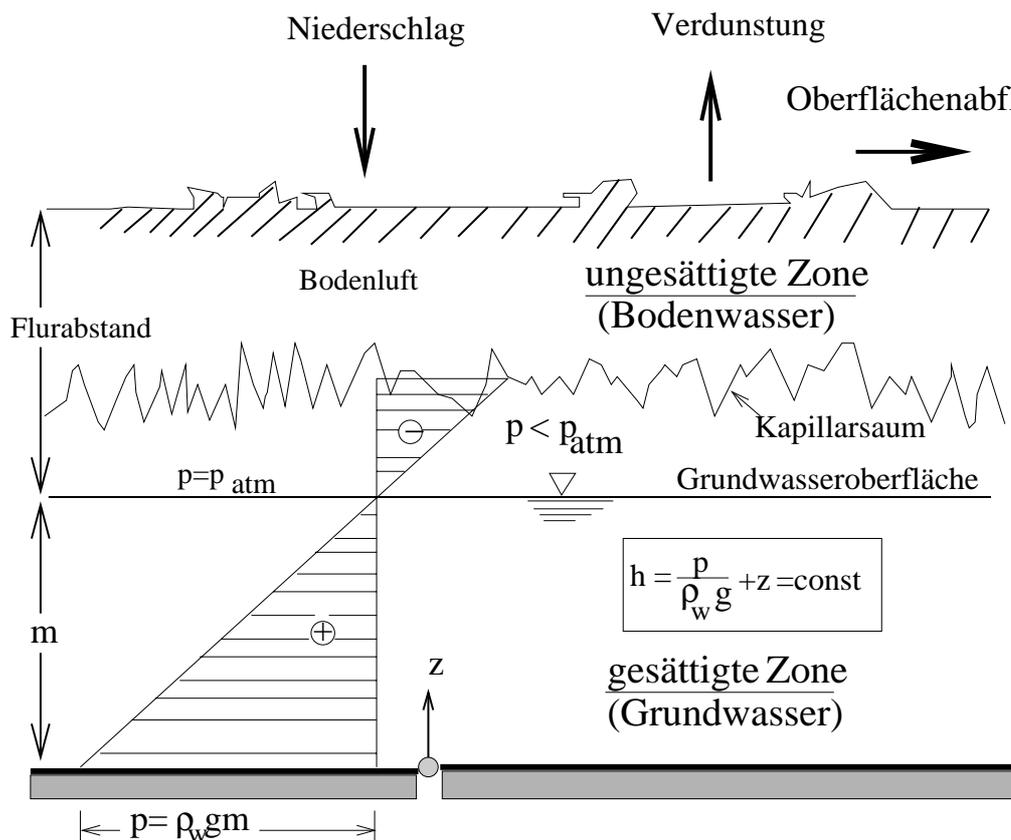


Abbildung 3.4: Druckverteilung des Wassers im natürlichen Untergrund.

Hydrostatischer Druck und geodätisches Potential

In der gesättigten Zone sind die kanalartig untereinander verbundenen Bodenporen vollständig von Wasser erfüllt. Deshalb kann sich der Wasserdruck fortpflanzen und sich mit steigender Tiefe aufbauen. Im Gleichgewichtszustand ergibt sich, unter Vernachlässigung des osmotischen und kinetischen Potentials, im Grundwasser eine konstante Piezometerhöhe h :

$$h = \frac{p_h}{\rho g} + z \quad (3.7)$$

Die Piezometerhöhe h wird in Grundwassermessstellen ("Standrohr") erfasst und heißt deshalb auch Standrohrspiegelhöhe. Die Standrohrspiegelhöhe ist in Grundwasseranwendungen

gegenüber dem Druck p zu bevorzugen, weil sie - im Gleichgewichtszustand - von der vertikalen Ortskoordinate unabhängig ist und leichter erfasst werden kann.

In der ungesättigten Zone liegt das Bodenwasser diskontinuierlich vor. Es baut sich kein hydrostatischer Druck auf. Im Gleichgewichtszustand muss die Anziehungskraft der Erde durch Kapillarkräfte ausgeglichen werden (s.u.).

Matrixpotential

Das Wasser in der ungesättigten Bodenzone unterliegt der Wirkung der Kapillarkraft: Wasser haftet an den hydrophilen Oberflächen der Körner an (Adhäsion). In einer runden Kapillare bildet sich bei einer stark benetzenden Oberfläche eine halbkugelförmige Grenzfläche zwischen Wasser und Luft aus. Entlang der Wasseroberfläche wirkt die Grenzflächenspannung $\sigma_{lw} \approx 0.074 \text{ N/m}$ zwischen Luft und Wasser (Oberflächenspannung). Sie beruht auf der Kohäsion des Wassers (das hohe Dipolmoment des Wassermoleküls bewirkt eine starke Anziehung unter den Wassermolekülen). Die Oberflächenspannung bewirkt eine Kraft tangential zur gekrümmten Oberfläche. Im Ruhezustand wirkt dieser Kraft eine Kraft entgegenwirkt, die auf einem Druckunterschied zwischen Wasser und Luft beruht. Dieser Druckunterschied wird als *Kapillardruck* p_c bezeichnet:

$$p_c = p_w - p_l = -\frac{2\sigma_{lw}}{r} \quad (3.8)$$

wobei r der Radius der Kapillare ist. Das negative Vorzeichen verdeutlicht, dass der Druck wasserseitig niedriger ist als luftseitig. Der Kapillardruck wird z.T. auch mit positivem Vorzeichen definiert, muss dann aber bei der Betrachtung des Gesamtpotentials abgezogen anstatt addiert werden. Der Kapillardruck bewirkt, dass das Wasser in einer Kapillare höher steht als in einer ausgedehnten Fläche, nämlich um die kapillare Steighöhe $h_c = p_c \rho_w g$.

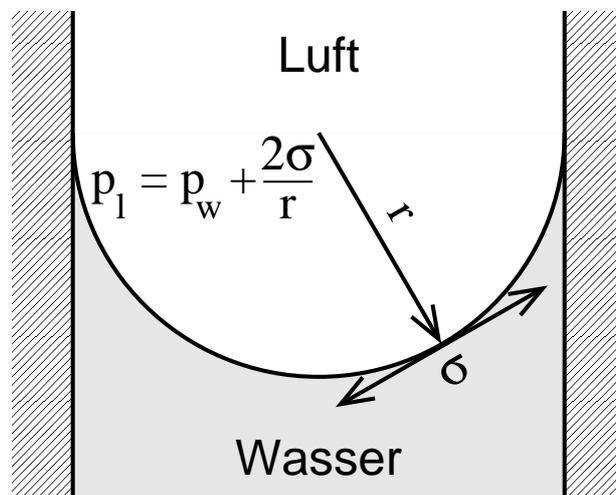


Abbildung 3.5: Definition des Kapillardrucks.

Wir können uns natürliche Böden konzeptionell als ein Netzwerk miteinander verbundener Kapillaren mit unterschiedlichen Durchmessern vorstellen. Während für eine Einzelkapillare ein eindeutiger Kapillardruck angegeben werden kann, ergibt sich für den Boden eine Verteilung. Je nach Sättigungsgrad werden unterschiedlich große Poren gefüllt. Bei sehr niedrigen Wassersättigungen füllen sich zunächst die feinsten Poren mit den betragsmäßig höchsten Kapillardrücken. Bei zunehmender Sättigung werden zunehmend größere Poren gefüllt; der Ka-

pillardruck nimmt betragsmäßig ab. Wir erhalten eine konstitutive Beziehung zwischen Kapillardruck und Sättigungsgrad, die als Kapillardruck-Sättigungsbeziehung oder Saugspannungskurve $p_c(\Theta_w)$ bzw. $h_c(\Theta_w)$ bezeichnet wird (siehe Abb. 3.6).

Bestünde der Boden aus einem Bündel vertikaler, unverbundener Kapillaren, ließe sich der Boden vollständig und reversibel benetzen und drainieren. Die realen Porennetzwerke sind jedoch räumlich sehr variabel. Bei der Drainage einer Bodenprobe gelingt es uns nicht, das Wasser vollständig aus der Probe zu entziehen, weil der Wasserfaden in Folge der Drainage abreißt. In abgegrenzten Teilbereichen verbleibt Wasser in sogenannter *Restsättigung* (residuale Sättigung). Dieses kann nur noch durch Verdunstung und Austrag über die Gasphase dem Boden entzogen werden. Umgekehrt kann Luft bei der Benetzung des trockenen Bodens eingeschlossen werden, sie verbleibt in abgeschlossenen Bereichen großer Porendurchmesser und kann nur noch über Lösung und Austrag in der Wasserphase dem Boden entzogen werden. Damit ergibt sich für das Bodenwasser ein Minimalgehalt Θ_r (residualer Wassergehalt) und ein Maximalgehalt Θ_s (Wassergehalt bei maximaler Sättigung). Hiermit lässt sich die *effektive Sättigung* S_e definieren:

$$S_e = \frac{\Theta - \Theta_r}{\Theta_s - \Theta_r} \quad (3.9)$$

Die Saugspannungskurve $p_c(\Theta_w)$ oder $h_c(\Theta_w)$ hängt von der Porengrößenverteilung und der Vernetzung der Poren ab. Sie muss i.A. an Bodenproben experimentell bestimmt werden, wobei z.B. an eine Probe gezielt eine Druckdifferenz zwischen Luft und Wasser angelegt wird und der Wassergehalt durch Wiegen bestimmt wird. Für die Saugspannungskurve wurden verschiedene Parametrisierungen entwickelt [Brooks & Corey 1964, van Genuchten 1980]. Die Parametrisierung von van Genuchten [1980] lautet:

$$S_e(-h_c) = \left(1 + (-\alpha h_c)^N\right)^{\frac{1-N}{N}} \quad (3.10)$$

Tabelle 3.6 gibt eine Übersicht über typische Werte der ungesättigten Bodenparameter nach van Genuchten [1980]. Die von Carsel & Parrish [1988] durchgeführte statistische Untersuchung beinhaltet auch die Korrelation unter den Parametern.

Tabelle 3.6: Deskriptive Statistik der ungesättigten Bodenparameter nach van Genuchten [1980] für unterschiedliche Bodenarten [Carsel and Parrish, 1988]. m : Mittelwert; s : Standardabweichung.

Bodenart	α [1/m]		N [-]		Θ_r [-]		Θ_s [-]	
	m	s	m	s	m	s	m	s
Toniger Lehm	1.9	1.5	1.31	0.09	0.095	0.010	0.41	0.09
Lehm	3.6	2.1	1.56	0.11	0.078	0.013	0.43	0.10
Lehmiger Sand	12.4	4.3	2.28	0.27	0.057	0.015	0.41	0.09
Schluff	1.6	0.7	1.37	0.05	0.034	0.010	0.46	0.11
Schluffiger Lehm	2.0	1.2	1.41	0.12	0.067	0.015	0.45	0.08
Schluffiger Ton	0.5	0.5	1.09	0.06	0.070	0.023	0.36	0.07
Schluffig-toniger Lehm	1.0	0.6	1.23	0.06	0.089	0.009	0.43	0.07
Sand	14.5	2.9	2.68	0.29	0.045	0.010	0.43	0.06
Sandiger Ton	2.7	1.7	1.23	0.10	0.100	0.013	0.38	0.05
Sandig-toniger Lehm	5.9	3.8	1.48	0.13	0.100	0.006	0.39	0.07
Sandiger Lehm	7.5	3.7	1.89	0.17	0.065	0.017	0.41	0.09

Abbildung 3.6 zeigt die Saugspannungskurve $h_c(\Theta)$ für drei Bodenarten entsprechend den Parametern in Tabelle 3.6. Die Kurven sind in der gebräuchlichen halblogarithmischen Form aufgetragen. In nicht-logarithmischer Form entsprechen die Kurven genau dem vertikalen Wassergehaltsprofil in der ungesättigten Zone im hydrostatischen Zustand. Dies ist in Abbildung 3.7 aufgetragen. Es ist auffällig, dass der Wassergehalt in Sand im Vergleich zu bindigen Böden sehr viel schneller mit dem Abstand zum Grundwasser abnimmt. In der Landwirtschaft sind Sandböden deshalb als trockene Böden bekannt.

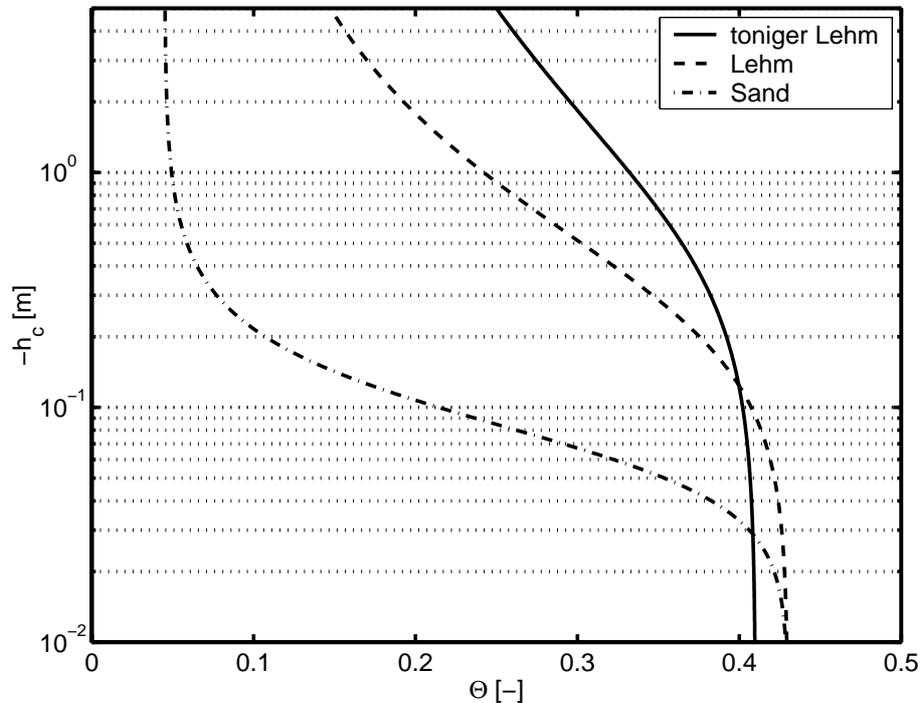


Abbildung 3.6: Saugspannungskurven für tonigen Lehm, Lehm und Sand nach der van Genuchten Parametrisierung mit den in Tabelle 3.6 angegebenen Parametermittelwerten.

In der Grundwasserzone ist der gesamte Hohlraum von Wasser erfüllt. Ohne Luft bildet sich keine Oberflächenspannung aus; die Kapillarkräfte betragen null. Wie bereits erwähnt bildet sich in porösen Medien oberhalb des Grundwasserspiegels je nach Größe der Poren ein Kapillarsaum aus, dessen obere Begrenzung nicht scharf ausgebildet ist (siehe Abbildung 3.8). Im Kapillarsaum beträgt die Sättigung bereits eins, die Oberfläche des geschlossenen Wasserkörpers ist jedoch so nah, dass der Druck des Wassers noch geringer ist als der Luftdruck. Der Kapillarsaum ist um so mächtiger, je feiner die Bodenkörner sind. Bei feinstkörnigen Böden wie Lehm und Ton werden zusätzlich noch chemische Bindungskräfte wirksam, die den Kapillarsaum vergrößern.

Während der Kapillarsaum in feinsandigen Porengrundwasserleitern ausgeprägt ist, findet man in Kluftgrundwasserleitern derartig ausgebildete Übergangszonen selten.

Weitere Potentiale

Bei hohen Fließgeschwindigkeiten, z.B. in unmittelbarer Nähe zu einem Brunnen, kann die *kinetische Energie* des Wassers bedeutend werden. Typische Grundwassergeschwindigkeiten von $1 \text{ m/d} \approx 10^{-5} \text{ m/s}$ ergeben jedoch eine Geschwindigkeitshöhe von $\approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ m}$, die vernachlässigt werden kann.

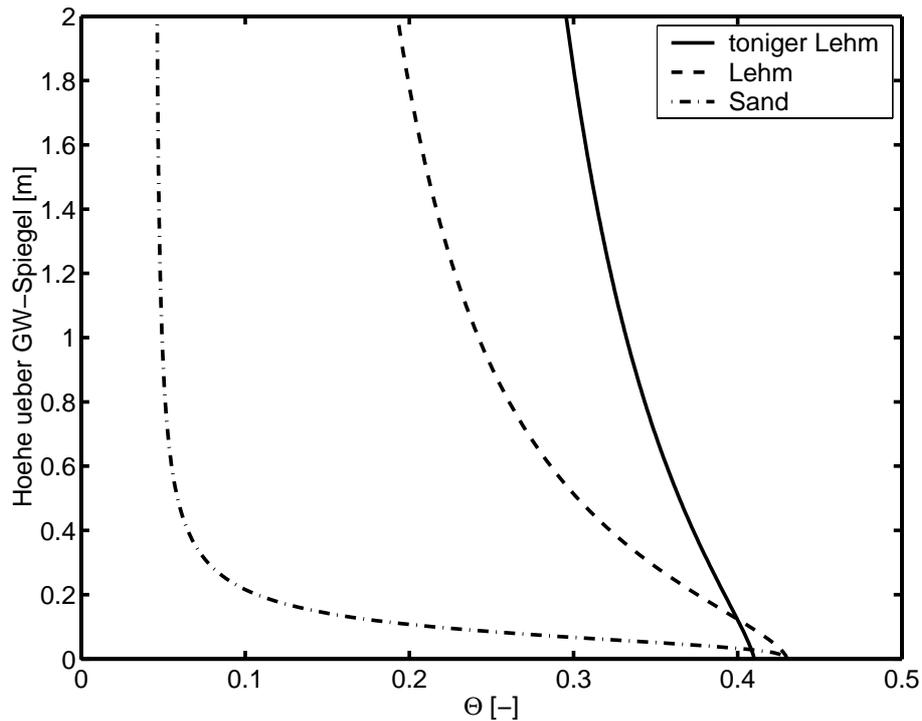


Abbildung 3.7: Wassergehalt in der ungesättigten Bodenzone oberhalb des Grundwasserspiegels für die gleichen Bodenarten wie in Abb. 3.6

Tabelle 3.7: Kapillare Steighöhe als Funktion der Bodenart.

Bodenart	kapillare Steighöhe		
grobkörniger Sand	0,12	bis	0,15 m
mittelkörniger Sand	0,4	bis	0,5 m
feinkörniger Sand	0,9	bis	1,0 m
sandiger Lehm	1,75	bis	2,0 m
feinsandiger Ton	2,25	bis	2,5 m
Tonstein	1,2	bis	9,4 m

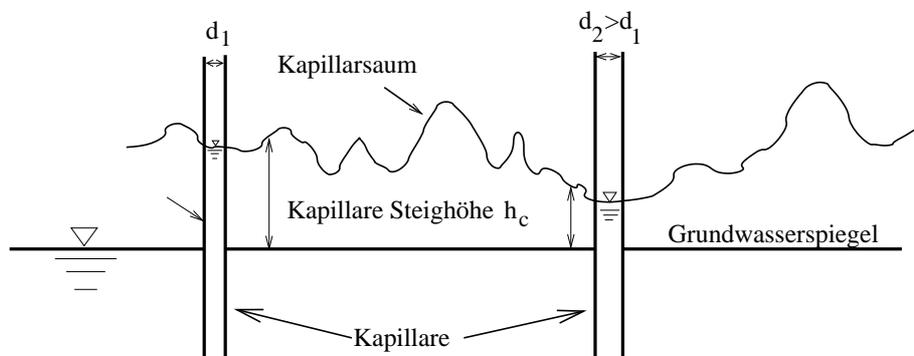


Abbildung 3.8: Veranschaulichung des Kapillarsaums.

Das *osmotische Potential* ergibt sich aus Unterschieden im Salzgehalt. Bei der Mischung von hoch- und niedersalinaren Lösungen wird Energie freigesetzt. Das osmotische Potential spielt in der Wasseraufnahme durch Pflanzenwurzeln eine bedeutende Rolle: Die in den Wurzelhaaren gelösten Stoffe können die Biomembranen nicht passieren. Der Unterschied im osmotischen Potential zwischen dem Bodenwasser und dem Wurzelwasser erzeugt eine Saugwirkung auf das Bodenwasser. Dies ermöglicht es den Pflanzen, selbst bei Saugspannungen von $> 10\text{ m}$ Bodenwasser aufzunehmen. Für die Strömung des Wassers innerhalb des porösen Mediums kann das osmotische Potential vernachlässigt werden.

In der Wasserreinigungstechnik der Umkehrosmose findet der umgekehrte Prozess statt: Hier wird Wasser von seinen darin gelösten Bestandteilen getrennt, indem das Rohwasser durch eine sehr feine Membran gepresst wird, die für die Ionen undurchlässig ist. Der hierzu notwendige hohe Druckunterschied ergibt sich nicht nur aus der niedrigen Wasserdurchlässigkeit der Membran, sondern auch aus dem Unterschied im osmotischen Druck zwischen Roh- und Reinwasser.

3.3.3 Hydraulische Typisierung von Grundwasserleitern

Grundwassersysteme lassen sich hydraulisch dadurch charakterisieren, ob die Mächtigkeit des Grundwasserkörpers durch die Grundwasserdruckfläche oder eine darüber liegende undurchlässige Deckschicht bestimmt wird.

- **Gespannter Grundwasserleiter**

Im gespannten Grundwasserleiter liegt die Standrohrspiegelhöhe stets oberhalb der undurchlässigen Deckschicht; das System steht also unter Druck. Unabhängig vom jeweiligen Durchfluss oder den Randbedingungen bleibt die durchströmte Querschnittsfläche stets gleich. Ein besonderer Fall ist der *artesischer Grundwasserleiter*, bei dem die Druckfläche oberhalb der Geländeoberkante liegt. Wird ein artesischer Grundwasserleiter angebohrt, entsteht ein natürlicher Springbrunnen. Die Fontainen von Dijon waren der Anlass für die Untersuchungen Henry Darcys [1856].

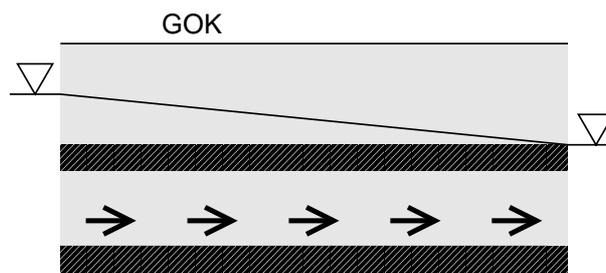


Abbildung 3.9: Gespannter Grundwasserleiter. Die Grundwasserdruckfläche befindet sich über der Grundwasseroberfläche, die vom GW-Hemmer im Hangenden bestimmt wird.

- **Halbgespannter Grundwasserleiter**

Ein halbgespannter Grundwasserleiter ist dadurch gekennzeichnet, dass der im wesentlichen horizontal durchströmte GWL durch deutlich weniger durchlässige Schichten begrenzt wird (mindestens eine Zehnerpotenz geringere Durchlässigkeit), so dass eine vertikale Zusickerung möglich ist, die in der Bilanzgleichung für die Strömung berücksichtigt werden muss.

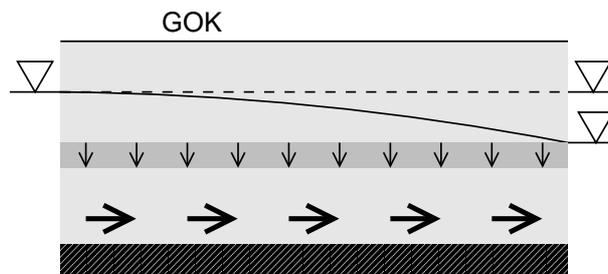


Abbildung 3.10: Halbgespannter Grundwasserleiter. Durch eine gering durchlässige Deckschicht findet ein schwacher vertikaler Zufluss zu dem ansonsten gespannten unteren GWL statt.

- **Freier (ungespannter) Grundwasserleiter**

Im freien Grundwasserleiter entspricht die Standrohrspiegelhöhe der freien Grundwasseroberfläche, oberhalb der sich ein Kapillarsaum und die ungesättigte Zone befindet. Mit einer Änderung des Grundwasserspiegels oder des Durchflusses ist hier immer auch eine Änderung der durchströmten Querschnittsfläche verbunden.

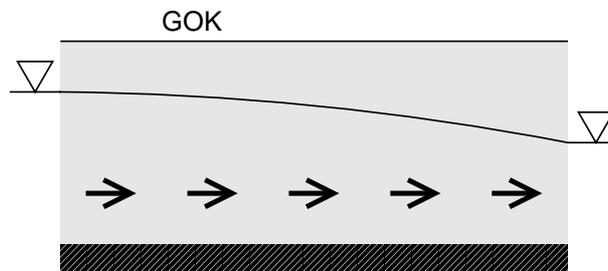


Abbildung 3.11: Freier Grundwasserleiter. Die Grundwasserdruckfläche entspricht der Grundwasseroberfläche.

Hydromechanisch gesehen entspricht der gespannte GWL einer Rohrströmung, der freie GWL einer Gerinneströmung mit freiem Wasserspiegel und der halbgespannte GWL einer Rohrströmung mit poröser Rohrwandung oder mit geringen Leckagen.

3.4 Grundwasserströmungsgleichung

3.4.1 Das Fließgesetz von Henry Darcy

Darcy-Gesetz für isotrope Medien

Das Fließgesetz von Henry Darcy [1856] lässt sich anhand eines Permeametersversuchs (siehe Abb. 3.13) veranschaulichen: An eine gesättigte Bodensäule mit Querschnittsfläche A und Länge Δs wird mit Hilfe von Überlaufbehältern ein Unterschied in der Piezometerhöhe Δh angelegt. Wir messen den Durchfluss Q . Das Verhältnis von Durchfluss zu durchströmter Fläche des porösen Mediums wird als *Filtergeschwindigkeit* q bezeichnet. Ebenfalls gebräuchlich sind die Begriffe "Darcy-Geschwindigkeit" und "spezifischer Durchfluss":

$$q = \frac{Q}{A} \quad (3.11)$$

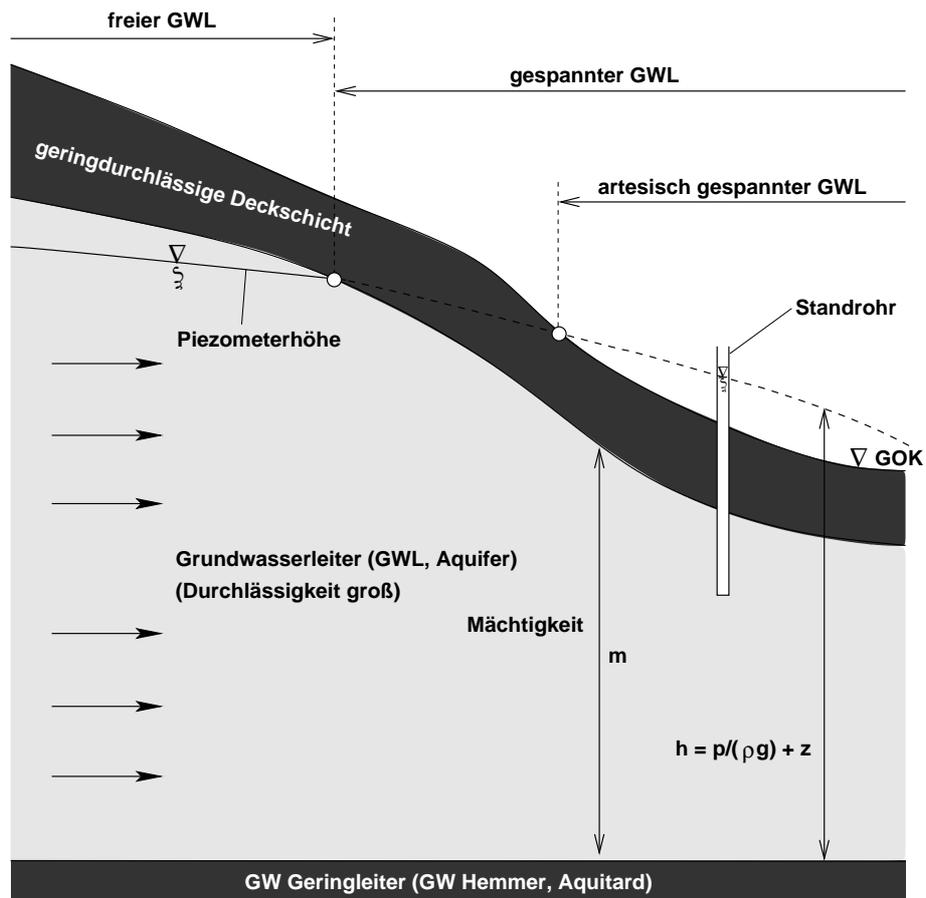


Abbildung 3.12: Übergang von einem freien zu einem gespannten Grundwasserleiter.

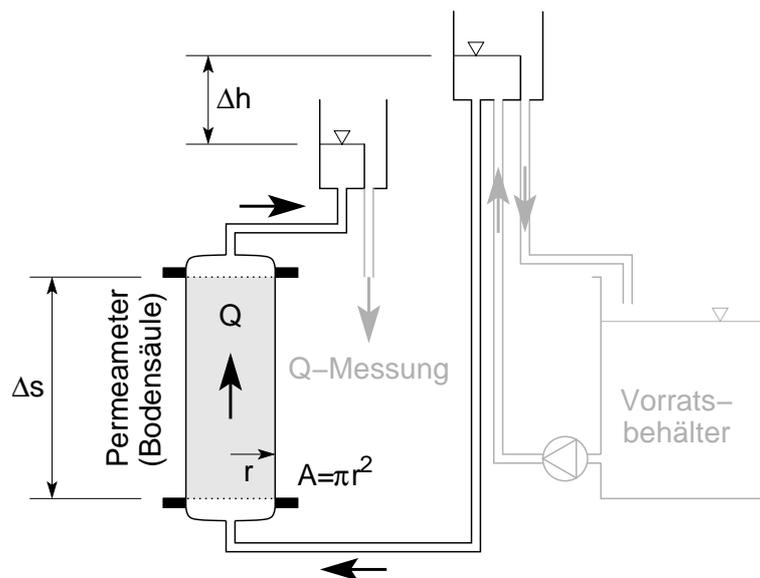


Abbildung 3.13: Permeametersversuch zur Bestimmung des Durchlässigkeitsbeiwerts k_f .

Wie bereits Darcy [1856] feststellte, verhält sich die Filtergeschwindigkeit proportional zum hydraulischen Gradienten $\Delta h/\Delta s$. Der Proportionalitätsfaktor wird als Durchlässigkeitsbeiwert K [LT^{-1}] bezeichnet (in Deutschland üblicherweise k_f -Wert). Das Filtergesetz für den Permeameter lautet dementsprechend:

$$q = -K \frac{\Delta h}{\Delta s} \quad (3.12)$$

Das negative Vorzeichen bringt zum Ausdruck, dass das Wasser entgegen dem Gradienten fließt. In isotropen Medien, deren Eigenschaften keine Richtungsabhängigkeit aufweisen, lässt sich das Darcy-Gesetz auf mehrdimensionale Anwendungen erweitern:

$$\mathbf{q} = -K \nabla h \quad (3.13)$$

Hierbei ist \mathbf{q} der Vektor der Filtergeschwindigkeit. Das Wasser fließt in Richtung des hydraulischen Gradientens von hohen zu niedrigen Standrohrspiegelhöhen.

Der Durchlässigkeitsbeiwerts K ist die wichtigste hydraulische Eigenschaft eines porösen Mediums. Er stellt die Grundlage für die Berechnung der Grundwasserströmung dar. Der Durchlässigkeitsbeiwert hängt von der Größe und Form der Poren ab und unterscheidet sich von Bodenart zu Bodenart dramatisch. Er lässt sich in Bodenproben mit dem in Abb. 3.13 skizzierten Permeameterversuch experimentell bestimmen. Alternativ hierzu kann eine Abschätzung aus der Sieblinie erfolgen (s.u.) oder eine Bestimmung durch hydraulische Tests im Feld vorgenommen werden. In Tabelle 3.8 sind typische K -Werte für unterschiedliche Bodenarten aufgelistet [Carsel & Parrish 1988]. Bemerkenswert ist die hohe Variabilität: Ohne Messung können K -Werte nur grob abgeschätzt werden. In Tabelle 3.9 ist eine zweite Übersicht von typischen K -Werten wiedergegeben [Höling 1995]. Sie enthält Werte für wirtschaftlich nutzbare Sand- und Kiesgrundwasserleiter.

Tabelle 3.8: Deskriptive Statistik des Durchlässigkeitsbeiwertes k_f für unterschiedliche Bodenarten [Carsel and Parrish, 1988]. m : Mittelwert; s : Standardabweichung.

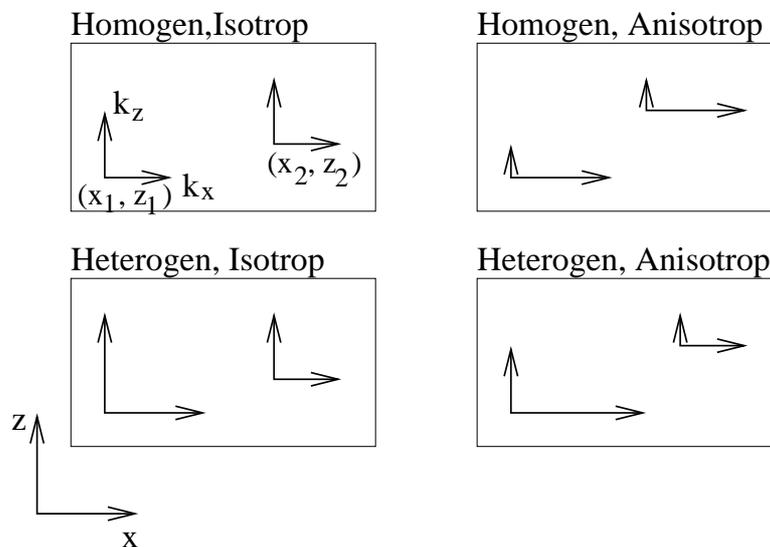
Bodenart	K [m/s]	
	m	s
Toniger Lehm	$7.22 \cdot 10^{-7}$	$1.94 \cdot 10^{-6}$
Lehm	$2.89 \cdot 10^{-6}$	$5.06 \cdot 10^{-6}$
Lehmiger Sand	$4.05 \cdot 10^{-5}$	$3.16 \cdot 10^{-5}$
Schluff	$6.94 \cdot 10^{-7}$	$9.17 \cdot 10^{-7}$
Schluffiger Lehm	$1.25 \cdot 10^{-6}$	$3.42 \cdot 10^{-6}$
Schluffiger Ton	$5.56 \cdot 10^{-8}$	$3.06 \cdot 10^{-7}$
Schluffig-toniger Lehm	$1.94 \cdot 10^{-7}$	$5.28 \cdot 10^{-7}$
Sand	$8.25 \cdot 10^{-5}$	$4.33 \cdot 10^{-5}$
Sandiger Ton	$3.33 \cdot 10^{-7}$	$7.78 \cdot 10^{-7}$
Sandig-toniger Lehm	$3.64 \cdot 10^{-6}$	$7.61 \cdot 10^{-6}$
Sandiger Lehm	$1.28 \cdot 10^{-5}$	$1.56 \cdot 10^{-5}$

Wie in Abschnitt 3.4.1 näher ausgeführt wird, ist die Durchlässigkeit poröser Medien im Allgemeinen richtungsabhängig (*Anisotropie*). Der Durchlässigkeitsbeiwert weist in realen Grundwasserleitern auch eine starke räumliche Variabilität auf (*Heterogenität*): Geologische Strukturen vom cm - bis in den km -Maßstab bewirken Unterschiede im Durchlässigkeitsbeiwert über

Tabelle 3.9: Typische Durchlässigkeitsbeiwerte nach Hölting [1995].

Bodenart	Bereich K [m/s]	Bewertung nach DIN 18 130
reiner Kies	$10^{-1} - 10^{-2}$	stark durchlässig
grobkörniger Sand	$\approx 10^{-3}$	stark durchlässig
mittelkörniger Sand	$10^{-3} - 10^{-4}$	durchlässig
feinkörniger Sand	$10^{-4} - 10^{-5}$	durchlässig
schluffiger Sand	$10^{-5} - 10^{-7}$	gering durchlässig - durchlässig
toniger Schluff	$10^{-6} - 10^{-9}$	sehr gering durchlässig - gering durchlässig
Ton	$< 10^{-9}$	sehr gering durchlässig

mehrere Größenordnungen. Die statistische Beschreibung der räumlichen Variabilität und ihrer Wirkung auf Strömung und Transport ist Gegenstand der stochastischen Hydromechanik, die im Rahmen der Vorlesung nicht behandelt werden kann [Dagan 1989, Gelhar 1993].

**Abbildung 3.14:** Kombinationsmöglichkeiten zwischen Anisotropie und Heterogenität.

Gültigkeitsbereich des Darcy-Gesetzes

Das Darcy-Gesetz liefert Aussagen für repräsentative Mittelwerte der Strömung, solange die Mittelwerte über ein hinreichend großes Betrachtungsvolumen (*repräsentatives Elementarvolumen, REV*) gebildet werden. Für mikroskopische Detailbetrachtungen kann es nicht angewendet werden. In Porengrundwasserleitern kann das Auflösungsvermögen bis auf ungefähr 30 Korndurchmesser heruntergehen; in Kluffgrundwasserleitern muss eine entsprechend größere Rasterung angesetzt werden.

Während die Geschwindigkeiten in Porengrundwasserleitern im süddeutschen Raum üblicherweise in der Größenordnung von $1m/d$ und in den Alluvialgrundwasserleitern des schweizerischen Mittellandes bei $10m/d$ liegen, kann das Grundwasser in Karstgrundwasserleitern wesentlich schneller fließen.

Der Gültigkeitsbereich des Darcy-Gesetzes ist auf schleichende Strömungen beschränkt. Ein Maß hierfür ist die Reynoldszahl Re :

$$Re = \frac{d_{50}q}{\nu} \stackrel{!}{<} 1 \quad (3.14)$$

In porösen Medien wird aus praktischen Gründen der mittlere Korndurchmesser d_{50} als charakteristische Länge und die Filtergeschwindigkeit q als charakteristische Geschwindigkeit verwendet (in der Rohrströmung werden der Rohrdurchmesser und die mittlere Fließgeschwindigkeit eingesetzt). Um schleichende Strömung zu gewährleisten, sollte Re den Wert von eins nicht überschreiten. In Poren- und Kluftgrundwasserleitern ist diese Bedingung in der Regel erfüllt. In unmittelbarer Brunnennähe, sowie in grobkörnigen Schottern und in Karstgrundwasserleitern können vergleichsweise hohe Strömungsgeschwindigkeiten erreicht werden. Bei $Re > 1$ ist die Filtergeschwindigkeit nicht mehr linear vom hydraulischen Gradienten abhängig, sondern tendiert zu einem quadratischen Widerstandsgesetz.

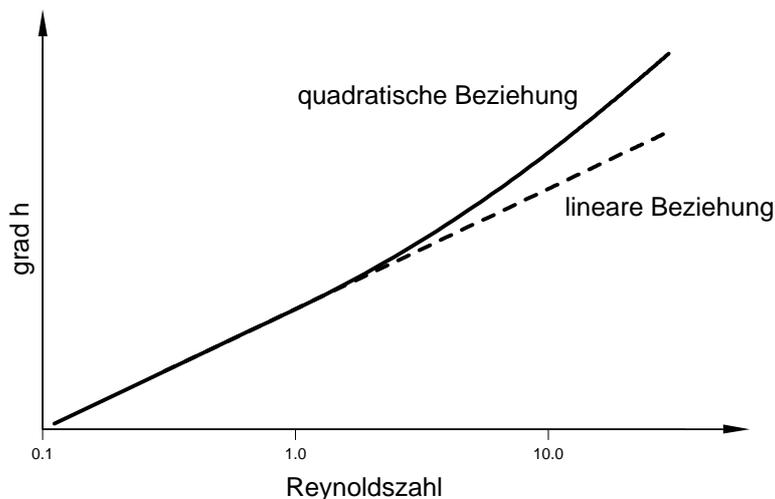


Abbildung 3.15: Gültigkeit des linearen Darcy-Gesetzes.

Navier-Stokes Gleichungen versus Darcy-Gesetz

In der Vorlesung *Environmental Fluid Dynamics 1* und im Einleitungskapitel wurde dargestellt, dass das System der Navier-Stokes-Gleichungen, Gl. (1.19), für den Impulserhalt in jeder Art von Strömung gilt. Die Navier-Stokes Gleichungen sind nichtlineare partielle Differentialgleichungen. Die Bestimmung der Fließgeschwindigkeit nach dem Darcy-Gesetz, Gl. (3.13), ist viel einfacher: Es handelt sich um eine einfache lineare Beziehung zwischen Potentialgefälle und Geschwindigkeit. Wie kommt diese Vereinfachung zustande?

1. Das Darcy-Gesetz gilt lediglich für sehr langsame Strömungen. Typische Fließgeschwindigkeiten in Flüssen betragen 1 m/s , wohingegen Grundwassergeschwindigkeiten im Bereich 1 m/d liegen. Die Wasserbewegung in der ungesättigten Zone erfolgt sogar mit Geschwindigkeiten in der Größenordnung von 1 m/a . Gleichzeitig sind charakteristische Längen, die für die relative Bedeutung viskoser Terme ausschlaggebend sind, in porösen Medien sehr klein. Porendurchmesser liegen üblicherweise im Bereich $< 1\text{ mm}$. Aus den kleinen Geschwindigkeiten und charakteristischen Längen folgt, dass Trägheitskräfte vernachlässigt werden können. Damit entfallen die nichtlinearen Terme vom Typ $\mathbf{v} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v})$ in den Navier-Stokes Gleichungen.

2. Die Vernachlässigung der Trägheitsterme allein führt noch nicht zum Darcy-Gesetz. Vielmehr sind die Navier-Stokes Gleichungen ohne Trägheitsterme als *Stokes* Gleichungen bekannt. Es handelt sich immer noch um ein System partieller, nunmehr linearer Differentialgleichungen. Tatsächlich gelten die Stokes-Gleichungen für den Impulserhalt in einzelnen Poren. Ein typische Charakteristikum hierfür ist die Ausbildung viskoser Wirbel in Ausbuchtungen und Querporen: Der Impuls, der durch die Wasserbewegung in einer Hauptpore gegeben ist, wird durch viskose Kräfte in Totraumzonen übertragen, sodass sich ein kleiner Wirbel ausbildet. Die Geschwindigkeit in diesen Wirbel ist üblicherweise sehr gering, weil an den Porenwänden die Haftbedingung gilt. Bei einer langen Seitenpore kann sich sogar eine Folge viskoser Wirbel mit sich abwechselndem Drehsinn ausbilden.

Der viskose Impulsaustausch in der Querrichtung ist wegen der Enge der Poren und der Haftbedingung an den Wänden sehr schwach. Über den Betrachtungsraum vieler Poren kann er vernachlässigt werden. Im Wesentlichen dissipiert der Gesamtimpuls durch Schubspannungsverluste an den Wänden. Wenn jedoch sowohl Trägheitskräfte als auch viskose Kräfte als Mechanismen der Impulsübertragung vernachlässigt werden können, bleiben auf der Skala des repräsentativen Elementarvolumens lediglich Druck- und Gravitationskräfte als positive Beschleunigungskräfte übrig. Sie befinden sich im Gleichgewicht mit der Reibung an den Porenwänden. Genau dieser Zusammenhang manifestiert sich im Gesetz von Darcy.

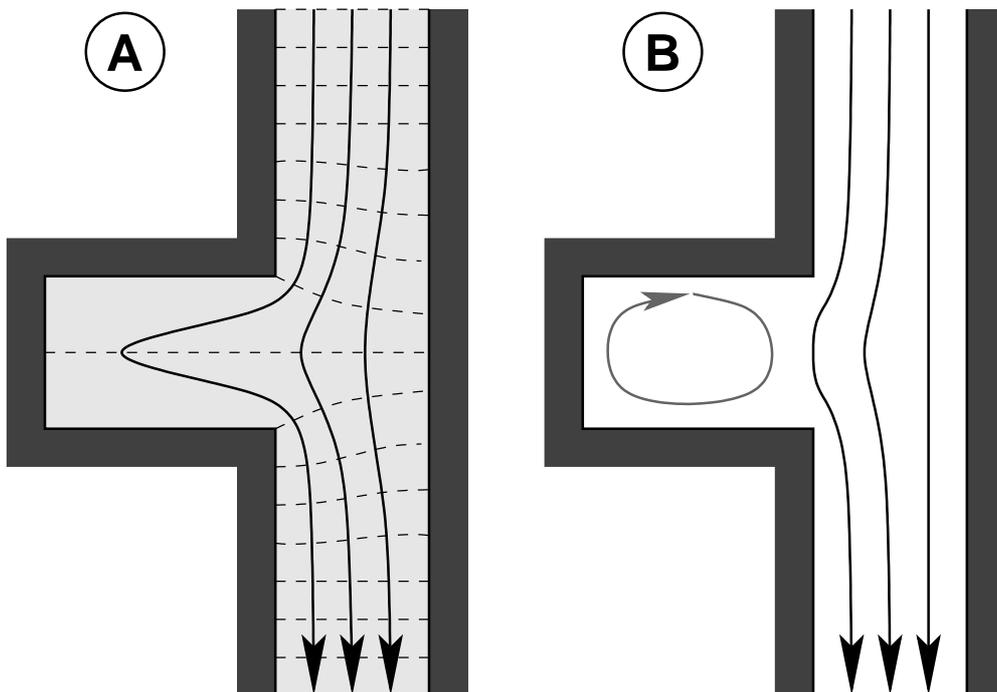


Abbildung 3.16: Wirkung einer seitlichen Ausbuchtung in (A) einem sandgefülltem System (Darcy-Gesetz gilt) und (B) einer Einzelpore (Stokes-Strömung). Die viskose Impulsübertragung in Querrichtung bewirkt in der Ausbuchtung der Einzelpore einen Wirbel. Dies ist im sandgefüllten Medium nicht möglich.

Abschätzung des Durchlässigkeitsbeiwerts K aus der Sieblinie

Für die überschlägige Abschätzung des Durchlässigkeitsbeiwerts K aus der Sieblinie wurden unter Anderem folgende empirische Beziehungen aufgestellt:

a) Formel nach Hazen [1892]:

$$K [m/s] = 0.0116 \cdot d_{10}^2 [mm] \approx \frac{d_{10}^2 [mm]}{100} \quad (3.15)$$

mit d_{10} = Korndurchmesser bei 10 % Siebdurchgang.

b) Formel nach Kozeny [1927] und Fair & Hatch [1933] (vereinfacht nach Carman [1937]) [Bear 1972, Busch et al. 1993]:

$$K [m/s] = \frac{d_w^2}{18} \cdot \frac{n_f^3}{(1 - n_f)^2} \quad (3.16)$$

	$U = d_{60}/d_{10}$	d_w/d_{10}
mit: d_w = effektiver Porendurchmesser [mm]	$1.0 \leq U < 2.0$	1.3
	$2.0 \leq U < 3.0$	1.75
	$3.0 \leq U < 5.0$	2.05
	$5.0 \leq U < 10$	2.35
	$10 \leq U$	2.5

n_f = effektiver (durchflusswirksamer) Hohlraumanteil

c) Formel nach Beyer [1964]:

$$K [m/s] = C \cdot d_{10}^2 \quad (3.17)$$

wobei C ein Koeffizient ist, der die Ungleichförmigkeit und die Dichte der Kornlagerung berücksichtigt.

Tabelle 3.10: Koeffizient C in Gl. (3.17) als Funktion Ungleichförmigkeitskoeffizienten U .

$U = d_{60}/d_{10}$ (Bereich)	C (Bereich)	(Mittelwert)
$1.0 \leq U < 2.0$	$1.05 \cdot 10^{-2} < C < 1.2 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$
$2.0 \leq U < 3.0$	$9.5 \cdot 10^{-3} < C < 1.05 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$
$3.0 \leq U < 5.0$	$8.5 \cdot 10^{-3} < C < 9.5 \cdot 10^{-3}$	$9.0 \cdot 10^{-3}$
$5.0 \leq U < 10$	$7.5 \cdot 10^{-3} < C < 8.5 \cdot 10^{-3}$	$8.0 \cdot 10^{-3}$
$10 \leq U < 20$	$6.5 \cdot 10^{-3} < C < 7.5 \cdot 10^{-3}$	$7.0 \cdot 10^{-3}$
$20 \leq U$	$C < 6.5 \cdot 10^{-3}$	$6.0 \cdot 10^{-3}$

Geschwindigkeitsbegriff

Für Strömungen in porösen Medien werden mehrere Geschwindigkeitsbegriffe verwendet:

Die Filtergeschwindigkeit q ist eine *fiktive* Geschwindigkeit. Sie entspricht *nicht* der mittleren Geschwindigkeit in den Poren, da sie auf die Gesamtquerschnittsfläche statt der Porenquerschnittsfläche bezogen wird. Der Begriff *spezifischer Durchfluss* beschreibt den Zusammenhang eigentlich besser:

$$q = \frac{Q}{A} \quad (3.11)$$

Diese Größe ist für die Bestimmung von Durchflüssen (pro Flächeneinheit) von Nutzen.

Die Abstandsgeschwindigkeit v_a gibt an, mit welcher mittleren Geschwindigkeit ein Wasserteilchen eine Wegstrecke Δs in der Zeit Δt durchläuft:

$$v_a = \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{q}{n_f} \quad (3.18)$$

Sie kann aus Tracermessungen ermittelt werden und ist immer dann von Bedeutung, wenn Transportprozesse oder Aufenthaltszeiten gefragt sind. Je kleiner der durchflusswirksame Hohlraumanteil n_f ist, desto größer ist v_a im Vergleich zu q .

Die Bahngeschwindigkeit v_b ist die tatsächliche Geschwindigkeit, die ein Wasserteilchen entlang seiner Bahnlinie erfährt. Weil die Bahnlinie in den Porenkanälen gewunden ist (Tortuosität), ist v_b größer als v_a . Unter realistischen Bedingungen besteht keine Möglichkeit die tatsächliche Bahngeschwindigkeit v_b zu berechnen oder messtechnisch zu erfassen.

Darcy-Gesetz für anisotrope Medien

In anisotropen Medien hängt die Durchlässigkeit des Gesteins von der Richtung ab. So bewirken längsgestreckte Poren eine in Streckrichtung gegenüber der Querrichtung erhöhte Durchlässigkeit. Grundsätzlich lassen sich für ein Medium, in dem der Durchfluss mit dem Darcy-Gesetz beschrieben werden kann, orthonormale Richtungen ξ , η , ζ mit der Eigenschaft definieren, dass ein hydraulischer Gradient in diese Richtung einen Fluss in dieselbe Richtung erzeugt (prinzipielle Richtungen der Durchlässigkeit). Der Durchlässigkeitsbeiwert kann sich von prinzipieller Richtung zu prinzipieller Richtung unterscheiden. Im $[\xi, \eta, \zeta]$ -Koordinatensystem lässt sich damit der Vektor der Filtergeschwindigkeit wie folgt ermitteln:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_\xi \\ q_\eta \\ q_\zeta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_\xi & 0 & 0 \\ 0 & K_\eta & 0 \\ 0 & 0 & K_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h}{\partial \eta} \\ \frac{\partial h}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}_\xi \nabla_\xi h \quad (3.19)$$

wobei K_ξ , K_η und K_ζ die Durchlässigkeitsbeiwerte in den drei prinzipiellen Richtungen und \mathbf{K}_ξ den Durchlässigkeitstensor im $[\xi, \eta, \zeta]$ -Koordinatensystem darstellen. \mathbf{K}_ξ ist eine Diagonalmatrix. ∇_ξ ist der Gradient im $[\xi, \eta, \zeta]$ -Koordinatensystem.

Bei einer Berechnung der Grundwasserströmung empfiehlt es sich, das Berechnungsnetz an den prinzipiellen Richtungen des Durchlässigkeitstensors auszurichten. Dies ist jedoch nicht immer möglich. Zum Beispiel kann die Orientierung der Durchlässigkeit im Gebiet variieren. Wir können nun eine Koordinatentransformation vornehmen, um die Filtergeschwindigkeit \mathbf{q}_ξ

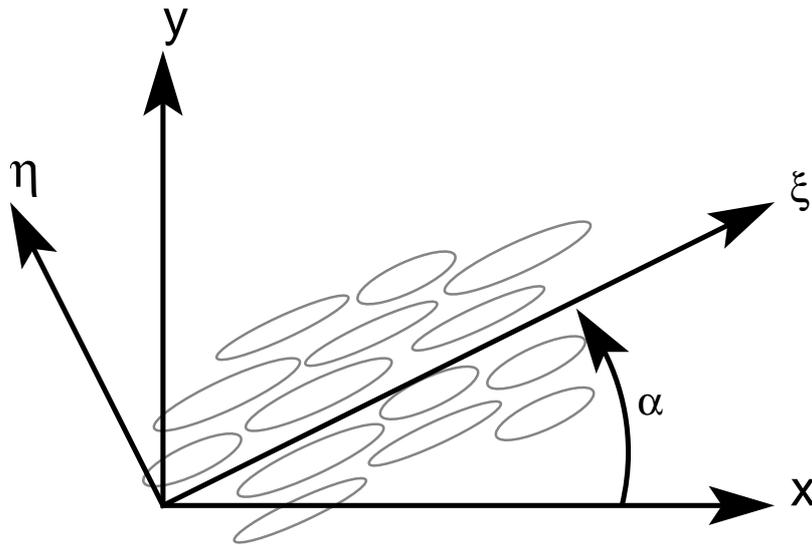


Abbildung 3.17: Prinzipielle Richtungen des Durchlässigkeitsensors in 2D.

und den Gradienten ∇_{ξ} in das kartesische $[x, y, z]$ -Koordinatensystem zu überführen:

$$\mathbf{q}_x = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^T}}_{\mathbf{D}^T} \mathbf{q}_{\xi} \quad (3.20)$$

$$\nabla_{\xi} = \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^T} \right)^T}_{\mathbf{D}} \nabla_x \quad (3.21)$$

Hierbei ist \mathbf{D} die Abbildungsmatrix für die Drehung vom $[\xi, \eta, \zeta]$ - in das $[x, y, z]$ -Koordinatensystem. Damit können wir das anisotrope Darcy-Gesetz, Gl. (3.19), in $[x, y, z]$ -Koordinaten wie folgt ausdrücken:

$$\mathbf{q}_x = -\underbrace{\mathbf{D}^T \mathbf{K}_{\xi} \mathbf{D}}_{\mathbf{K}_x} \nabla_x h \quad (3.22)$$

wobei \mathbf{K}_x den Durchlässigkeitstensor in $[x, y, z]$ -Koordinaten darstellt. In zweidimensionalen Systemen (siehe Abb. 3.17) lautet die Drehmatrix:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

wobei α der Winkel zwischen der x - und der ξ -Richtung ist. Damit wird der Durchlässigkeitstensor \mathbf{K}_x in $[x, y]$ -Koordinaten:

$$\mathbf{K}_x = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha)K_{\xi} + \sin^2(\alpha)K_{\eta} & \cos(\alpha)\sin(\alpha)(K_{\xi} - K_{\eta}) \\ \cos(\alpha)\sin(\alpha)(K_{\xi} - K_{\eta}) & \sin^2(\alpha)K_{\xi} + \cos^2(\alpha)K_{\eta} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Im Gegensatz zum Durchlässigkeitstensor \mathbf{K}_{ξ} in $[\xi, \eta]$ -Koordinaten, enthält der Tensor \mathbf{K}_x in $[x, y]$ -Koordinaten Nebendiagonaleinträge, die nur für $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ]$ oder $K_{\xi} = K_{\eta} = K$ zu Null werden. Die Nebendiagonaleinträge bewirken, dass ein Gradient in die x -Richtung auch eine Flusskomponente in die y -Richtung bewirkt (umgekehrt bewirkt ein

Gradient in die y -Richtung auch eine Flusskomponente in die x -Richtung). Die Filtergeschwindigkeit wird im Vergleich zum Gradienten in die Richtung höherer Durchlässigkeit abgelenkt. Stromlinien und Grundwassergleichen stehen nicht mehr senkrecht aufeinander.

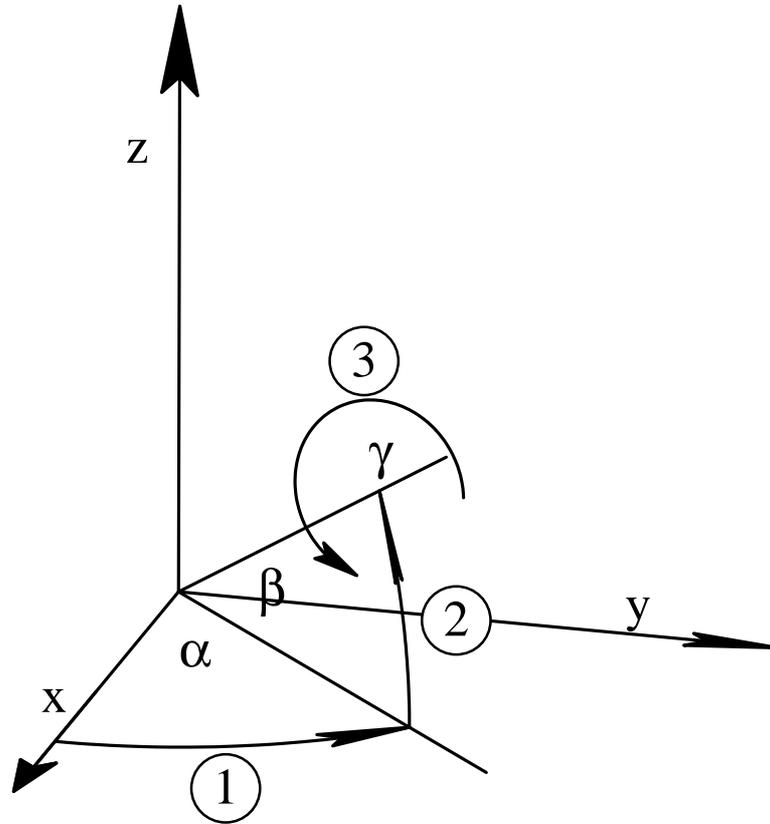


Abbildung 3.18: Transformation eines dreidimensionalen Tensors durch drei Drehungen. 1) Drehung um die z -Achse um den Azimut α . 2) Drehung um die transformierte y -Achse um Höhenwinkel β . 3) Drehung um die doppelt transformierte x -Achse um den Drehwinkel γ .

Die Koordinatentransformation für dreidimensionale Systemen lässt sich in drei Drehschritten unterteilen: eine Drehung um die z -Achse mit dem Azimut α , eine Drehung um die bereits transformierte y -Achse mit dem Höhenwinkel β und eine Drehung um die zweifach transformierte x -Achse mit dem Drehwinkel γ (zur Veranschaulichung siehe Abb. 3.18). Dies ergibt die folgende Abbildungsmatrix:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ 0 & -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ -\sin \beta & -\cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

Der resultierende Durchlässigkeitstensor in $[x, y, z]$ -Koordinaten enthält vergleichsweise lange Ausdrücke.

Mathematische Eigenschaften des Durchlässigkeitstensors \mathbf{K}

- Der Durchlässigkeitstensor ist eine symmetrische Matrix:

$$\mathbf{K} [i, j] = \mathbf{K} [j, i]$$

Diese Eigenschaft ergibt sich aus der Herleitung des Durchlässigkeitstensors in Gl. (3.22). Physikalisch bedeutet die Symmetrie, dass ein hydraulischer Gradient in Richtung x denselben Fluss in Richtung y erzeugt wie der hydraulische Gradient in y einen Fluss in Richtung x .

- Der Durchlässigkeitstensor ist eine positiv definite Matrix:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x}$$

Physikalisch bedeutet dies, dass die Flusskomponente in Richtung des hydraulischen Gradientens immer das umgekehrte Vorzeichen hat wie der Gradient. Die Anisotropie kann zwar eine Flusskomponente senkrecht zum Gradienten erzeugen, aber trotzdem fließt eine Komponente des Wassers in Richtung der niedrigeren Piezometerhöhe.

- Die Eigenvektoren des Durchlässigkeitstensors sind die prinzipiellen Richtungen der Durchlässigkeit, und die Eigenwerte sind die zugehörigen Durchlässigkeitsbeiwerte K_ξ , K_η und K_ζ . Diese Eigenschaft ergibt sich aus der Definition von Eigenvektoren und Eigenwerten. Multiplizieren wir eine beliebige Matrix \mathbf{A} mit einem ihrer Eigenvektoren \mathbf{v} , so ist das Ergebnis ein Vielfaches des Eigenvektors \mathbf{v} . Der Faktor ist der zum Eigenvektor zugehörige Eigenwert λ :

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

Ersetzen wir \mathbf{A} durch den Durchlässigkeitstensor \mathbf{K} , ist der Fluss nur dann genau in Richtung des Gradienten ausgerichtet, wenn der Gradient in eine der prinzipiellen Richtungen der Durchlässigkeit weist, d.h. die Eigenvektoren von \mathbf{K} geben die prinzipiellen Richtungen an. Multiplizieren wir einen Gradienten in eine prinzipielle Richtung (d.h. einen Eigenvektor von \mathbf{K}) mit dem Durchlässigkeitstensor \mathbf{K} , erhalten wir eine negative Filtergeschwindigkeit in die prinzipielle Richtung, die dem Gradienten mal der zugehörigen prinzipiellen Durchlässigkeit entspricht. Damit ist die prinzipiellen Durchlässigkeit der zum Eigenvektor zugehörige Eigenwert von \mathbf{K} .

Darcy-Gesetz für die ungesättigte Zone und für Mehrphasenströmungen

Das Darcy-Gesetz für die gesättigte Grundwasserströmung in isotropen Grundwasserleitern, Gl. (3.13), lässt sich unter Verwendung der Definition der Standrohrspiegelhöhe, Gl. (3.6), als Funktion des Druckgradientens anstelle des hydraulischen Gefälles formulieren:

$$\mathbf{q} = -K \nabla h = -\frac{K}{\rho g} (\nabla p + \rho g \mathbf{e}_z) = -\frac{K}{\rho g} \nabla p_{tot} \quad (3.26)$$

Im Fall der gesättigten Grundwasserströmung ist es i.A. zulässig, das Gesamtpotential p_{tot} im bodenphysikalischen Sinn auf den hydrostatischen Druck und das geodätische Potential zu beschränken. Im Falle der Wasserbewegung in der ungesättigten Zone müssen wir zusätzlich den Kapillardruck berücksichtigen. Es gilt, dass in isotropen Medien die gesättigte und ungesättigte Strömung dem Gradienten des Gesamtpotentials entgegengesetzt ist.

Wenn wir ein anderes Fluid als Wasser betrachten (z.B. Bodenluft oder Erdöl), hängt die Filtergeschwindigkeit neben dem Potentialgradienten auch von der dynamischen Viskosität μ des Fluids ab. Je zäher das Fluid, desto geringer die Filtergeschwindigkeit bei gleichem Druckgradienten. Wir ersetzen den Durchlässigkeitsbeiwert K für Wasser durch die fluidunabhängige Permeabilität k_0 und formulieren das Darcy-Gesetz wie folgt:

$$\mathbf{q} = -\frac{k_0}{\mu} \nabla p_{tot} \quad (3.27)$$

Die Permeabilität k_0 ist im Gegensatz zum K -Wert ausschließlich eine Funktion des porösen Mediums. k_0 hat die Dimension einer Fläche. Der Koeffizientenvergleich zwischen Gln. (3.26 & 3.27) ergibt folgenden Zusammenhang zwischen der Permeabilität k_0 und dem Durchlässigkeitsbeiwert für Wasser K :

$$k_0 = K \frac{\mu}{\rho g} = K \frac{v}{g} \approx K \cdot 10^{-7} m s \quad (3.28)$$

mit der kinematischen Viskosität v .

In einem porösen Medium, das zwei Fluide (z.B. Luft und Wasser) beinhaltet, verringert sich die Durchlässigkeit für eines der Fluide durch die Anwesenheit des zweiten Fluids. Die Durchlässigkeit des porösen Mediums für ein Fluid ist nun eine Funktion der Sättigung. Es ist gebräuchlich, die effektiv wirksame Permeabilität bei einer bestimmten Sättigung relativ zur Permeabilität bei vollständiger Sättigung anzugeben, womit sich folgendes Fließgesetz ergibt:

$$\mathbf{q}_\alpha = -k_r(S_\alpha) \frac{k_0}{\mu_\alpha} \nabla p_{tot}^\alpha \quad (3.29)$$

wobei \mathbf{q}_α die Filtergeschwindigkeit für Fluid α ist, $k_r(S_\alpha)$ wird als *relative Permeabilität* bezeichnet, und S_α , μ_α und p_{tot}^α sind die Sättigung, die dynamische Viskosität und das Gesamtpotential des Fluids α . Die Bestimmung der relativen Permeabilität ist messtechnisch sehr aufwendig. Wie für die Saugspannungskurve, wurden verschiedene parametrisierte Modelle zur Berechnung von $k_r(S_\alpha)$ entwickelt [Brooks & Corey 1964, van Genuchten 1980]. Die Parametrisierung von van Genuchten [1980] für Bodenwasser in landwirtschaftlichen Böden lautet:

$$k_r(S_e) = \sqrt{S_e} \left(1 - \left(1 - S_e^{\frac{N}{N-1}} \right)^{\frac{N-1}{N}} \right)^2 \quad (3.30)$$

wobei N der bereits in Gl. (3.10) verwendete und in Tabelle 3.6 aufgelistete van Genuchten-Parameter ist. Mithilfe der relativen Permeabilität kann auch ein ungesättigter Durchlässigkeitsbeiwert $k_u(h_c)$ oder $k_u(\Theta)$ für Wasser in der ungesättigten Zone formuliert werden:

$$k_u(h_c) = k_r(h_c) K \quad (3.31)$$

In Abbildung 3.19 sind $k_u(h_c)$ -Kurven für dieselben Bodenarten aufgeführt, deren Saugspannungskurven $h_c(\Theta)$ bereits in Abb. 3.6 dargestellt wurden. Es fällt auf, dass die Durchlässigkeit von Sand mit zunehmendem Kapillardruck sehr schnell abfällt. Schon 15 cm oberhalb des Grundwasserspiegels ist die Durchlässigkeit von Sand genauso groß wie die von Lehm, wohingegen sie bei Sättigung fast um einen Faktor 30 größer ist. Dieses Verhalten ist sehr typisch für die ungesättigte Zone: Bei hohen Sättigungen stellen die Bereiche mit grober Textur die bevorzugte Wegsamkeit dar, bei kleinen Sättigungen diejenigen mit feiner Textur.

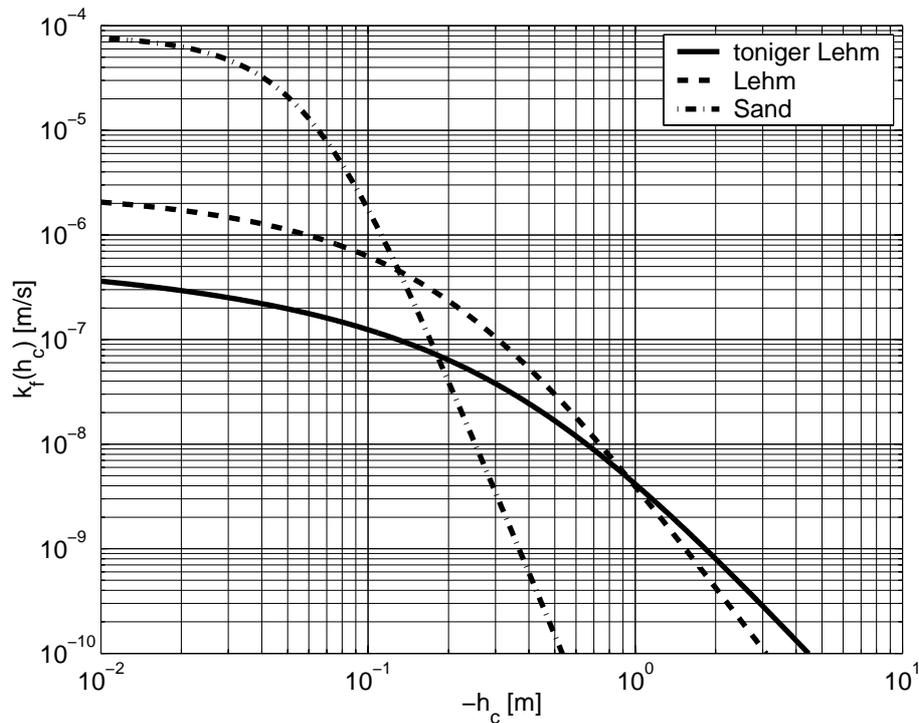


Abbildung 3.19: Ungesättigter Durchlässigkeitsbeiwert $k_u(h_c)$ für Wasser als Funktion der kapillaren Steighöhe h_c in unterschiedlichen Bodenarten.

3.4.2 Kontinuitätsgleichung für poröse Medien

Wir beziehen uns jetzt wieder auf die allgemeine Erhaltungsgleichung für eine explizite Speichergröße mit Volumendichte ϱ , Flussdichte \mathbf{f} und volumenbezogenem Quell/Senkenterm s , Gl. (1.15):

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} = s \quad (1.15)$$

1. Die zu bilanzierende extensive Größe ist die Masse des gespeicherten Wassers im porösen Medium. Das Kontrollvolumen umfasst sowohl wasser- als auch kornerfüllten Raum. Im Fall der ungesättigten Zone, wird ein Teil des Volumens durch Luft eingenommen. Deswegen entspricht die Masse Wasser pro Gesamtvolumen dem Produkt aus Massendichte des Wassers ϱ_w und dem volumetrischen Wassergehalt Θ_w :

$$\varrho \rightarrow \varrho_w \Theta_w \quad (3.32)$$

2. Die zugehörige Flussdichte ist die Massenflussdichte des Wassers, also das Produkt aus spezifischem Durchfluss \mathbf{q} und Massendichte des Wassers:

$$\mathbf{f} \rightarrow \varrho_w \mathbf{q} \quad (3.33)$$

3. Im Kontrollraum können interne Quellen und Senken des Wassers bestehen. Beispiele hierfür wären:

- die Wasserentnahme durch Pflanzenwurzeln,

- bei zweidimensionaler Betrachtung: die Grundwasserneubildung,
- ein Brunnen innerhalb des Kontrollraums.

Der spezifische volumetrische Quell-/Senkenterm W_0 beschreibt die Zugabe- (positives Vorzeichen) oder Entnahmerate (negatives Vorzeichen) pro Volumeneinheit [$m^3/s/m^3$]:

$$s \rightarrow \rho_w W_0 \quad (3.34)$$

Damit wird aus der allgemeinen Erhaltungsgleichung, Gl. (1.15), für den Erhalt der Wassermasse im porösen Medium:

$$\frac{\partial(\rho_w \Theta_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{q}) = \rho_w W_0 \quad (3.35)$$

Gl. (3.35) ist die *Kontinuitätsgleichung* für Wasser in einem porösen Medium. Wir differenzieren jetzt die beiden Terme in den Klammern aus:

$$\rho_w \frac{\partial \Theta_w}{\partial t} + \Theta_w \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \nabla \rho_w \cdot \mathbf{q} + \rho_w \nabla \cdot \mathbf{q} = \rho_w W_0 \quad (3.36)$$

und teilen Gl. (3.36) durch die Dichte des Wassers ρ_w :

$$\frac{\partial \Theta_w}{\partial t} + \frac{\Theta_w}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \frac{1}{\rho_w} \nabla \rho_w \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot \mathbf{q} = W_0 \quad (3.37)$$

Im Folgenden vernachlässigen wir den räumlichen Dichtegradienten $\nabla \rho_w$, weil die Kompressibilität von Wasser sehr niedrig ist. Wir berücksichtigen jedoch die zeitliche Veränderung der Dichte $\partial \rho_w / \partial t$. Hierin spiegelt sich die folgende Abwägung wieder: Der Term $\nabla \cdot \mathbf{q}$ kann sehr viel größere Werte als $\frac{1}{\rho_w} \nabla \rho_w \cdot \mathbf{q}$ annehmen; im Gegensatz hierzu ist die Veränderung des volumetrischen Wassergehalts $\frac{\partial \Theta_w}{\partial t}$ in der gesättigten Grundwasserzone etwa vergleichbar klein wie der Term $\frac{\Theta_w}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial t}$. Damit erhalten wir folgende vereinfachte Form der Kontinuitätsgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial \Theta_w}{\partial t} + \frac{\Theta_w}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = W_0} \quad (3.38)$$

Diese Form der Kontinuitätsgleichung gilt für Wasser sowohl in der ungesättigten als auch der gesättigten Zone. Gl. (3.38) beinhaltet zwei Speicherterme: die Veränderung des volumetrischen Wassergehalts $\partial \Theta_w / \partial t$ bei konstanter Dichte ρ_w und die relative Dichteänderung $(\Theta_w / \rho_w) \partial \rho_w / \partial t$ bei konstantem volumetrischen Wassergehalt. Hätten wir die Kontinuitätsgleichung aufgrund einer Volumenbilanz anstelle einer Massenbilanz zu entwickeln versucht, wäre der zweite Speicherterm nicht hergeleitet worden.

Richards-Gleichung für die ungesättigten Zone

In der ungesättigten Zone kann der Wassergehalt zeitlich stark variieren: wenn der Wassergehalt zunimmt, nimmt der Gehalt der kompressiblen Bodenluft ab und umgekehrt. Im Vergleich hierzu ist die Massenveränderung im Kontrollraum durch die Dichteänderung des Wassers sehr klein:

$$\frac{\partial \Theta_w}{\partial t} \gg \frac{\Theta_w}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial t} \quad (3.39)$$

Das heißt, wir können den zweiten Speicherterm in Gl. (3.38) vernachlässigen. Wir berücksichtigen ferner das Darcy-Gesetz für Wasser in der ungesättigten Zone:

$$\mathbf{q} = -k_r(p_c) \frac{\mathbf{K}_0}{\mu} \nabla p_{tot} \quad (3.40)$$

Hierbei wurde berücksichtigt, dass die Permeabilität k_0 im allgemeinen Fall ein Tensor \mathbf{K}_0 sein kann. Das Darcy-Gesetz für Wasser in der ungesättigten Zone lässt sich wie folgt umformen:

$$\mathbf{K}_u(p_c) = \frac{k_r(p_c) \varrho_w g}{\mu} \mathbf{K}_0 \quad (3.41)$$

$$\varrho_w g p_{tot} = \underbrace{\varrho_w g p_c}_{h_c} + z \quad (3.42)$$

$$\Rightarrow \mathbf{q} = -\mathbf{K}_u(h_c) (\nabla h_c + \mathbf{e}_z) \quad (3.43)$$

wobei $\mathbf{K}_u(h_c)$ der ungesättigte Durchlässigkeitstensor, h_c die kapillare Steighöhe und \mathbf{e}_z der Einheitsvektor in z -Richtung (positiv = nach oben gerichtet) sind. Wir setzen Gl. (3.43) in Gl. (3.38) ein und vernachlässigen die Dichteänderung des Wassers:

$$\frac{\partial \Theta_w}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{K}_u(h_c) (\nabla h_c + \mathbf{e}_z)) = W_0 \quad (3.44)$$

Gl. (3.44) enthält zwei Zustandsvariablen des Bodenwassers: den Wassergehalt Θ_w und die kapillare Steighöhe h_c , die über die Kapillardruck-Sättigungsbeziehung miteinander verknüpft sind. Wir können unter Anwendung der Kettenregel die zeitliche Veränderung des Wassergehalts durch die Veränderung der kapillaren Steighöhe ersetzen:

$$\frac{\partial \Theta_w}{\partial t} = \frac{\partial \Theta_w}{\partial h_c} \frac{\partial h_c}{\partial t} \quad (3.45)$$

und erhalten damit die *Richards*-Gleichung als Kontinuitätsgleichung für das Bodenwasser:

$$\boxed{\frac{\partial \Theta_w}{\partial h_c} \frac{\partial h_c}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{K}_u(h_c) (\nabla h_c + \mathbf{e}_z)) = W_0} \quad (3.46)$$

Um die Strömung des Bodenwassers in der ungesättigten Zone berechnen zu können, benötigen wir die konstitutiven Beziehungen $\Theta_w(h_c)$ und $\mathbf{K}_u(h_c)$. Diese Beziehungen werden meistens durch nichtlineare Gleichungen (z.B. Gln. (3.10 & 3.30)) parametrisiert. Die Nichtlinearität erschwert die Entwicklung geschlossener Lösungen.

Die Anwendung der Richards-Gleichung, Gl. (3.46), setzt implizit voraus, dass die Bodenluft ungehindert zu- und abströmen kann. Für niedrige bis mittlere Wassergehalte ist diese Annahme i.A. gültig, weil die Viskosität von Luft etwa 1% derjenigen von Wasser entspricht. Unter ungünstigen Umständen können jedoch größere Luftpakete im Boden abgeschnürt werden, die wegen der verringerten relativen Permeabilität für Luft bei hohen Wassergehalten schlecht entweichen können. In solchen Fällen kann die Verdrängung der Luft durch das Wasser luftseitig limitiert werden. Wir können für die Bodenluft eine eigene Strömungsgleichung aufstellen und das gekoppelte System (numerisch) lösen. Für Systeme mit mehreren zähen Fluiden (z.B. Öl und Wasser) ist es grundsätzlich notwendig, gekoppelte Strömungsgleichungen aller beteiligter Fluide aufzustellen und gemeinsam zu lösen (Mehrphasenströmung).

Grundwasserströmungsgleichung

In der gesättigten Grundwasserzone ist der gesamte Porenraum vom Wasser erfüllt, d.h. der volumetrische Wassergehalt Θ_w entspricht dem effektivem Hohlraumanteil n_f :

$$\Theta_w = n_f \quad (3.47)$$

Ferner gilt das Darcy-Gesetz für die gesättigte Zone:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K}\nabla h \quad (3.22)$$

Damit wird aus der vereinfachten Kontinuitätsgleichung, Gl. (3.38):

$$\frac{\partial n_f}{\partial t} + \frac{n_f}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla h) = W_0 \quad (3.48)$$

Wie bei der Entwicklung der Richards-Gleichung wenden wir die Kettenregel auf die Zeitableitungen an:

$$\frac{\partial n_f}{\partial t} = \frac{\partial n_f}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.49)$$

$$\frac{n_f}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial t} = \frac{n_f}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.50)$$

um die zeitliche Veränderung der Standrohrspiegelhöhe h in die partielle Differentialgleichung einzuführen. Damit erhalten wir die Grundwasserströmungsgleichung:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial n_f}{\partial h} + \frac{n_f}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial h} \right)}_{S_0} \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla h) = W_0 \quad (3.51)$$

oder

$$\boxed{S_0 \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla h) = W_0} \quad (3.52)$$

mit dem *spezifischen Speicherkoeffizienten* S_0 :

$$\boxed{S_0 = \frac{\partial n_f}{\partial h} + \frac{n_f}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial h}} \quad (3.53)$$

Der spezifische Speicherkoeffizient beschreibt die relative Veränderung der im porösen Medium gespeicherten Wassermasse bei absoluter Änderung der Standrohrspiegelhöhe h [(kg veränderte Wassermasse) / (kg gespeicherte Wassermasse) / (m Änderung von h)]. Er hat entsprechend die Einheit $1/m$. Zur Veranschaulichung siehe Abb. 3.20. Der spezifische Speicherkoeffizient S_0 beinhaltet zwei Terme: die Kompressibilität des Wassers im Term $n_f/\rho_w \cdot \partial \rho_w/\partial h$ und die Kompressibilität des Porengefüges im Term $\partial n_f/\partial h$. Beide Beiträge sind etwa gleich groß. Als Anhaltswert für S_0 kann $3.3 \cdot 10^{-6}/m$ angesetzt werden [Langguth & Voigt 1980].

Der spezifische Speicherkoeffizient ist in vollständig wassergesättigten Medien sehr klein, weil die Kompressibilitäten sowohl des Wassers als auch des Porengefüges klein sind. Enthält ein Grundwasserleiter eingeschlossenes Gas, z.B. infolge mikrobieller Aktivität (Denitrifizierung, Methanogenese, ...) oder durch Entspannung CO_2 -gesättigten Wassers, so erhöht sich der spezifische Speicherkoeffizient dramatisch, weil das Gas stark kompressibel ist und entsprechend der Wassergehalt bei Druckzunahme steigen kann.

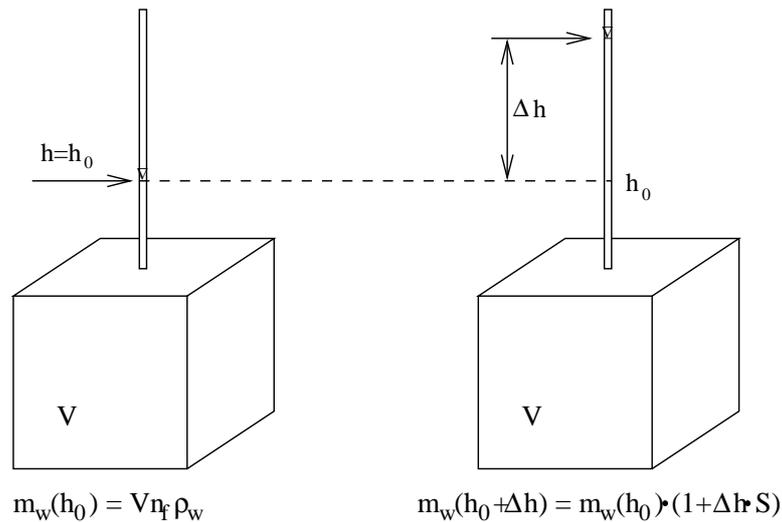


Abbildung 3.20: Der Speicherkoefizienten S_0 beschreibt die relative Massenveränderung des gespeicherten Wassers bei Veränderung der Standrohrspiegelhöhe h .

3.4.3 Tiefenintegrierte Betrachtung

Bei der Untersuchung der regionalen Grundwasserströmung fällt auf, dass die vertikale Ausdehnung des Grundwasserleiters (Mächtigkeit m) im Vergleich zu den horizontalen Ausdehnungen sehr klein ist. Mächtigkeiten im Bereich von 50 m gelten bereits als sehr groß, wohingegen die horizontale Ausdehnung der Grundwasserleiter meistens mehrere km betragen. Ferner sind, mit der Ausnahme lokaler Sondererscheinungen wie der Anströmung an einen nur teilweise verfiltrten Brunnen, die horizontalen Komponenten der Filtergeschwindigkeit i.A. sehr viel größer als die vertikale. Vor diesem Hintergrund ist die *Dupuit-Annahme* zulässig:

Dupuit-Annahme: Bei regionaler Betrachtung ist die Piezometerhöhe h unabhängig von der vertikalen Koordinate z , d.h. der Piezometerhöhengradient über die Tiefe ist vernachlässigbar klein [Dupuit 1863]:

$$h = h(x, y, t) \quad \forall z \quad (3.54)$$

Daraus ergibt sich:

1. Vertikalkomponente der Filtergeschwindigkeit ist vernachlässigbar:

$$q_z \ll q_x, q_y.$$

2. Horizontalkomponenten der Filtergeschwindigkeit sind unabhängig von der vertikalen Koordinate z ("tiefengemittelte Betrachtungsweise"):

$$q_x = q_x(x, y, t) \quad \forall z; \quad q_y = q_y(x, y, t) \quad \forall z.$$

Abb. 3.21 veranschaulicht die Dupuit-Annahme am Beispiel der Grundwasserströmung zwischen zwei Flüssen. Bei dreidimensionaler Betrachtung wird die senkrechte Fließrichtung des in- und exfiltrierenden Grundwassers an den Gewässersohlen berücksichtigt. Die vertikale Flusskomponente nimmt mit dem Abstand zu den Flüssen ab. Diese Effekte können unter Anwendung der Dupuit-Annahme nicht berücksichtigt werden. Hier wird angenommen, dass das Grundwasser unter den beiden Flüssen die Piezometerhöhe der jeweiligen Flüsse annimmt. Die Strömung zwischen den Flüssen wird als horizontal-eben angenommen. Diese Betrachtung

ist offensichtlich für die Nahbereiche um die Flüsse sehr grob vereinfachend; für den größten Bereich zwischen den Flüssen ergeben sich jedoch nur geringfügige Unterschiede zwischen der dreidimensionalen und der horizontal-ebenen Betrachtungsweise.

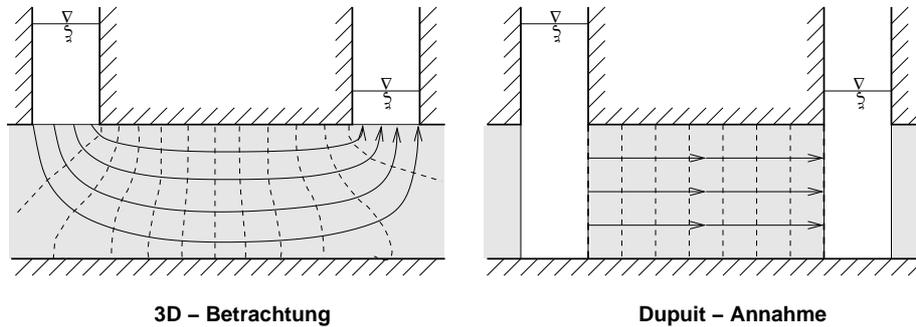


Abbildung 3.21: Veranschaulichung der Dupuit-Annahme am Beispiel der Strömung zwischen zwei Flüssen mit hydraulischem Kontakt zum Grundwasser.

Tiefenintegrierte Koeffizienten

Wir gehen von einem homogenen, isotropen Grundwasserleiter mit konstanter Mächtigkeit m aus. Dann lautet die Grundwasserströmungsgleichung, Gl. (3.52):

$$S_0 \frac{\partial h}{\partial t} - K \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - K \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - K \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = W_0 \quad (3.55)$$

Mit der Dupuit-Annahme fällt der Term $K \partial^2 h / \partial z^2$ weg:

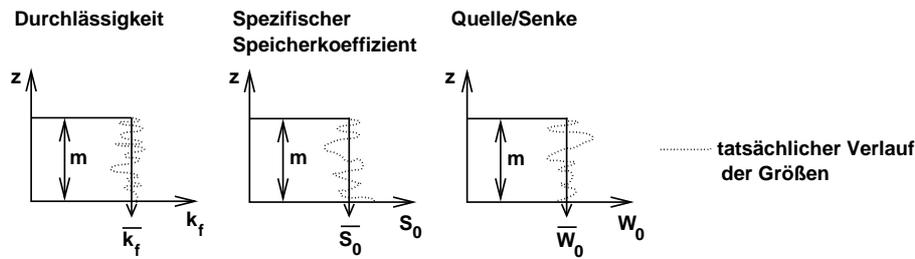
$$S_0 \frac{\partial h}{\partial t} - K \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - K \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = W_0 \quad (3.56)$$

Wir integrieren über die Mächtigkeit m :

$$\underbrace{\int_0^m S_0 dz}_{S} \frac{\partial h}{\partial t} - \underbrace{\int_0^m K dz}_{T} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = \underbrace{\int_0^m W_0 dz}_{W} \quad (3.57)$$

wobei die tiefenintegrierten Koeffizienten S [-] und T [m^2/s] als *Speicherkoeffizient* bzw. *Transmissivität* bezeichnet werden. Aus der volumenbezogenen Zugabe/Entnahmerate W_0 wurde die flächenbezogene Zugabe/Entnahmerate W [$m^3/s/m^2$].

Grundsätzlich muss der Grundwasserleiter weder homogen, noch isotrop oder von konstanter Mächtigkeit sein. Es ist lediglich wichtig, dass die Vertikalflüsse und die vertikale Variabilität der Piezometerhöhe vernachlässigt werden können. Dann sind die Transmissivität, der Speicherkoeffizient und die flächenbezogene Zugabe/Entnahmerate tiefenintegrierte Koeffizienten:

Abbildung 3.22: Tiefenmittelung von K , S_0 und W_0 .

$$\text{Transmissivität: } \mathbf{T}(x, y) = \int_0^m \mathbf{K}_{hor}(x, y, z_0 + \zeta) d\zeta = m \bar{\mathbf{K}}_{hor}(x, y) \quad (3.58)$$

$$\text{Speicherkoeffizient: } S(x, y) = \int_0^m S_0(x, y, z_0 + \zeta) d\zeta = m \bar{S}_0(x, y) \quad (3.59)$$

$$\text{Zugabe/Entnahmerate: } W(x, y) = \int_0^m W_0(x, y, z_0 + \zeta) d\zeta + q_z(x, y, z_0) - q_z(x, y, z_0 + m) \quad (3.60)$$

wobei $\bar{\mathbf{K}}_{hor}(x, y)$ und $\bar{S}_0(x, y)$ die arithmetischen Mittelwerte des Durchlässigkeitstensors (Horizontalkomponenten) und des spezifischen Speicherkoeffizienten über die Tiefe darstellen. z_0 ist die Höhenlage der Aquifersohle. Die flächenbezogene Zugabe/Entnahmerate $W(x, y)$ beinhaltet auch Zu- und Abflüsse an der Sohle und Oberfläche des Grundwasserkörpers, namentlich die Grundwasserneubildungsrate.

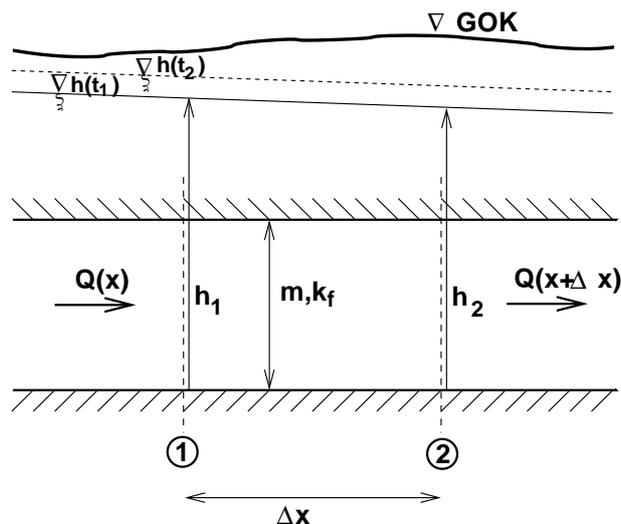


Abbildung 3.23: Gespannter Grundwasserleiter.

Gespannter Grundwasserleiter

In einem gespannten Grundwasserleiter ist die wassererfüllte Mächtigkeit unabhängig von der Standrohrspiegelhöhe. Damit ergibt sich folgende tiefenintegrierte Grundwasserströmungsgleichung:

$$\boxed{S \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{T} \nabla h) = W} \quad (3.61)$$

Gl. (3.61) ist formal identisch zur dreidimensionalen Grundwasserströmungsgleichung, Gl. (3.52). Lediglich die punktbezogenen Koeffizienten S_0 , \mathbf{K} und W_0 wurden durch die tiefenintegrierten Koeffizienten S , \mathbf{T} und W ersetzt. Es ist zu bemerken, dass ein Grundwasserleiter mit homogenem K -Wert bei tiefenintegrierter Betrachtung heterogen sein kann, wenn die Mächtigkeit m räumlich variiert. Für homogene, isotrope Bedingungen erhalten wir:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} - T \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = W \quad (3.62)$$

Stromfunktion

Für zweidimensionale divergenzfreie Strömungen (stationär, quellen/senkenfrei) können wir eine Stromfunktion Ψ definieren, deren Isolinien überall in Richtung der Strömungsgeschwindigkeit weist (Stromlinien):

$$\Psi = \frac{\partial q_x}{\partial y} = -\frac{\partial q_y}{\partial x} \quad (3.63)$$

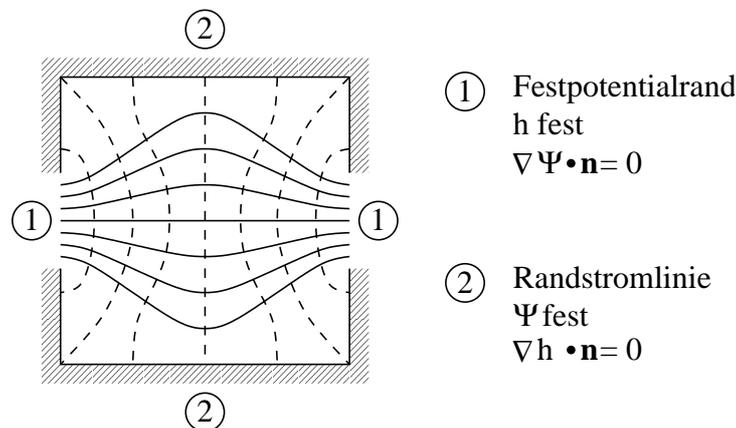


Abbildung 3.24: Randbedingungen für die Standrohrspiegelhöhe (gestrichelt) und die Stromfunktion (durchgezogen).

Es kann gezeigt werden, dass die Stromfunktion in einem gespannten Grundwasserleiter bei stationärer, quellen/senkenfreier Strömung mit folgender partieller Differentialgleichung beschrieben werden kann:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{T}}{\det(\mathbf{T})} \nabla \Psi \right) = 0 \quad (3.64)$$

Ein erster Unterschied zum gespannten Grundwasserleiter ergibt sich im Speicherterm. Mit der zeitlichen Veränderung der Standrohrspiegelhöhe verändert sich die wassererfüllte Mächtigkeit. Dieser Beitrag zum Speicherungsvermögen des Grundwasserleiters ist viel größer als der Beitrag aus der Kompressibilität von Wasser und Porengefüge, der sich im Speicherkoeffizient S widerspiegelt:

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho_w n_f d\zeta = n_f \frac{\partial h}{\partial t} + S \frac{\partial h}{\partial t} \approx n_f \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.68)$$

Während die typische Größenordnung des Speicherkoeffizienten S um 10^{-4} liegt, beträgt die Porosität etwa 10^{-1} .

Der tiefenintegrierte Quell/Senkenterm W errechnet sich aus:

$$W = \int_0^h W_0 d\zeta + q_z(x, y, 0) \underbrace{- q_z(x, y, h)}_N \approx N \quad (3.69)$$

Er ist meistens von der Grundwasserneubildungsrate N , die hier als negative vertikale Filtergeschwindigkeit $-q_z(x, y, h)$ an der Grundwasseroberfläche dargestellt ist, dominiert.

Der zweite Unterschied zwischen freiem und gespannten Grundwasserleiter ergibt sich aus der tiefenintegrierten Filtergeschwindigkeit. Unter Annahme eines mittleren, isotropen K -Wertes \bar{K} ergibt die Integration:

$$\int_0^h \mathbf{q}_{hor} d\zeta = \int_0^h K \nabla h d\zeta = \bar{K} h \nabla h \quad (3.70)$$

Das heißt der tiefenintegrierte Fluss hängt nicht mehr linear vom hydraulischen Gradienten ∇h , sondern von dem Produkt aus der Standrohrspiegelhöhe und ihrem Gradienten $h \nabla h$. Damit ergibt sich die folgende nichtlineare partielle Differentialgleichung:

$$\boxed{n_e \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (\bar{K} h \nabla h) = N} \quad (3.71)$$

Der Term $h \nabla h$ lässt sich unter Anwendung der Kettenregel umformulieren:

$$h \nabla h = \frac{1}{2} \nabla h^2 \quad (3.72)$$

womit die tiefenintegrierte Grundwasserströmungsgleichung für freie Grundwasserleiter wie folgt dargestellt werden kann:

$$n_e \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{2} \nabla \cdot (\bar{K} \nabla h^2) = N \quad (3.73)$$

Diese Form der Grundwasserströmungsgleichung ist bei stationären Verhältnissen ($\partial h / \partial t = 0$) günstig:

$$\boxed{-\nabla \cdot (\bar{K} \nabla h^2) = 2N} \quad (3.74)$$

Bei stationären Verhältnissen können wir die nichtlineare Strömungsgleichung für den freien Grundwasserleiter durch eine lineare Gleichung ersetzen, in dem wir nach dem Quadrat h^2 der Standrohrspiegelhöhe anstatt der Standrohrspiegelhöhe h selber lösen.

Halbgespannter Grundwasserleiter

Ein halbgespannter Grundwasserleiter ist ein an sich gespannter Grundwasserleiter, der mit anderen Grundwasserhorizonten im Austausch steht. Abb. 3.26 zeigt einen halbgespannten Grundwasserleiter mit der zugehörigen Standrohrspiegelhöhe h , der über eine mäßig durchlässige Schicht mit einem Grundwasserleiter im Hangenden (zugehörige Standrohrspiegelhöhe h_a) und über eine zweite mäßig durchlässige Schicht mit einem Grundwasserleiter im Liegenden (zugehörige Standrohrspiegelhöhe h_b) im hydraulischen Kontakt steht. Während die Strömung im halbgespannten Hauptgrundwasserleiter als horizontal angenommen werden darf, verläuft sie in den Zwischenschichten vertikal. Die Zwischenschicht zum hangenden GW-Horizont hat die Dicke d_a und die Durchlässigkeit K_a , wohingegen die Zwischenschicht zum liegenden GW-Horizont die Dicke d_b und die Durchlässigkeit K_b aufweist.

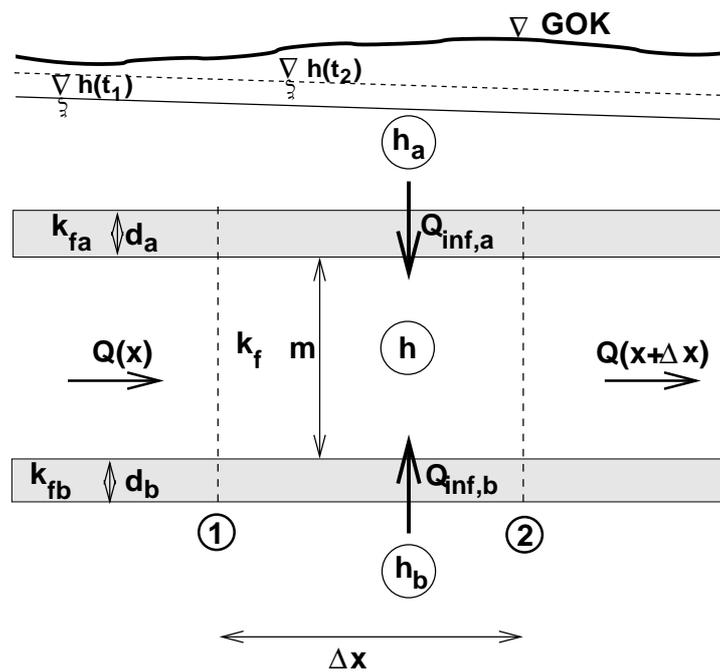


Abbildung 3.26: Halbgespannter Grundwasserleiter.

Wir betrachten nun die Strömungsgleichung für den Hauptgrundwasserleiter, der hier als homogen und isotrop betrachtet wird:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} - T \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = W \quad (3.62)$$

Der Austausch mit den anderen Grundwasserstockwerken wird nun im Quell/Senkenterm W berücksichtigt:

$$W = m \bar{W}_0 + \underbrace{q_z(x, y, z_0)}_{Q_{inf,b}} - \underbrace{q_z(x, y, z_0 + m)}_{-Q_{inf,a}} \quad (3.75)$$

Hierbei sind $Q_{inf,a}$ und $Q_{inf,b}$ die spezifischen Infiltrationsraten von den Horizont a bzw. b zum Hauptgrundwasserleiter. Da wir in den Zwischenschichten vertikale Strömung annehmen

können wir die Infiltrationsraten mit dem Darcy-Gesetz berechnen:

$$Q_{inf,a}(x, y) = K_a \frac{h_a(x, y) - h(x, y)}{d_a} \quad (3.76)$$

$$Q_{inf,b}(x, y) = K_b \frac{h_b(x, y) - h(x, y)}{d_b} \quad (3.77)$$

wobei die Piezometerhöhenverteilung $h_a(x, y)$ und $h_b(x, y)$ in den anderen Grundwasserstockwerken bekannt sein oder ebenfalls errechnet werden müssen. Substitution in Gl. (3.62) ergibt:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} - T \nabla^2 h = m \bar{W}_0 + K_a \frac{h_a - h}{d_a} + K_b \frac{h_b - h}{d_b} \quad (3.78)$$

oder

$$\frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla^2 h = \frac{m \bar{W}_0}{T} + \frac{K_a}{T d_a} (h_a - h) + \frac{K_b}{T d_b} (h_b - h) \quad (3.79)$$

Es ist gebräuchlich, die Austauschsterme zwischen den Grundwasserstockwerken mit sogenannten *Leakage-Koeffizienten* λ [m] zu beschreiben. Der Leakage-Koeffizient λ_i , der den Austausch durch die Zwischenschicht i beschreibt, ist wie folgt definiert:

$$\lambda_i = \sqrt{\frac{T d_i}{K_i}} \quad (3.80)$$

womit die Grundwasserströmungsgleichung für den halbgespannten Grundwasserleiter folgende Form annimmt:

$$\frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \frac{h_a - h}{\lambda_a^2} - \frac{h_b - h}{\lambda_b^2} = \frac{m \bar{W}_0}{T} \quad (3.81)$$

Im allgemeinen Fall muss für jedes Grundwasserstockwerk eine eigene Grundwasserströmungsgleichung aufgestellt werden (je eine Gleichung für h , h_a und h_b), die über die Leakage-Terme miteinander gekoppelt sind. Dies ergibt einen "zweieinhalbdimensionalen" Ansatz, bei dem jedes Grundwasserstockwerk für sich tiefenintegriert betrachtet wird. Während die Strömung in den Grundwasserstockwerken als horizontal angenommen wird, wird sie in den Zwischenschichten vertikal approximiert. Für diese Modellbetrachtung bestehen geschlossene Lösungen bei einfachen Randbedingungen. Sie wird jedoch auch häufig in der numerischen Simulation der regionalen Grundwasserströmung verwendet, weil der Rechenaufwand bei "zweieinhalbdimensionaler" Betrachtung sehr viel kleiner ist als bei vollständig aufgelöster dreidimensionaler Betrachtung.

3.4.4 Querschnittsintegrierte Betrachtung

So wie wir in den vorhergegangenen Abschnitten die Speicherterme und die Flüsse über die Tiefe integriert haben, können wir in einem röhrenförmigen porösen Medium, in dem der Fluss vornehmlich in die Längsrichtung x erfolgt, eine Integration über die Querschnittsfläche A vornehmen. Die resultierende Grundwasserströmungsgleichung ist eindimensional. Abb. 3.27 veranschaulicht die Betrachtungsweise.

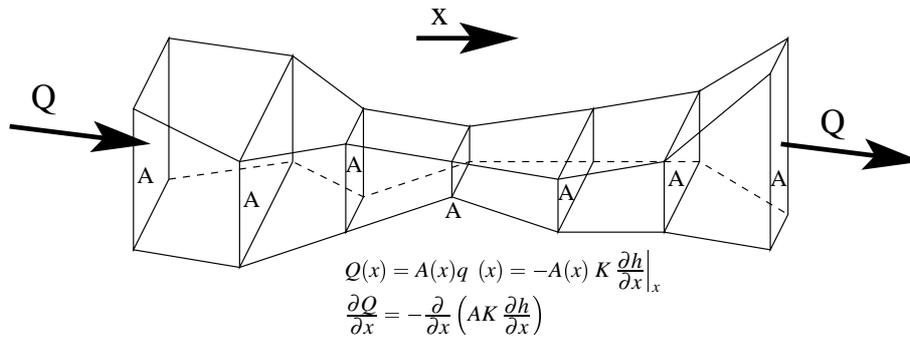


Abbildung 3.27: Eindimensionale Betrachtung der Strömung durch ein röhrenförmiges poröses Medium mit variabler Querschnittsfläche A .

Die Wassermassenbilanz für eine Scheibe des eindimensionalen Grundwasserleiters lautet:

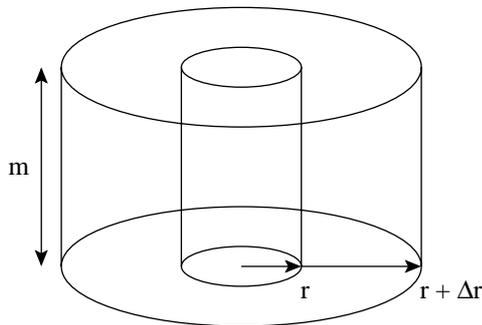
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{A(x)} \rho_w n_e dA + \frac{\partial (\rho_w Q)}{\partial x} = \text{interne Quellen/Senken} - \text{Massenfluss über die Oberfläche} \quad (3.82)$$

wobei $Q(x)$ der Gesamtvolumenstrom an der Stelle x ist, der sich aus dem Produkt der Filtergeschwindigkeit $v_f(x)$ mit der Querschnittsfläche $A(x)$ errechnet. Dies ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{A(x)} \rho_w n_e dA + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{A(x)} \rho_w q_x dA \right) = \int_{A(x)} \rho_w W_0 dA - \oint_{S(x)} \rho_w \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}(x) dS \quad (3.83)$$

mit dem Röhrenumfang $S(x)$. Wir setzen jetzt das Darcy-Gesetz für die Berechnung der Filtergeschwindigkeit ein und fassen die rechte Seite durch eine Gesamtzugabe/entnahmerate W_{tot} [$m^3/s/m$] zusammen. Unter Vernachlässigung des räumlichen Dichtegradienten und Verwendung des spezifischen Speicherkoeffizienten S_0 ergibt sich:

$$\boxed{n_e \frac{\partial A}{\partial t} + \bar{S}_0 A \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(AK \frac{\partial h}{\partial x} \right) = W_{tot}} \quad (3.84)$$



$$\begin{aligned} A(r) &= 2\pi r m \\ q(r) &= -K \frac{\partial h}{\partial r} \\ Q(r) &= A(r)q(r) = -2\pi r K m \frac{\partial h}{\partial r} \\ \frac{\partial Q}{\partial r} &= -2\pi T \frac{\partial h}{\partial r} - 2\pi r T \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} \end{aligned}$$

Abbildung 3.28: Radial-symmetrische Anströmung eines Brunnens.

Ein wichtiger Fall der querschnittsgemittelten Grundwasserströmung ist die radialsymmetrische Anströmung eines Brunnens, die in Abschnitt 3.6 näher behandelt wird. Hier erfolgt die Strömung in radialer Richtung. Die Querschnittsfläche entspricht der Mantelfläche $2\pi r m$ bei

Radius r . Damit erhalten wir für einen gespannten, homogenen, isotropen Grundwasserleiter ohne Quellen und Senken:

$$\boxed{S \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{T}{r} \frac{\partial h}{\partial r} - T \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} = 0} \quad (3.85)$$

3.5 Analytische Berechnung der eindimensionalen stationären Grundwasserströmung

In der stationären Grundwasserströmung sind die Verteilungen der Piezometerhöhe und der Geschwindigkeit zeitunabhängig. Bei eindimensionaler Betrachtung ergibt sich ausschließlich eine Abhängigkeit von der Längskoordinate x . Ohne interne Quellen und Senken ist der Gesamtdurchfluss $Q(x)$ konstant:

$$Q(x) = A(x)q(x) = -A(x)K(x) \frac{dh}{dx} = \text{konstant} \quad \forall x \quad (3.86)$$

Hiebei ist $A(x)$ die Querschnittsfläche.

3.5.1 Gespannter Grundwasserleiter

Wir betrachten einen gespannten, eindimensionalen Grundwasserleiter mit konstanter Querschnittsfläche A und konstantem Durchlässigkeitsbeiwert K . Der betrachtete Abschnitt habe die Länge L . Die Piezometerhöhe am Einlauf betrage h_0 und die am Auslauf h_L . Dies ergibt die folgende gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{Q}{AK} = -\frac{q}{K} \quad (3.87)$$

$$h(0) = h_0 \quad (3.88)$$

$$h(L) = h_L \quad (3.89)$$

Als Lösung ergibt sich der lineare Verlauf der Piezometerhöhe zwischen Ein- und Auslauf:

$$\boxed{h(x) = h_0 + x \frac{h_L - h_0}{L}} \quad (3.90)$$

$$q = K \frac{h_0 - h_L}{L} \quad (3.91)$$

3.5.2 Freier Grundwasserleiter

Wir betrachten einen freien Grundwasserleiter mit konstanter Breite b , konstantem Durchlässigkeitsbeiwert K und stationärer Piezometerhöhenverteilung. Dann vereinfacht sich Gl. (3.74) zu:

$$-K \frac{d^2 h^2}{dx^2} = 2N \quad (3.92)$$

wobei N die Grundwasserneubildungsrate [$m^3/s/m^2$] ist. Gl. (3.92) ist eine gewöhnliche nicht-lineare Differentialgleichung für h . Sie wird jedoch linear, wenn wir nach h^2 anstelle von h lösen:

$$u = h^2 \quad (3.93)$$

Dies ergibt:

$$-K \frac{d^2 u}{dx^2} = 2N \quad (3.94)$$

$$\int dx \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{2N}{K}x + C_1$$

$$\int dx \Rightarrow u = -\frac{N}{K}x^2 + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow h^2(x) = -\frac{N}{K}x^2 + C_1x + C_2 \quad (3.95)$$

Nun berücksichtigen wir die Randbedingungen. Die Piezometerhöhe am Einlauf betrage h_0 und die am Auslauf h_L . Hieraus ergeben sich die Integrationskoeffizienten C_1 und C_2 :

$$h(0) = h_0 \Rightarrow C_2 = h_0^2 \quad (3.96)$$

$$h(L) = h_L \Rightarrow C_1 = \frac{h_L^2 - h_0^2}{L} + \frac{N}{K}L \quad (3.97)$$

und die Lösung für die Piezometerhöhenverteilung $h(x)$ lautet:

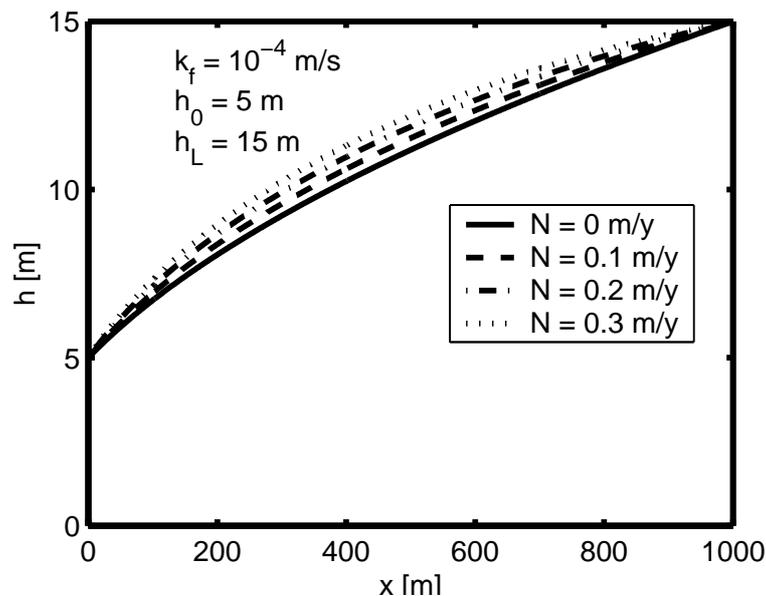


Abbildung 3.29: Piezometerhöhenprofil in einem freien Grundwasserleiter (Dupuit-Parabel).

$$h(x) = \sqrt{h_0^2 + \frac{N}{K}x(L-x) + (h_L^2 - h_0^2)\frac{x}{L}} \quad (3.98)$$

Gl. (3.98) ist als *Dupuitparabel* bekannt. Abb. 3.29 zeigt die Piezometerhöhenverteilung $h(x)$ für unterschiedliche Neubildungsraten N . Der breitenspezifische Durchfluss $Q(x)/b$ beträgt:

$$\frac{Q(x)}{b} = -Kh \frac{dh}{dx} = \frac{K(h_0^2 - h_L^2)}{2L} + N \left(x - \frac{L}{2} \right) \quad (3.99)$$

3.5.3 Halbgespannter Grundwasserleiter

Wir betrachten einen halbbunendlichen Grundwasserleiter, dessen Piezometerhöhe bei $x = 0$ auf den Wert h_0 fixiert ist. Er ist durch eine halbdurchlässige Schicht mit einem anderen Grundwasserleiter (oder einem Oberflächengewässer) verbunden, in dem die Piezometerhöhe konstant h_∞ beträgt. Dies ist auch die Piezometerhöhe im halbgespannten Grundwasserleiter im Limit $x \rightarrow \infty$. Für eine konstante Querschnittsfläche, eine konstante Durchlässigkeit und stationäre, eindimensionale Verhältnisse vereinfacht sich Gl. (3.81) zu:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{h - h_\infty}{\lambda^2} = 0 \quad (3.100)$$

mit den Randbedingungen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = h_\infty \quad (3.101)$$

$$h(0) = h_0 \quad (3.102)$$

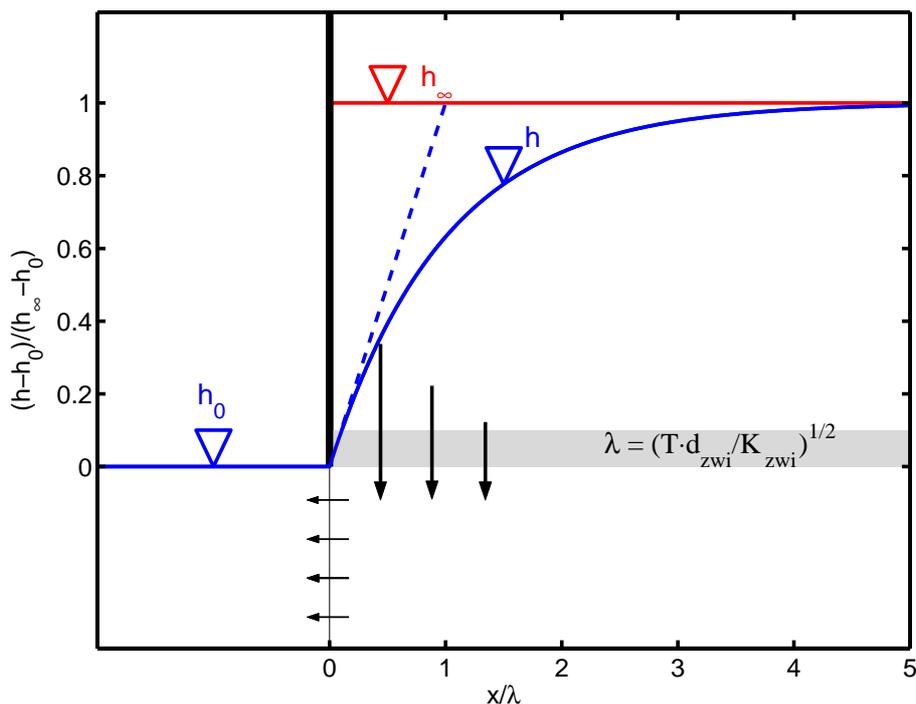


Abbildung 3.30: Piezometerhöhenprofil in einem halbgespannten Grundwasserleiter.

Gl. (3.100) ist eine heterogene gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, die sich mit dem folgenden allgemeinen Ansatz lösen lässt:

$$h(x) = h_\infty + C_1 \exp\left(\frac{x}{\lambda}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \quad (3.103)$$

Die Berücksichtigung der Randbedingungen ergibt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = h_{\infty} + C_1 \underbrace{\exp\left(\frac{x}{\lambda}\right)}_{\rightarrow \infty} \stackrel{!}{=} h_{\infty} \implies C_1 = 0 \quad (3.104)$$

$$h(0) = h_{\infty} + C_2 \stackrel{!}{=} h_0 \implies C_2 = h_0 - h_{\infty} \quad (3.105)$$

$$\implies \boxed{h(x) = h_{\infty} + (h_0 - h_{\infty}) \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)} \quad (3.106)$$

Das heißt, die Piezometerhöhe im halbgespannten Grundwasserleiter gleicht sich exponentiell dem Wert in dem anderen Grundwasserleiter an. Der breitenspezifische Durchfluss $Q(x)/b$ beträgt:

$$\frac{Q(x)}{b} = -T \frac{dh}{dx} = T \frac{h_0 - h_{\infty}}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \quad (3.107)$$

Für kleine Werte von x lässt sich die Exponentialfunktion linear approximieren:

$$\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \approx 1 - \frac{x}{\lambda} \quad (3.108)$$

$$\implies h(x) \approx h_0 + (h_{\infty} - h_0) \frac{x}{\lambda} \quad (3.109)$$

3.5.4 Fragmentenmethode

Die oben aufgeführten Elementarlösungen können zur Berechnung der Strömung in Systemen mit räumlich wechselnden Verhältnissen beliebig kombiniert werden. Als Beispiel ist in Abb. 3.31 die Unterströmung eines Damms der Breite B zwischen zwei unterschiedlich eingestauten Becken dargestellt. Der Damm wird als vollständig undurchlässig angenommen. Der Grundwasserleiter ist gegenüber beiden Becken mit einer halbdurchlässigen Schicht abgedichtet; d.h. er ist unter den Becken als halbgespannt und unter dem Damm als gespannt zu betrachten. Der Wasserstand im Oberwasser beträgt h_1 und der im Unterwasser h_4 . Die Piezometerhöhe im Grundwasserleiter am Übergang zwischen Oberwasser und Damm ist mit h_2 bezeichnet und diejenige am Übergang zwischen Damm und Unterwasser mit h_3 .

Für die Strömung im gespannten Bereich können Gln. (3.90 & 3.91) angesetzt werden:

$$h(x) = h_2 + (h_3 - h_2) \left(\frac{x + B/2}{B}\right) \quad -B/2 \leq x \leq +B/2 \quad (3.110)$$

$$\frac{Q}{b} = T \frac{h_2 - h_3}{B} \quad -B/2 \leq x \leq +B/2 \quad (3.111)$$

Allerdings sind die Piezometerhöhen h_2 und h_3 an den Übergängen vom gespannten in die halbgespannten Bereiche nicht bekannt. Im halbgespannten Bereich unterhalb des Oberwassers können Gln. (3.106 & 3.107) angesetzt werden:

$$h = h_1 + (h_2 - h_1) \exp\left(\frac{x + B/2}{\lambda_{up}}\right) \quad x \leq -B/2 \quad (3.112)$$

$$\frac{Q(-B/2)}{b} = T \frac{h_1 - h_2}{\lambda_{up}} \quad (3.113)$$

wobei $\lambda_{up} = \sqrt{T d_{up} / K_{up}}$ der Leakagekoeffizient für die halbdurchlässige Schicht im Oberwasser ist (d_{up} und K_{up} sind die Dicke und Durchlässigkeit der halbdurchlässigen Schicht).

Zu- und Abflussrändern die Festpotentiale des Ober- und Unterwassers angelegt werden.

3.6 Stationäre Brunnenströmung

3.6.1 Gespannter Grundwasserleiter

Wir betrachten einen gespannten Grundwasserleiter mit konstanter Transmissivität. Es besteht keine regionale Grundwasserströmung, d.h. ohne Brunnenbetrieb ruht das Grundwasser. Wenn wir einen Brunnen betreiben, strömt das Wasser gleichmäßig von allen Seiten zu (oder fließt gleichmäßig in alle Richtungen ab). Es ist deshalb zulässig das System als radialsymmetrisch zu betrachten. Im stationären Zustand und unter Vernachlässigung von Quell-/Senkentermen außerhalb des Brunnens ist der Gesamtdurchfluss, der durch die Mantelfläche eines Zylinders mit Radius r und Höhe m durchtritt konstant. Zur Orientierung sei Abb. 3.28 nochmals dargestellt.

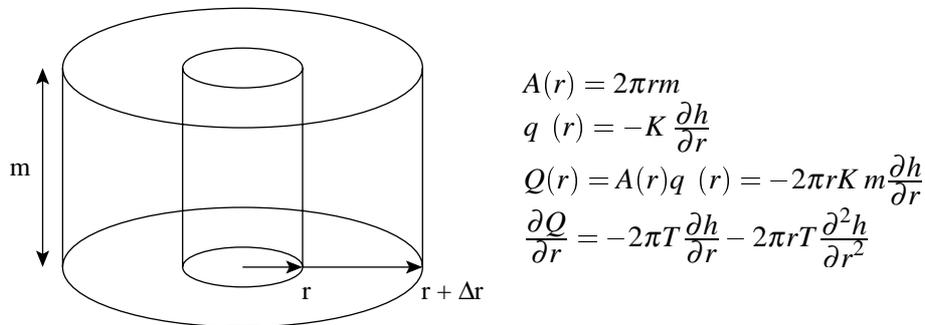


Abbildung 3.32: Radial-symmetrische Anströmung eines Brunnens.

Die Pumprate im Brunnen wird mit Q_w bezeichnet. Bei $Q_w > 0$ handelt es sich um eine Zugabe und bei $Q_w < 0$ um eine Entnahme. Dann ergibt die Anwendung des Fließgesetzes von Darcy und die Kontinuität des Gesamtflusses:

$$Q(r) = -2\pi r T \frac{\partial h}{\partial r} = Q_w \quad \forall r \quad (3.119)$$

Hieraus lässt sich die Standrohrspiegelhöhenverteilung $h(r)$ durch Trennung der Variablen und anschließender Integration ermitteln:

$$-\frac{Q_w}{2\pi r T} dr = dh \quad (3.120)$$

$$-\frac{Q_w}{2\pi T} \ln(r) = h + C \quad (3.121)$$

Die Integrationskonstante C muss sich aus einer Randbedingung ergeben. Im sogenannten *Dupuit-Thiem-Verfahren* [Thiem 1906] wird die Piezometerhöhe für zwei unterschiedliche Radien r_1 und r_2 betrachtet. Damit lässt sich die Integrationskonstante durch Subtraktion eliminieren:

$$h_1 - h_2 = \frac{Q_w}{2\pi T} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad (3.122)$$

Als einer der beiden Radien kann der Brunnenradius r_w gewählt werden. Es ist jedoch gebräuchlicher, eine Reichweite R zu definieren, für die angenommen wird, dass die Standrohrspiegelhöhe vom Brunnenbetrieb nicht beeinflusst wird. D.h. für $r = R$ ist die Absenkung (bzw. Aufhöhung) null und die Piezometerhöhe entspricht der Ruhespiegellage h_0 :

$$h(R) = h_0 \quad (3.123)$$

Dann ergibt sich die Standrohrspiegelhöhenverteilung $h(r)$:

$$h(r) = h_0 + \frac{Q_w}{2\pi T} \ln \left(\frac{R}{r} \right) \quad (3.124)$$

Alternativ zur Standrohrspiegelhöhe $h(r)$ kann die Absenkung $s(r) = h_0 - h(r)$ betrachtet werden. Dann lassen sich Gln. (3.122 & 3.124) als Absenkungsgleichungen beschreiben:

$$s(r_1) - s(r_2) = \frac{Q_w}{2\pi T} \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \quad (3.125)$$

$$\boxed{s(r) = h_0 - h(r) = \frac{Q_w}{2\pi T} \ln \left(\frac{r}{R} \right)} \quad (3.126)$$

Es ist zu berücksichtigen, dass das Vorzeichen von Q_w bei einer Entnahme negativ ist. In einigen Lehrbüchern sind Entnahmen positiv definiert, sodass sich der Bruch im Logarithmus umdreht [Hölting 1995, Langguth & Voigt 1980].

Reichweite

Das Konzept der Reichweite ist für einen unendlich ausgedehnten Grundwasserleiter im stationären Zustand ohne Neubildung eigentlich falsch. Nur für den Fall eines Brunnens im Mittelpunkt einer kreisrunden Insel innerhalb eines Süßwassersees ergäbe sich - ohne Grundwasserneubildung - eine definierte Reichweite. In realen Grundwasserleitern ist jedoch die Annahme, dass überhaupt keine vertikalen Wasserzutritte auftreten, in ihrer Absolutheit nicht gerechtfertigt. Außerdem wird der stationäre Zustand eigentlich niemals vollständig erreicht; es kann jedoch ein quasi-stationärer Zustand auftreten, in dem die Differenzen der Grundwasserstände zwischen zwei Punkten innerhalb einer Kernzone um den Brunnen zeitlich nicht mehr variieren. Vor diesem Hintergrund wurden verschiedene halbempirische Formeln zur Berechnung der Reichweite R entwickelt, die in Tabelle 3.11 aufgeführt sind.

Tabelle 3.11: Abschätzungsformeln für die Reichweite R .

Sichardt [1928]	$R \approx 3000 s_w \sqrt{K}$
Kusakin [Strozodka 1977]	$R \approx 575 s_w \sqrt{K h_0}$
Weber [1928]	$R \approx 3 \sqrt{\frac{h_0 K t}{n_f}}$
Lembke [1886, 1887]	$R \approx h_0 \sqrt{\frac{K}{2N}}$

t [s]: Absenkungszeit; n_f [-]: nutzbarer Hohlraumanteil; N [m/s]: Neubildungsrate; h_0 [m]: ungestörte Wasserspiegellage; s_w [m]: Absenkung im Brunnen; K [m/s]: Durchlässigkeitsbeiwert

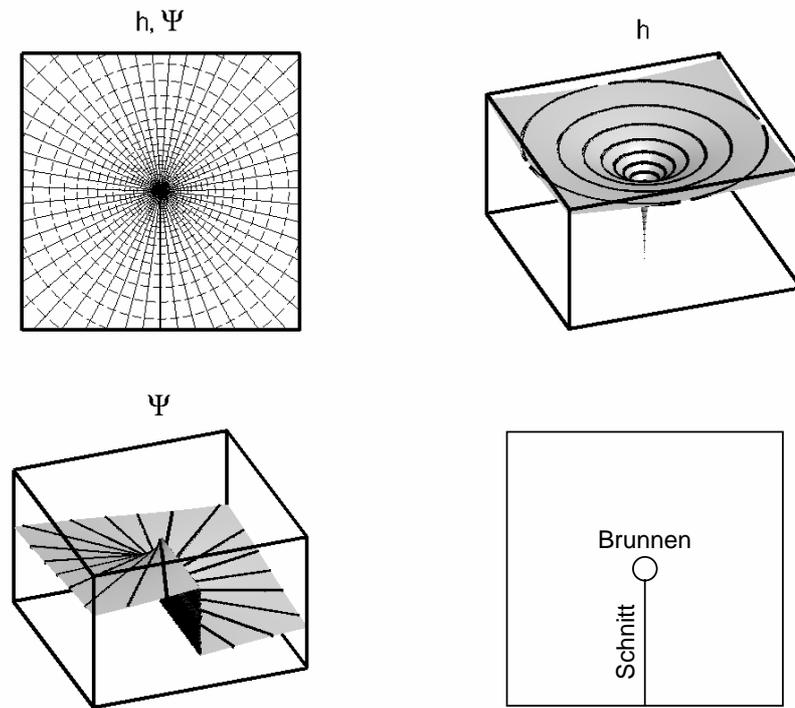


Abbildung 3.33: Verteilung der Piezometerhöhe h und der Stromfunktion Ψ für einen Einzelbrunnen in einem gespannten Grundwasserleiter ohne Grundströmung.

Stromfunktion

Grundsätzlich ist es nicht möglich die Stromfunktion für Strömungen mit internen Quellen und Senken zu formulieren. Im Fall einer idealisierten Brunnenströmung findet die Volumenzugabe/entnahme nur im Brunnen statt. Wir können die Stromfunktion definieren, wenn wir den Brunnen zum Bestandteil des äußeren Randes machen. Hierzu führen wir einen Schnitt vom äußeren Rand zum Brunnen durch. Entlang des Brunnumfangs nimmt die Stromfunktion linear mit dem Winkel zu. Entlang des Schnittes ergibt sich ein Sprung $\Delta\Psi$ in der Stromfunktion von Q_w/m . Damit können die Verteilungen der Piezometerhöhe und der Stromfunktion in zweidimensionaler Darstellung wie folgt berechnet werden:

$$h(x, y) = -\frac{Q_w}{2\pi T} \ln \left(\sqrt{(x - x_w)^2 + (y - y_w)^2} \right) + C_h \quad (3.127)$$

$$\Psi(x, y) = \frac{Q_w}{2\pi m} \arctan \left(\frac{y - y_w}{x - x_w} \right) + C_\Psi \quad (3.128)$$

wobei C_h und C_Ψ Integrationskonstanten sind, die für die Konstruktion eines Strömungsnetzes nicht relevant sind. In Gl. (3.128) wurde der Schnitt in x -Richtung durchgeführt; jeder andere Winkel ist denkbar. Wie bei der Berechnung der regionalen Strömung mit mehreren Brunnen gezeigt wird, kann es günstiger sein, andere Schnitte vorzunehmen, die z.B. einen Entnahmebrunnen mit einem Zugabebrunnen verbinden. Abb. 3.33 zeigt ein Strömungsnetz und die zugehörigen Verteilungen von h und Ψ als dreidimensionale Darstellungen.

3.6.2 Halbgespannter Grundwasserleiter

Wir betrachten einen halbgespannten, homogenen, isotropen Grundwasserleiter ohne Grundströmung, der mit einem anderen Grundwasserleiter mit konstanter Piezometerhöhe h_0 über eine halbdurchlässige Schicht mit Dicke d_{zwi} und Durchlässigkeit K_{zwi} verbunden ist. Die Transmissivität des halbgespannten Grundwasserleiters beträgt T . Der Grundwasserleiter ist über die gesamte Mächtigkeit m verfiltert. Die Pumprate beträgt Q_w (> 0 für Zugabe, < 0 für Entnahme). Abb. 3.34 verdeutlicht die Situation.

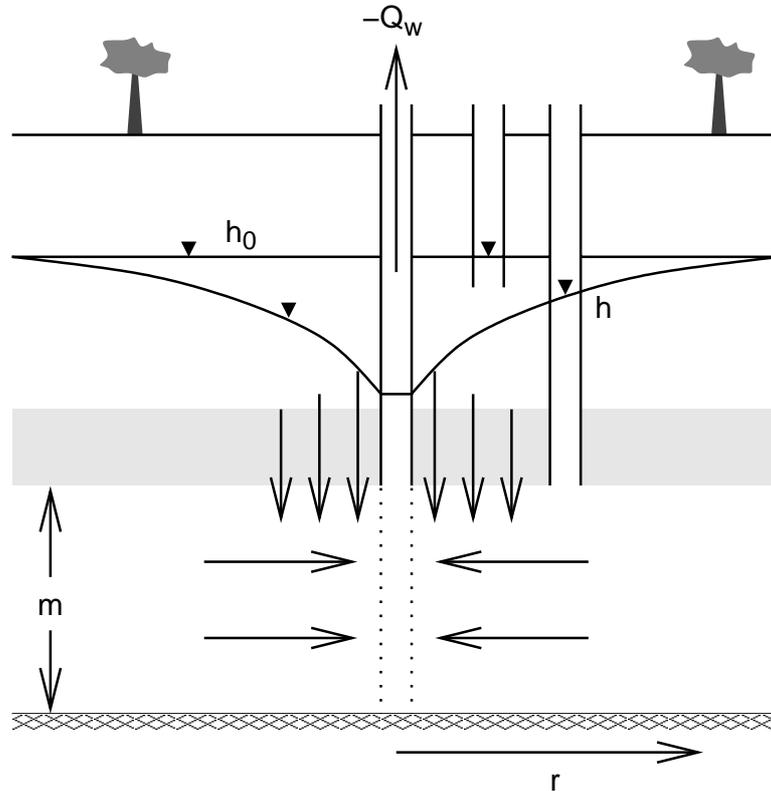


Abbildung 3.34: Brunnenströmung in einem halbgespannten Grundwasserleiter.

Der Gesamtdurchfluss $Q(r)$ über die Zylinderfläche bei einem Abstand r zum Brunnen beträgt:

$$Q(r) = -2\pi r T \frac{\partial h}{\partial r} \quad (3.129)$$

Wegen des Austausches mit dem anderen Grundwasserstockwerk ist der Gesamtdurchfluss $Q(r)$ nicht konstant. Es ergibt sich vielmehr ein über den Kreisumfang verteilter Quell/Senken-term von $K_{zwi} (h_0 - h(r)) / d_{zwi}$. Entsprechend ergibt sich aus Kontinuitätsgründen:

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = 2\pi r K_{zwi} \frac{h_0 - h(r)}{d_{zwi}} \quad (3.130)$$

$$-T \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) = r K_{zwi} \frac{h_0 - h(r)}{d_{zwi}} \quad (3.131)$$

Als Randbedingungen ist zu berücksichtigen, dass der Gesamtfluss im Limit $r \rightarrow 0$ der Pumprate entspricht, und dass die Standrohrspiegelhöhe sich bei unendlichem Abstand dem Wert im anderen Grundwasserleiter annähert:

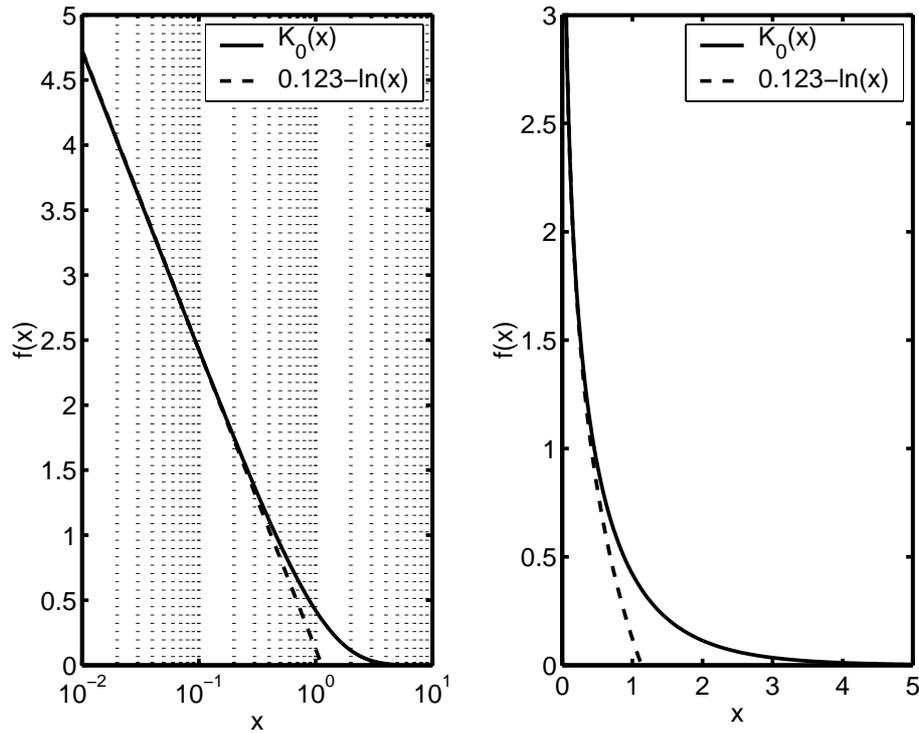


Abbildung 3.35: Modifizierte Bessel Funktion zweiter Art nullter Ordnung $K_0(x)$ und ihre Approximation durch $0.123 - \ln(x)$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} Q(r) = \lim_{r \rightarrow 0} -2\pi r T \frac{\partial h}{\partial r} = Q_w \quad (3.132)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = h_0 \quad (3.133)$$

Wir verwenden jetzt die Absenkung $s(r) = h_0 - h(r)$ und die Definition des Leakagekoeffizienten $\lambda = \sqrt{T d_{zwi} / K_{zwi}}$. Dann wird aus Gln. (3.131 - 3.133):

$$\frac{\partial s}{\partial r} + r \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} - r \frac{s}{\lambda^2} = 0 \quad (3.134)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} s(r) = 0 \quad (3.135)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{Q_w}{2\pi T} \quad (3.136)$$

mit der Lösung:

$$s(r) = -\frac{Q_w}{2\pi T} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad (3.137)$$

K_0 ist die modifizierte Besselfunktion zweiter Art nullter Ordnung (zur Berechnung siehe Abschnitt 9.6 in Abramowitz & Stegun [1974]). Abb. 3.35 zeigt den Graph von $K_0(x)$ in linearer und halblogarithmischer Darstellung. Für kleine Werte von r/λ kann $K_0(r/\lambda)$ wie folgt approximiert werden:

$$K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) = 0.123 - \ln\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad \frac{r}{\lambda} \lesssim 0.5 \quad (3.138)$$

Das bedeutet, dass sich der halbgespannte Grundwasserleiter in direkter Nähe zum Brunnen wie ein gespannter Grundwasserleiter verhält.

Für Werte von $r/\lambda > 4.1$ beträgt $K_0(r/\lambda) < 0.01$. Im Gegensatz zum voll gespannten Grundwasserleiter gibt es im halbgespannten Grundwasserleiter einen echten stationären Zustand, weil eine Zusickerung stattfindet.

3.6.3 Freier Grundwasserleiter

Wir betrachten einen freien Grundwasserleiter mit homogener, isotroper Durchlässigkeit und ebener Sohle. Es besteht keine Grundströmung. Wie in den gespannten und halbgespannten Fällen bildet sich eine radialsymmetrische Strömung aus. Unter Vernachlässigung der vertikalen Geschwindigkeitskomponente (*Dupuit-Annahme*) können wir die Strömung als eindimensional und radialsymmetrisch betrachten. Im Gegensatz zu den vorher genannten Fällen ist jedoch der wasserdurchflossene Querschnitt nicht nur eine Funktion des Zylinderumfanges sondern auch der jeweiligen Standrohrspiegelhöhe $h(r)$. Zur Veranschaulichung siehe Abb. 3.36.

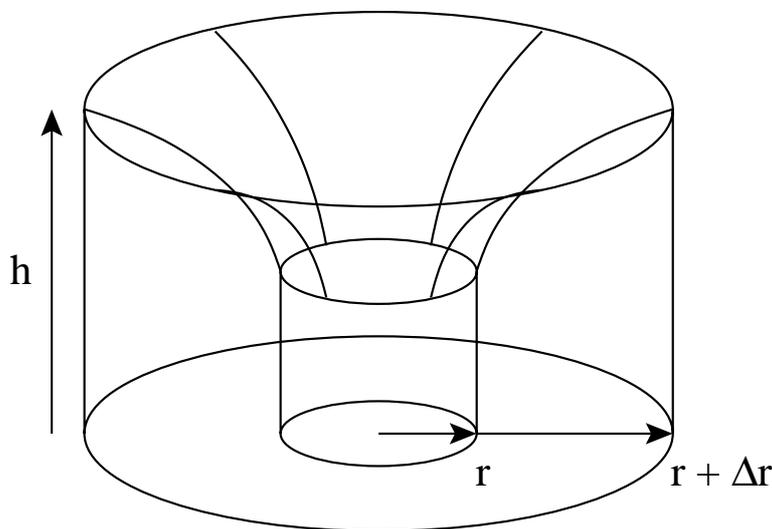


Abbildung 3.36: Grundwasserkörper in einem freien Grundwasserleiter mit Brunnen und ohne Grundströmung.

Ohne Neubildung

Zunächst betrachten wir den Fall der stationären Strömung ohne Grundwasserneubildung. Dann ist der Gesamtdurchfluss $Q(r)$ konstant:

$$\begin{aligned} Q(r) &= -2\pi r K h \frac{\partial h}{\partial r} \\ &= -\pi r K \frac{\partial h^2}{\partial r} = Q_w \quad \forall r \end{aligned} \quad (3.139)$$

Wie im Fall der eindimensionalen Strömung mit konstanter Breite, ergibt sich eine einfache

Lösung nach h^2 statt h . Sie beruht auf der Trennung der Variablen:

$$-\frac{Q_w}{\pi r K} dr = dh^2 \quad (3.140)$$

$$-\frac{Q_w}{\pi K} \ln(r) = h^2 + C \quad (3.141)$$

Wie im gespannten Fall ist ein stationärer Zustand in einem unendlich ausgedehnten Grundwasserleiter streng genommen nicht möglich. Wir können jedoch die in Tabelle 3.11 aufgelisteten Formeln zur empirischen Abschätzung einer Reichweite verwenden, für die eine Absenkung von Null angenommen wird. Für zwei Messstellen mit unterschiedlichem Anstand zum Brunnen ergibt sich nach dem *Dupuit-Thiem*-Verfahren [Thiem 1906]:

$$\boxed{h_1^2 - h_2^2 = \frac{Q_w}{\pi K} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (3.142)$$

Die Gleichung für den freien Grundwasserleiter, Gl. (3.142), unterscheidet sich von derjenigen des gespannten, Gl. (3.122), durch den Faktor $2m$ auf der rechten Seite und die Verwendung der Quadrate auf der linken Seite.

Korrigierte Absenkung nach Jacob

Jacob [1963] entwickelte ein Verfahren, um die Absenkung in einem freien Grundwasserleiter in eine äquivalente Absenkung in einem gespannten Grundwasserleiter mit konstanter Mächtigkeit der Ausgangswasserspiegellage h_0 zu überführen. Es besteht aus den folgenden Schritten:

$$\begin{aligned} \text{Gl. (3.142)} \quad & h_1^2 - h_2^2 = \frac{Q_w}{\pi K} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \\ \text{Erweiterung um } 2h_0 \implies & (h_1^2 - h_2^2) 2h_0 = \frac{Q_w}{\pi K} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) 2h_0 \\ \text{Transmissivität im} & \implies T = Kh_0 = \frac{Q_w}{2\pi (h_1^2 - h_2^2)} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) 2h_0 \\ \text{Ruhezustand} & \\ \text{Bringe } 2h_0 \text{ in} & \implies T = \frac{Q_w}{2\pi \left(\frac{h_1^2}{2h_0} - \frac{h_2^2}{2h_0}\right)} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \\ \text{den Nenner} & \\ \text{Erweiterung} & = \frac{Q_w}{2\pi \left(\left(\frac{h_1^2}{2h_0} + \frac{h_0}{2}\right) - \left(\frac{h_2^2}{2h_0} + \frac{h_0}{2}\right)\right)} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \\ \text{des Nenners} & \\ \text{Ersetze } h_i = h_0 - s_i & = \frac{Q_w}{2\pi \left(\left(\frac{s_1^2}{2h_0} - s_1\right) - \left(\frac{s_2^2}{2h_0} - s_2\right)\right)} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \\ \text{Ersetze } s'_i = s_i - \frac{s_i^2}{2h_0} & = \frac{Q_w}{2\pi (s'_1 - s'_2)} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \\ \implies & s'_1 - s'_2 = \frac{Q_w}{2\pi T} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \end{aligned} \quad (3.143)$$

Die letzte Gleichung ist äquivalent zur Absenkungsgleichung in einem gespannten Grundwasserleiter, Gl. (3.122). Das heißt, wir können die Absenkungsgleichung für einen gespannten

Grundwasserleiter auf einen freien Grundwasserleiter übertragen, wenn wir die tatsächliche Absenkung s durch eine korrigierte Absenkung s' ersetzen:

$$s' = s - \frac{s^2}{2h_0} = h_0 - \left(h + \frac{s^2}{2h_0} \right) \quad (3.144)$$

Die korrigierte Absenkung wird insbesondere in der Auswertung instationärer Pumpversuche verwendet. Sie hat jedoch auch eine zweite praktische Bedeutung. Bislang sind wir von der Gültigkeit der Dupuit-Annahme ausgegangen. D.h. wir nahmen eine Horizontalströmung an. Dies ist offensichtlich bei einer gekrümmten freien Oberfläche nicht möglich. Eine Folge der Abweichung von der Dupuit-Annahme besteht darin, dass der wasserdurchströmte Querschnitt größer ist als angenommen. Das bedeutet, die freie Grundwasseroberfläche liegt höher als nach Gl. (3.142) berechnet. Lediglich an der Aquifersohle stimmt die Druckfläche mit der Berechnung nach Dupuit, Gl. (3.142), überein.

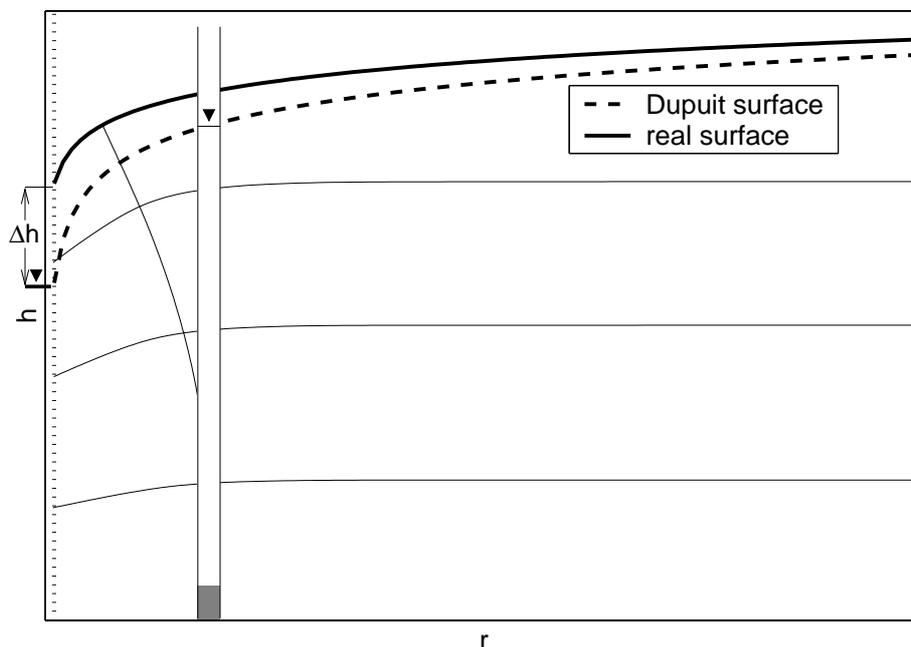


Abbildung 3.37: Vergleich zwischen tatsächlicher Lage der freien Oberfläche und der nach Dupuit berechneten.

Die Differenz zwischen tatsächlicher freier Oberfläche und Druckfläche an der Aquifersohle führt am Brunnenrand zur *freien Sickerstrecke*: Das oberhalb des Wasserstandes im Brunnen austretende Wasser tropft an der Brunneninnenseite ab. Nach Ehrenberger [1928] (empirisch) und Nahrgang [1965] entspricht die tatsächliche Lage der freien Oberfläche der korrigierten Absenkung nach Jacob [1963].

Mit Neubildung

In freien Grundwasserleitern findet ein vertikaler Zufluss im Wesentlichen infolge der Grundwasserneubildung statt. Die Volumenbilanz ergibt, dass der Gesamtfluss beim Brunnenabstand r der Pumprate plus der Neubildung auf der zugehörigen Kreisfläche entspricht:

$$Q(r) = Q_w + \pi r^2 N = -\pi r K \frac{\partial h^2}{\partial r} \quad (3.145)$$

Damit können wir direkt das Einzugsgebiet eines Entnahmebrunnens ($Q_w < 0$) bestimmen. Das Wasser, das auf der Fläche mit dem Radius r_e des Einzugsgebietes versickert, fließt in den Brunnen. Der Gesamtfluss $Q(r_e)$ über den Radius r_e beträgt null:

$$Q(r_e) = 0 \quad (3.146)$$

$$\implies r_e = \sqrt{\frac{-Q_w}{\pi N}} \quad (3.147)$$

Wir können die Standrohrspiegelhöhenverteilung $h(r)$ durch Integration von Gl. (3.145) unter Trennung der Variablen ermitteln:

$$\left(-\frac{Q_w}{\pi r K} - \frac{r N}{K} \right) dr = dh^2 \quad (3.148)$$

$$-\frac{Q_w}{\pi K} \ln(r) - \frac{N}{2K} r^2 = h^2 + C \quad (3.149)$$

Die Integrationskonstante entfällt, wenn wir die Differenz zwischen zwei Brunnenabständen betrachten:

$$\boxed{h_1^2 - h_2^2 = \frac{Q_w}{\pi K} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{N}{2K} (r_2^2 - r_1^2)} \quad (3.150)$$

Alternativ bestünde die Möglichkeit, einen der Ansätze für die Reichweite zu verwenden.

3.6.4 Fassungsvermögen und Ergiebigkeit

Bei der Auslegung eines Brunnens in einem freien Grundwasserleiter ist zu berücksichtigen, dass eine starke Absenkung im Brunnen die Wasseraustrittsfläche am Brunnen verkleinert. Bislang haben wir lediglich die *Ergiebigkeit* des Grundwasserleiters untersucht: Wieviel Wasser liefert der Grundwasserleiter bei einer gegebenen Absenkung? Es stellt sich jedoch die Frage, ob ein Brunnen überhaupt in der Lage ist, die entsprechende Wassermenge zu fassen. Sichardt [1928] ermittelte die folgende empirische Abschätzung für den maximalen hydraulischen Gradienten I_{\max} in einem Grundwasserleiter:

$$I_{\max} \approx \frac{1}{15\sqrt{K}} \quad K \text{ in } m/s \quad (3.151)$$

I_{\max} wird als *Grenzgefälle* bezeichnet. Bei einem gegebenen Brunnenradius r_w entspricht das *Fassungsvermögen* dem Durchfluss, der sich ergäbe, wenn am Brunnenrand das Grenzgefälle bestünde:

$$Q_{Fass}(h_w) = I_{\max} K 2\pi r_w h_w \quad (3.152)$$

Hierbei ist h_w die Standrohrspiegelhöhe im Brunnen.

Das Fassungsvermögen ist umso größer, je geringer die Absenkung ist, weil dann die wasserdurchströmte Querschnittsfläche größer ist. Umgekehrt ist die Ergiebigkeit des Grundwasserleiters bei größerer Absenkung größer, weil dann der hydraulische Gradient größer ist:

$$Q_{Erg}(h_w) = \frac{(h_0^2 - h_w^2) \pi K}{\ln\left(\frac{R}{r_w}\right)} \quad (3.153)$$

Die tatsächlich geförderte Wassermenge bei gegebenem Wasserstand im Brunnen ergibt sich aus dem Minimum von Fassungsvermögen und Ergiebigkeit:

$$Q(h_w) = \min(Q_{Fass}(h_w), Q_{Erg}(h_w)) \quad (3.154)$$

Die optimale Standrohrspiegelhöhe h_{opt} im Brunnen ist durch den Schnittpunkt der Linien $Q_{Fass}(h_w)$ und $Q_{Erg}(h_w)$ gegeben (siehe Abb. 3.38). Bei einem Brunnen mit gegebenem Durchmesser in einem gegebenen freien Grundwasserleiter wird bei $h_w = h_{opt}$ die maximal mögliche Entnahmerate erreicht. Die Lösung der zugehörigen quadratischen Gleichung ergibt:

$$h_{opt} = \sqrt{\left(\ln\left(\frac{R}{r_w}\right) I_{max} r_w\right)^2 + h_0^2} - \ln\left(\frac{R}{r_w}\right) I_{max} r_w \quad (3.155)$$

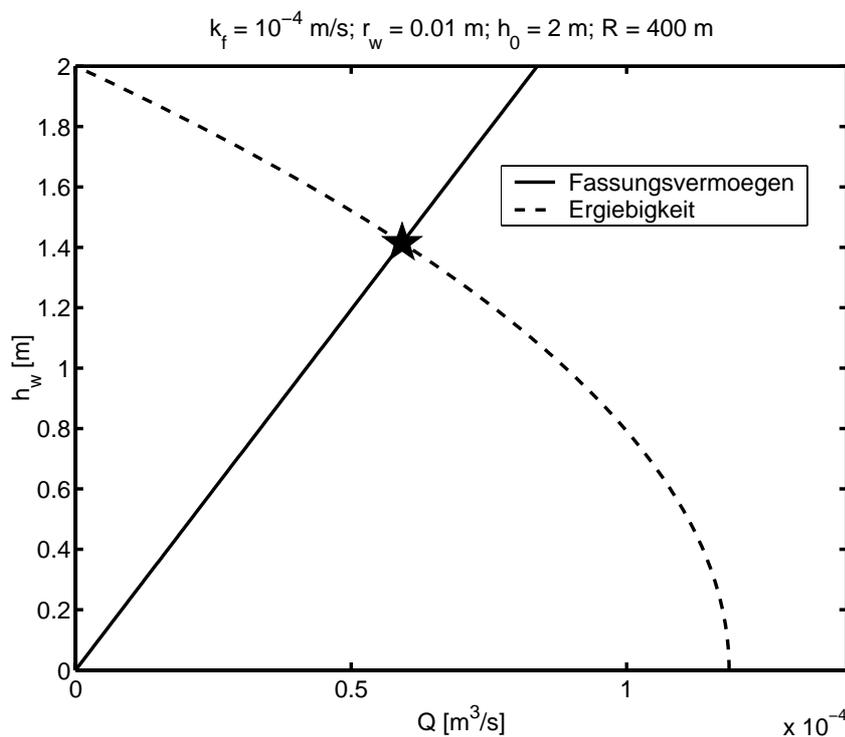


Abbildung 3.38: Beispielrechnung für das Fassungsvermögen und die Ergiebigkeit eines ungespannten Grundwasserleiters.

3.7 Analytische Berechnung der regionalen Grundwasserströmung

3.7.1 Superposition

Die tiefenintegrierte Grundwasserströmungsgleichung, Gl. (3.61), für gespannte Grundwasserleiter ist linear in Bezug auf die Piezometerhöhe. Dies gilt ebenso für den stationären Fall ohne Quellen und Senken bezüglich der Stromfunktion in Gl. (3.64). Aus der Linearität der Gleichungen folgt die Linearität der Wirkungen. Das heißt, unterschiedliche Ursachen für das

Strömungsfeld wirken additiv. Wir konnten bereits in den eindimensionalen und radialsymmetrischen Lösungen die Linearität beobachten. So ist die Absenkung der Standrohrspiegelhöhe um einen Brunnen proportional zur Entnahmerate, und der Fluss ist proportional zum hydraulischen Gradienten. Wir können jedoch auch die Wirkungen qualitativ unterschiedlicher Ursachen zur Gesamtwirkung addieren. Dieses Vorgehen wird *Superposition* genannt. Es hat den Vorteil, dass wir aus einigen wenigen Fundamentallösungen (z.B. Strömung infolge eines regionalen hydraulischen Gradienten oder Absenkung infolge eines Brunnens) das Strömungsfeld komplizierterer Systeme ermitteln können. Abb. 3.39 zeigt das Strömungsnetz einer regionalen Grundströmung, eines Zugabe- und eines Entnahmebrunnens sowie zugehörigen Kombinationen der einzelnen Elemente in einem gespannten, homogenen, isotropen Grundwasserleiter.

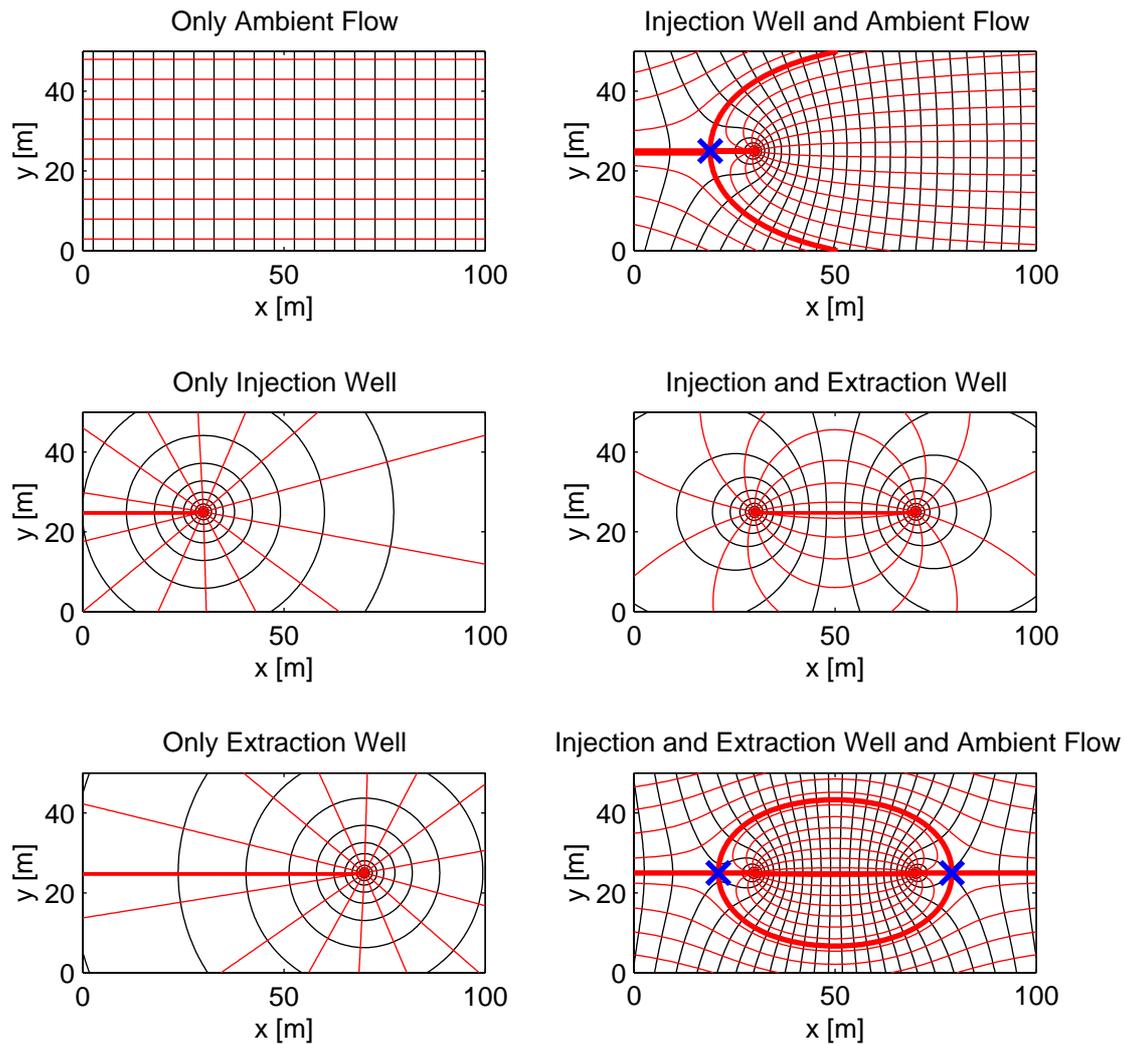


Abbildung 3.39: Berechnung des Strömungsnetzes für eine Zugabe/Entnahme-Brunnenpaar in Grundströmung nach dem Superpositionsprinzip. Dicke Linien: Trennstromlinien. Kreuze: Staupunkte.

Brunnen in Grundströmung

Wir betrachten einen Brunnen in einem unendlich ausgedehnten, gespannten, homogenen, isotropen Grundwasserleiter. Zusätzlich zur stationären Brunnenströmung berücksichtigen wir ei-

ne Grundströmung infolge eines stationären regionalen hydraulischen Gradientens I , der in die x -Richtung abfällt. Die Ortskoordinaten des Brunnens sind als x_w und y_w angegeben; die Pumprate beträgt Q_w . Dann ergibt das Superpositionsprinzip:

$$h(x, y) = C_h - Ix - \frac{Q_w}{2\pi Km} \ln \left(\sqrt{(x - x_w)^2 + (y - y_w)^2} \right) \quad (3.156)$$

$$\Psi(x, y) = C_\Psi + IKy + \frac{Q_w}{2\pi m} \arctan \left(\frac{y - y_w}{x - x_w} \right) \quad (3.157)$$

$$q_x(x, y) = IK + \frac{Q_w}{2\pi m} \left(\frac{x - x_w}{(x - x_w)^2 + (y - y_w)^2} \right) \quad (3.158)$$

$$q_y(x, y) = \frac{Q_w}{2\pi m} \left(\frac{y - y_w}{(x - x_w)^2 + (y - y_w)^2} \right) \quad (3.159)$$

mit den Integrationskonstanten C_h und C_Ψ , die aus einer zusätzlichen Randbedingungen bestimmt werden müssen.

Das zugehörige Strömungsnetz ist in Abb. 3.39 als zweites Bild in der ersten Reihe für einen Zugabebrunnen dargestellt. Die dicke Stromlinie trennt den Bereich, in dem das Wasser dem Brunnen entstammt, von jenem, wo das Wasser aus der Grundströmung kommt. Sie wird als *Trennstromlinie* bezeichnet. Das Konzept der Trennstromlinien ist wichtig, um Einzugsgebiete (im Fall von Grundwasserentnahmen) bzw. Einflussgebiete (im Fall von Grundwasseranreicherungen) einzelner Brunnen, Flüsse etc. abzutrennen. Wir entnehmen der Abbildung auch eine Trennstromlinie, die das Grundströmungswasser in Bereiche aufteilt, in denen das Wasser jeweils oberhalb oder unterhalb des Brunneneinflussgebietes abströmt.

Am *Staupunkt* betragen alle Geschwindigkeitskomponenten null. Am Staupunkt kreuzen sich die unterschiedlichen Trennstromlinien. Für den Fall eines Brunnens in Grundströmung lässt sich die Lage (x_s, y_s) des Staupunkts aus Gln. (3.158 & 3.159) berechnen:

$$q_y(x_s, y_s) = \frac{Q_w}{2\pi m} \left(\frac{y_s - y_w}{(x_s - x_w)^2 + (y_s - y_w)^2} \right) = 0$$

$$\implies y_s = y_w \quad (3.160)$$

$$q_x(x_s, y_s) = IK + \frac{Q_w}{2\pi m} \left(\frac{x_s - x_w}{(x_s - x_w)^2 + (y_s - y_w)^2} \right) = 0$$

$$y_s - y_w = 0 \implies q_x(x_s, y_s) = (x_s - x_w) IK + \frac{Q_w}{2\pi m} = 0$$

$$\implies x_s = x_w - \frac{Q_w}{2\pi m IK} \quad (3.161)$$

Der auf diese Weise berechnete Staupunkt ist in Abb. 3.39, ersten Reihe, zweites Bild mit einem Kreuz markiert.

Für die Berechnung des Trennstromlinienverlaufs verwenden wir Gl. (3.157). Zur Vereinfachung betrachten wir einen Brunnen, der sich im Ursprung des Koordinatensystems befindet ($x_w = y_w = 0$). Wir wählen die Integrationskonstante C_Ψ so, dass Ψ den Wert Null entlang der x -Achse oberstrom des Brunnens annimmt. Dann beträgt der Wert der Stromfunktion Ψ entlang der Trennstromlinie genau \pm der halben tiefenspezifischen Pumprate Q_w/m . Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \Psi(x, y) &= IKy + \frac{Q_w}{2\pi m} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \pm \frac{Q_w}{2m} \\
 \Rightarrow \arctan\left(\frac{y}{x}\right) &= \pm\pi - \frac{2\pi m IKy}{Q_w} \\
 \Rightarrow \frac{y}{x} &= \tan\left(\pm\pi - \frac{2\pi m IKy}{Q_w}\right) \\
 &= \frac{\tan\left(-\frac{2\pi m IKy}{Q_w}\right) \pm \tan(\pi)}{1 \mp \tan(\pi) \tan\left(-\frac{2\pi m IKy}{Q_w}\right)} \\
 \tan(\pi) = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} &= \tan\left(-\frac{2\pi m IKy}{Q_w}\right) \\
 \Rightarrow x &= \frac{y}{\tan\left(-\frac{2\pi m IKy}{Q_w}\right)} \tag{3.162}
 \end{aligned}$$

Wenn wir uns unendlich weit entfernt oberstrom eines Entnahmebrunnens (oder unterstrom eines Zugabebrunnens) in Grundströmung befinden, können wir den Abstand zwischen den beiden Trennstromlinien aus einer einfachen Volumenbilanz herleiten. Da wir unendlich weit entfernt vom Brunnen entfernt sind, kann der Einfluss des Brunnens auf die Standrohrspiegelhöhe und die Geschwindigkeitsverteilung vernachlässigt werden. Es verbleibt die homogen angenommene Grundströmung. Das Wasser einer gewissen *Entnahmebreite* b strömt dem Entnahmebrunnen zu (entsprechend entstammt das Wasser in einer Zugabebreite einem Zugabebrunnen). Zur Veranschaulichung siehe Abb. 3.40. Die Volumenbilanz ergibt:

$$b = \frac{\|Q_w\|}{IKm} \tag{3.163}$$

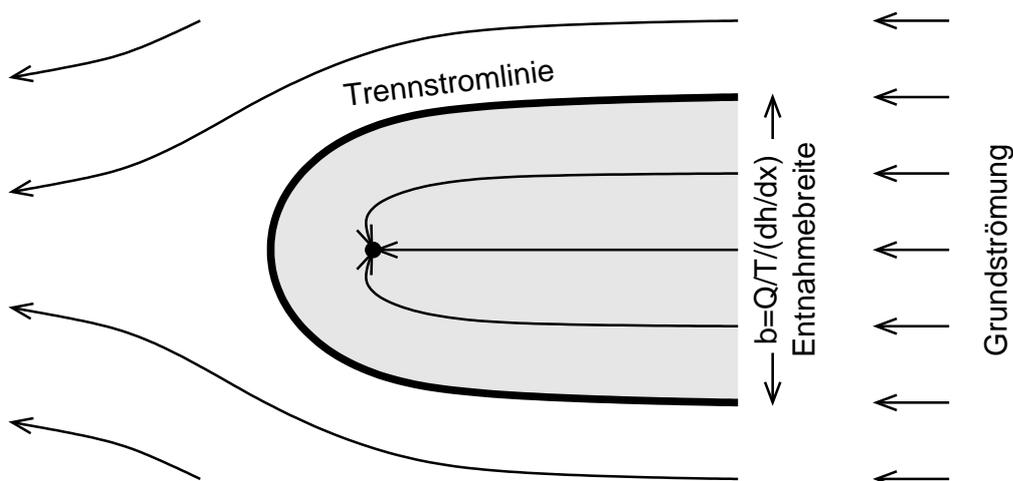


Abbildung 3.40: Entnahmebreite eines Brunnens.

Mehrere Brunnen

Wir betrachten jetzt mehrere Brunnen in einem unendlich ausgedehnten homogenen isotropen Grundwasserleiter mit Grundströmung. Für den i -ten Brunnen betragen die Ortskoordinaten x_i und y_i und die Pumprate Q_i . Dann ergeben sich die folgenden Piezometerhöhen-, Stromfunktions- und Geschwindigkeitsfelder:

$$h(x, y) = C_h - Ix - \sum_i^{n_w} \frac{Q_i}{2\pi k_f m} \ln \left(\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right) \quad (3.164)$$

$$\Psi(x, y) = C_\Psi + IKy + \sum_i^{n_w} \frac{Q_i}{2\pi m} \arctan \left(\frac{y - y_i}{x - x_i} \right) \quad (3.165)$$

$$q_x(x, y) = IK + \sum_i^{n_w} \frac{Q_i}{2\pi m} \left(\frac{x - x_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right) \quad (3.166)$$

$$q_y(x, y) = \sum_i^{n_w} \frac{Q_i}{2\pi m} \left(\frac{y - y_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right) \quad (3.167)$$

In Abb. 3.39 ist die Superposition von einem Zugabe- und einem Entnahmebrunnen in Zeile 2 und 3 jeweils im zweiten Bild dargestellt, wobei in der zweiten Zeile keine Grundströmung besteht und in der dritten eine Grundströmung von links nach rechts. Im letzten Fall ergibt sich eine geschlossene Trennstromlinie, d.h., der Entnahmebrunnen fördert genau das Wasser, das im Zugabebrunnen zugegeben wird. Dieser Zustand wird erreicht, weil die Pumpraten der Zugabe und Entnahme identisch sind ($Q_1 = -Q_2 = Q_w$) und die Brunnen genau in Richtung der Grundströmung ausgerichtet sind ($y_1 = y_2 = y_w$). Für diesen speziellen Fall lassen sich die beiden Staupunkte durch Lösung einer quadratischen Gleichung bestimmen:

$$q_y(x_s, y_s) = \frac{Q_w}{2\pi m} \left(\frac{y_s - y_w}{(x_s - x_1)^2 + (y_s - y_w)^2} - \frac{y_s - y_w}{(x_s - x_2)^2 + (y_s - y_w)^2} \right) = 0$$

$$\implies y_s = y_w \quad (3.168)$$

$$q_x(x_s, y_s) = IK + \frac{Q_w}{2\pi m} \left(\frac{x_s - x_1}{(x_s - x_1)^2 + (y_s - y_w)^2} - \frac{x_s - x_2}{(x_s - x_2)^2 + (y_s - y_w)^2} \right) = 0$$

$$y_s - y_w = 0 \implies q_x(x_s, y_s) = (x_s - x_1)(x_s - x_2) IK + \frac{Q_w}{2\pi m} (x_1 - x_2) = 0$$

$$\implies x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2}{4} + \frac{Q_w(x_2 - x_1)}{2\pi m IK}}$$

Im Allgemeinen Fall mehrerer Brunnen mit unterschiedlicher Lage zueinander und unterschiedlicher Pumprate können die Staupunkte nur noch durch eine numerische Nullpunktsuche ermittelt werden.

3.7.2 Berücksichtigung von Rändern

Die präsentierten geschlossenen Lösungen für die Brunnenströmung gehen von unendlich ausgedehnten Grundwasserleitern aus. In der Praxis bedeutet dies, dass Ränder hinreichend weit

entfernt sein müssen (weiter als die Reichweite), so dass ihr Einfluss vernachlässigt werden kann. Diese Verhältnisse sind häufig nicht gegeben. Im Folgenden werden einfache Ansätze dargestellt, um linear verlaufende Ränder in den geschlossenen Lösungen berücksichtigen zu können. (Siehe auch Abschnitt 7.7 in Bear [1972])

Festpotentialrand

Wir betrachten ein System, bei dem die Piezometerhöhe für einen gegebenen x -Wert festgesetzt ist. Ein Beispiel hierfür wäre ein gerader Fluss oder Kanal, der im vollständigen hydraulischen Kontakt zum Grundwasserleiter steht. Die Forderung lautet also:

$$h(x_0, y) = h_0 \quad \forall y \quad (3.169)$$

Die Lösung für die Brunnenströmung, Gl. (3.124), mit den Brunnenkoordinaten (x_w, y_w) zeigt jedoch eine Variation von h mit y für $x = x_0$:

$$h(x, y) = h_0 - \frac{Q_w}{2\pi T} \ln \left(\frac{\sqrt{(x - x_w)^2 + (y - y_w)^2}}{R} \right) = \text{Funktion von } y \text{ für } x = x_0 \quad (3.170)$$

Wir können die Absenkung (oder den Aufstau) von h entlang $x = x_0$ eliminieren, indem wir einen virtuellen Brunnen mit umgekehrter Pumprate berücksichtigen, dessen Lage am Rand gespiegelt ist. Im Beispiel (Rand ist parallel zur y -Achse) betragen die Koordinaten des gespiegelten Brunnens $(2x_0 - x_w, y_w)$. Dann ergibt sich für die Standrohrspiegelhöhenverteilung gemäß de Superpositionsprinzip:

$$h(x, y) = h_0 - \frac{Q_w}{2\pi T} \ln \left(\frac{\sqrt{(x - x_w)^2 + (y - y_w)^2}}{\sqrt{(x + x_w - 2x_0)^2 + (y - y_w)^2}} \right) \quad (3.171)$$

für alle Punkte die auf derselben Seite von x_0 liegen wie x_w . Die virtuelle h -Verteilung jenseits des Randes ist irrelevant, weil sie außerhalb des betrachteten Gebiets liegt. Es kann leicht gezeigt werden, dass Gl. (3.171) die Forderung nach dem Festpotential erfüllt:

$$\begin{aligned} h(x_0, y) &= h_0 - \frac{Q_w}{2\pi T} \ln \left(\frac{\sqrt{(x_0 - x_w)^2 + (y - y_w)^2}}{\sqrt{(x_0 + x_w - 2x_0)^2 + (y - y_w)^2}} \right) \\ &= h_0 - \frac{Q_w}{2\pi T} \ln \left(\frac{\sqrt{(x_0 - x_w)^2 + (y - y_w)^2}}{\sqrt{(x_w - x_0)^2 + (y - y_w)^2}} \right) \\ &= h_0 - \frac{Q_w}{2\pi T} \ln(1) = h_0 \end{aligned} \quad (3.172)$$

Abb. 3.41 veranschaulicht das Prinzip. Ein Entnahmebrunnen befindet sich in $20m$ Abstand links von dem Flussufer. Der virtuelle Zugabebrunnen ergibt sich durch Spiegelung an dem Ufer, das dem Brunnen zugewandt ist. Die resultierende Piezometerhöhenverteilung links des Flusses ergibt sich aus der Superposition der Lösungen für den realen Brunnen und den virtuellen gespiegelten Brunnen.

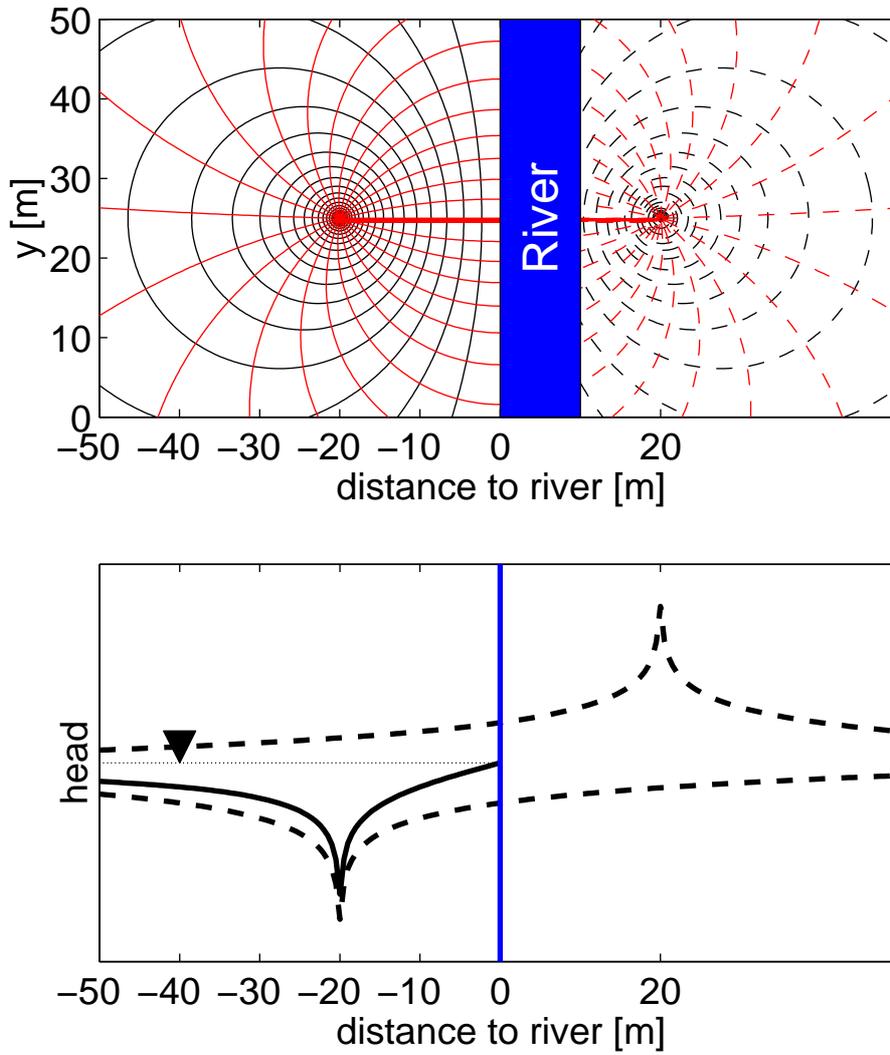


Abbildung 3.41: Virtuelle Spiegelung eines Brunnens an einem Festpotentialrand.

Randstromlinie

Wir betrachten jetzt ein halbonendliches Gebiet, bei dem die Linie $x = x_0$ eine Randstromlinie darstellt. Ein Beispiel hierfür wäre ein Gebirgsrand, der den Grundwasserleiter entlang der genannten Linie abschließt. Eine Randstromlinie zeichnet sich dadurch aus, dass die Filtergeschwindigkeit parallel zu ihr verläuft. Bei einer isotropen Durchlässigkeit ist dies gleichbedeutend zu der Forderung, dass der hydraulische Gradient normal zum Rand null beträgt:

$$\frac{\partial h(x_0, y)}{\partial x} = 0 \quad \forall y \quad (3.173)$$

Die Lösung für die Brunnenströmung in einem unendlich ausgedehnten Grundwasserleiter weist folgenden Gradienten in x -Richtung auf:

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} = -\frac{Q_w R (x - x_w)}{2\pi T ((x - x_w)^2 + (y - y_w)^2)} = \text{Funktion von } y \text{ für } x = x_0 \quad (3.174)$$

Wir können die Ableitung $\partial h/\partial x$ entlang $x = x_0$ eliminieren, indem wir einen virtuellen Brunnen berachten, der am Rand gespiegelt wird und die gleiche Pumprate aufweist wie der reale Brunnen. Dann ergibt das Superpositionsprinzip:

$$h(x, y) = h_0 - \frac{Q_w}{2\pi T} \ln \left(\frac{\sqrt{(x - x_w)^2 + (y - y_w)^2} \sqrt{(x_0 + x_w - 2x_0)^2 + (y - y_w)^2}}{R^2} \right) \quad (3.175)$$

Wie im Fall des Festpotentialrandes gilt die Lösung nur auf der Seite des Randes, die dem Brunnen zugewandt ist. Die virtuelle Spiegelseite liegt ohnehin außerhalb des betrachteten Gebietes. Es kann wiederum leicht gezeigt werden, dass Gl. (3.175) die *no-flow* Forderung erfüllt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(x_0, y)}{\partial x} &= -\frac{Q_w R}{2\pi T} \left(\frac{x_0 - x_w}{((x_0 - x_w)^2 + (y - y_w)^2)} + \frac{x_0 + x_w - 2x_0}{((x_0 + x_w - 2x_0)^2 + (y - y_w)^2)} \right) \\ &= -\frac{Q_w R}{2\pi T} \left(\frac{x_0 - x_w}{((x_0 - x_w)^2 + (y - y_w)^2)} + \frac{x_w - x_0}{((x_w - x_0)^2 + (y - y_w)^2)} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.176)$$

Abb. 3.42 veranschaulicht das Prinzip. Wie im Fall des Festpotentialrandes betrachten wir einen Entnahmebrunnen, der $20m$ vom Rand entfernt ist. Der virtuelle Spiegelbrunnen ist ebenfalls ein Entnahmebrunnen. Dadurch ist die Absenkung stärker, was intuitiv verständlich ist, weil die gleiche Wassermenge aus einem kleineren Gebiet entnommen wird.

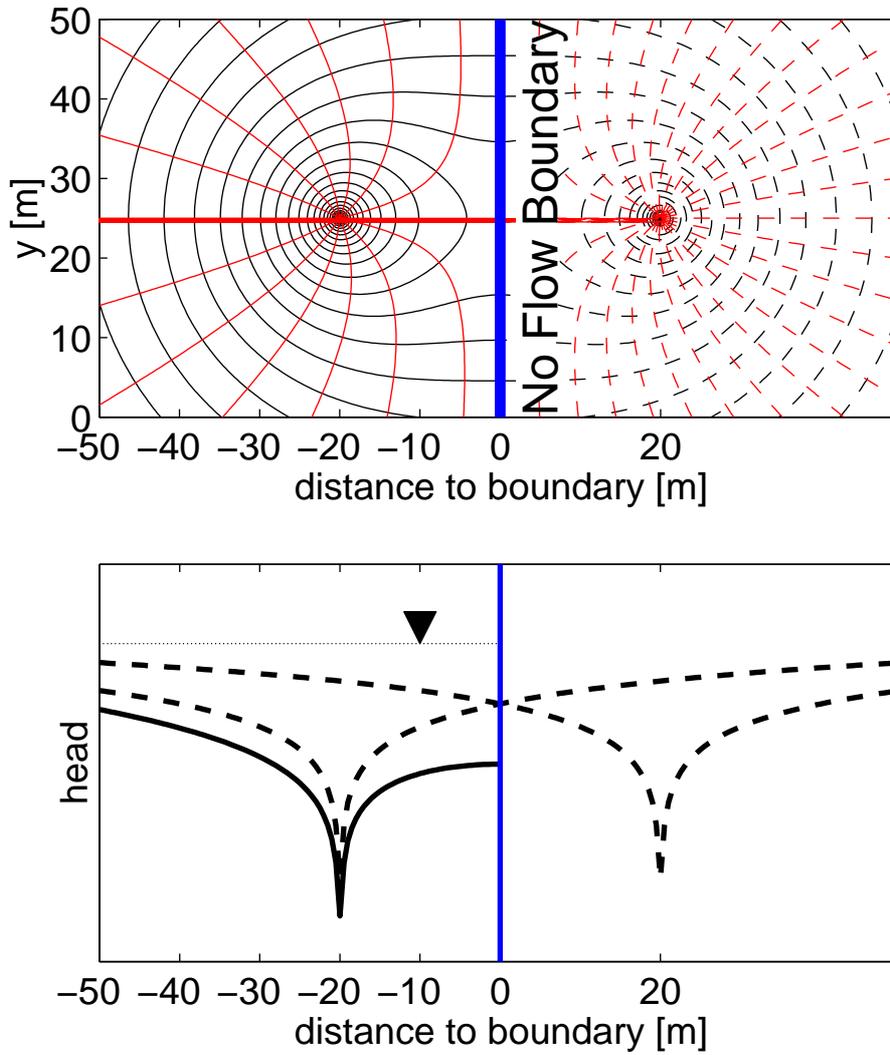


Abbildung 3.42: Virtuelle Spiegelung eines Brunnens an einer Randstromlinie.

Kombination mehrerer Ränder

Wir können mehrere Ränder gleichzeitig berücksichtigen, indem an jedem Rand die zugehörigen Spiegelungen vornehmen. Hierbei muss nicht nur der reale Brunnen an jedem Rand gespiegelt werden, sondern auch die virtuellen Brunnen, die sich aus den anderen Rändern ergeben. Abb. 3.43 zeigt einen Entnahmebrunnen in einem Grundwasserleiter der von einem Fluss und einem Gebirgsrand begrenzt wird. An dem Fluss findet die Spiegelung zu einem virtuellen Zugabebrunnen statt und am Gebirgsrand zu einem virtuelle Entnahmebrunnen. Die virtuellen Brunnen werden an dem gedanklich fortgesetzten Rand nochmals gespiegelt, sodass wir jenseits des Flusses zwei virtuelle Zugabebrunnen zu berücksichtigen haben.

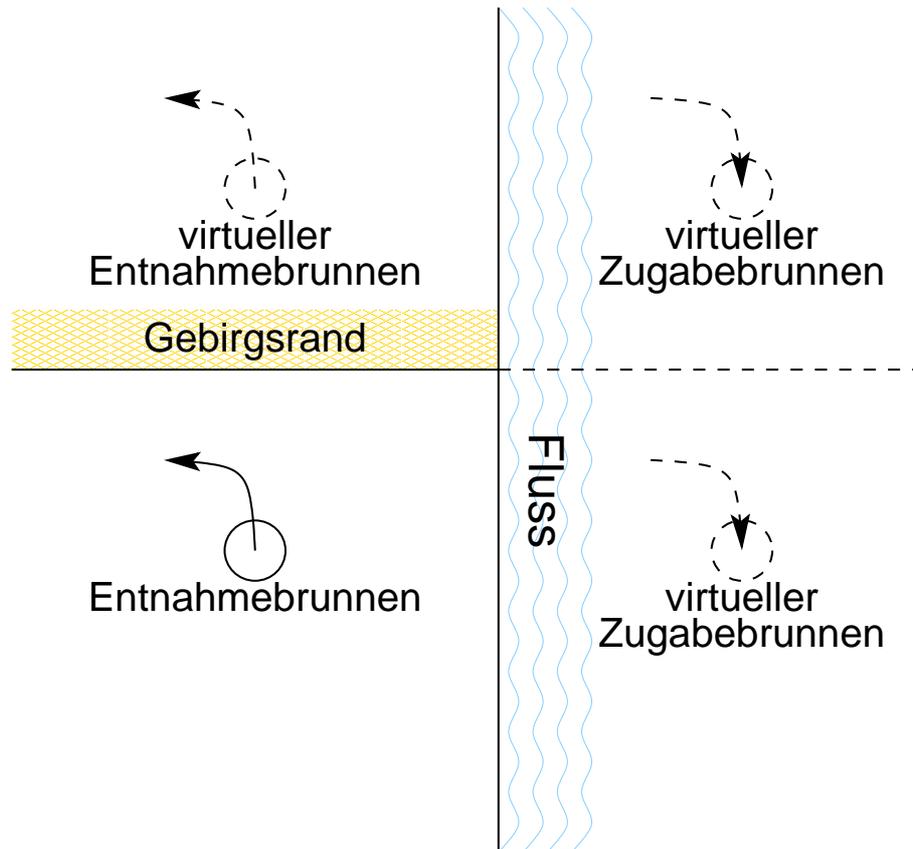


Abbildung 3.43: Doppelte Spiegelung eines Brunnens an mehreren Rändern.

3.8 Regionale Strömung in realen Grundwasserleitern

3.8.1 Konzeptionelle Modelle für Grundwasserleiter

In den vorausgegangenen Kapiteln sind wir von vereinfachten Annahmen bezüglich des Aufbaus von Grundwasserleitern ausgegangen. Die behandelten analytischen Lösungen galten zu- meist für unendlich ausgedehnte, homogene, isotrope Grundwasserleiter mit ebener Sohle. Diese Bedingungen sind in der Praxis meistens nicht erfüllt. Der praktische Nutzen der geschlossenen Lösungen liegt deshalb weniger in der endgültigen Berechnung der Grundwasserströmung als in der schnellen Abschätzung anhand von Näherungslösungen, auf deren Grundlage detail-

lierte Untersuchungen durchgeführt werden können. In der wasserwirtschaftlichen Praxis basieren Auslegungsentscheidungen zumeist auf Computersimulationen. Einzelheiten bezüglich der numerischen Modelltechniken und ihres Einsatzes werden in den Grundwasservorlesungen von Prof. Kinzelbach behandelt. Hier soll nur ein kurzer Einblick in die Fragestellungen der Modellanwendung erfolgen.

Der erste Schritt jeder Modellanwendung besteht in der Formulierung eines *konzeptionellen Modells*. Das konzeptionelle Modell umfasst die grundsätzliche Beschreibung des Systems:

- Welche Zustandsgrößen werden betrachtet?
- Welche Prozesse werden berücksichtigt?
- Welche Struktur hat das System?
- Wie groß ist das Gebiet?
- Welche Materialeigenschaften werden berücksichtigt?
- Welche Randbedingungen werden angenommen?

Für ein Grundwasserströmungsmodell ergibt sich die Frage der relevanten Zustandsgröße von selbst: Wir betrachten die Standrohrspiegelhöhe als Primärvariable. Bei Fragen insbesondere des reaktiven Transports ist diese Entscheidung bereits weniger eindeutig. Der relevante Prozess besteht in Strömungsanwendungen in der Grundwasserströmung. Wir müssen jedoch eine Entscheidung treffen, ob wir die ungesättigte Zone im Modell explizit mitberücksichtigen, oder ob wir etwa eine vorgegebene Grundwasserneubildung als Randbedingung einsetzen.

Eine im Einzelfall häufig schwierige Entscheidung betrifft den Aufbau des natürlichen Untergrundes. Abb. 3.44 veranschaulicht die Approximation einer komplexen Aquiferstruktur durch ein einfaches Schichtenmodell. In den meisten Anwendungen wird jeder Schicht ein einzelner Satz Eigenschaften (Durchlässigkeitsbeiwert, spezifischer Speicherkoeffizient, Porosität) zugewiesen. Sowohl die Abgrenzung der Schichten als auch die Zuweisung hydraulischer Eigenschaften sind fehlerbehaftet. Die Parameter können durch die Kalibrierung eines Modells bestimmt werden. Hierzu stehen heutzutage in den meisten Grundwassersimulationspaketen Softwaretools zur Verfügung (*inverse Modellierung*). Konzeptionelle Entscheidungen müssen hingegen vom Anwender getroffen werden. Zum Beispiel kann das Festgestein, das in Abb. 3.44 als Aquifersohle dargestellt ist, Klüfte aufweisen, sodass die Grundwasserströmung im Festgestein nicht vernachlässigt werden sollte. Man muss sich auch entscheiden, ob die beiden Grundwasserstockwerke jeweils tiefenintegriert betrachtet werden und die halbdurchlässige Schicht als Leakageschicht mit Vertikalfluss angenommen wird oder ob man ein dreidimensionales Modell aufbaut, in dem der Druck über die Tiefe der beiden Stockwerke variieren kann und die halbdurchlässige Schicht genauso wie die gut durchlässigen Schichten behandelt wird.

Während die analytischen Lösungen der Grundwasserströmungsgleichung für unendlich große Gebiete gelten und die Berücksichtigung von Rändern mit zusätzlichem Aufwand verbunden sind, beruhen numerische Modelle eines Grundwasserleiters auf einer Diskretisierung, die im Allgemeinen eine Begrenzung des simulierten Gebietes voraussetzt. Hierbei stellt sich die Frage, wo die Grenzen des Gebiets zu ziehen und welche Randbedingungen dort anzunehmen sind. Abb. 3.45 zeigt ein Gebiet, das an zwei Seiten eine natürliche Begrenzung aufweist: Ein Gebirgsrand begrenzt die Talfüllung, die den Grundwasserleiter darstellt. Der Gebirgsrand könnte als No-flow-Rand angenommen werden (Voraussetzung: Keine Zusickerung aus dem

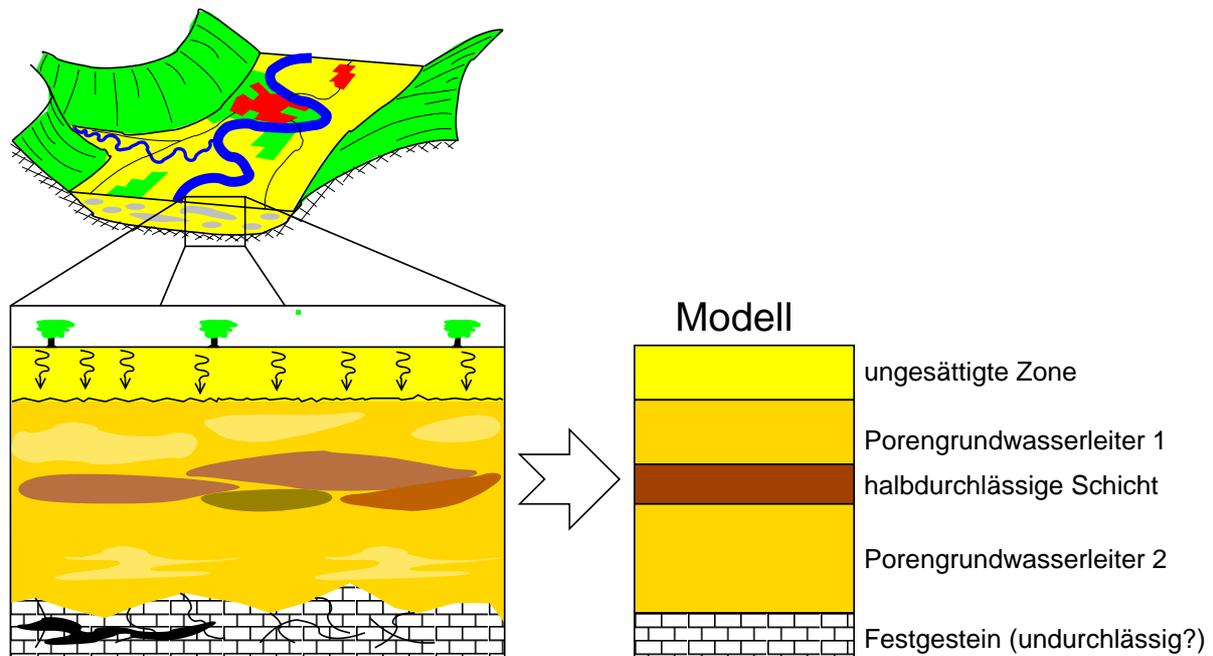


Abbildung 3.44: Vereinfachung eines komplexen geologischen Aufbaus durch ein Schichtenmodell.

Gebirge). Das System ist ferner von einem Fluss begrenzt, der bei vollständigem hydraulischen Kontakt zwischen Fluss und Grundwasserleiter als Festpotentialrand wirkt. Die hierzu senkrecht stehende Begrenzung ist jedoch unsicher. Eine typische Annahme besteht darin, eine Randstromlinie z.B. aus Grundwasserhöhengleichen abzuschätzen und als No-Flow-Rand im Modell zu berücksichtigen. Da die tatsächliche Lage der Stromlinien jedoch unbekannt ist, sollte ein derartig bestimmter Rand möglichst weit weg vom eigentlichen Untersuchungsgebiet angenommen werden.

Abb. 3.45 verdeutlicht noch weitere Entscheidungen, die im Aufbau des konzeptionellen Modells getroffen werden müssen. So sollte die variable Landnutzung die Grundwasserneubildungsraten beeinflussen: In einem Wald ist die Evapotranspiration höher als auf einer Ackerfläche, wohingegen Siedlungsflächen einen stärkeren Oberflächenabfluss aufweisen. Typischerweise wird die Landnutzung klassifiziert (Wald, Ackerfläche, Grasland, Siedlungsfläche) und für jede Landnutzungs-kategorie eine Neubildungsrate angenommen (eventuell noch mit weiterer Unterteilung z.B. nach Exposition, geodätische Höhe o.a.). Die in Abb. 3.45 angedeutete Behandlung von Oberflächengewässern wird in Abschnitt 3.8.3 behandelt.

3.8.2 Wirkung von Aquiferheterogenitäten

In den vorausgegangenen Kapiteln sind wir meistens von einer gleichförmigen Durchlässigkeitsverteilung ausgegangen. In realen Grundwasserleitern kann jedoch die Durchlässigkeit räumlich stark variieren. In der Ingenieurpraxis werden hierzu meistens Zonen gleicher Durchlässigkeit definiert. Unterschiede in der Transmissivität lassen sich auch bereits bei der Interpretation von Grundwassergleichenplänen feststellen, da bei konstantem Durchfluss der hydraulische Gradient in schlechter durchlässigen Teilbereichen stärker sein muss (d.h. die Grundwassergleichen liegen dichter beieinander).

An einer einzelnen Diskontinuität können wir eine Brechung der Stromlinien feststellen, die zur Brechung optischer Strahlen äquivalent ist. Abb. 3.46 zeigt das Strömungsnetz an ei-

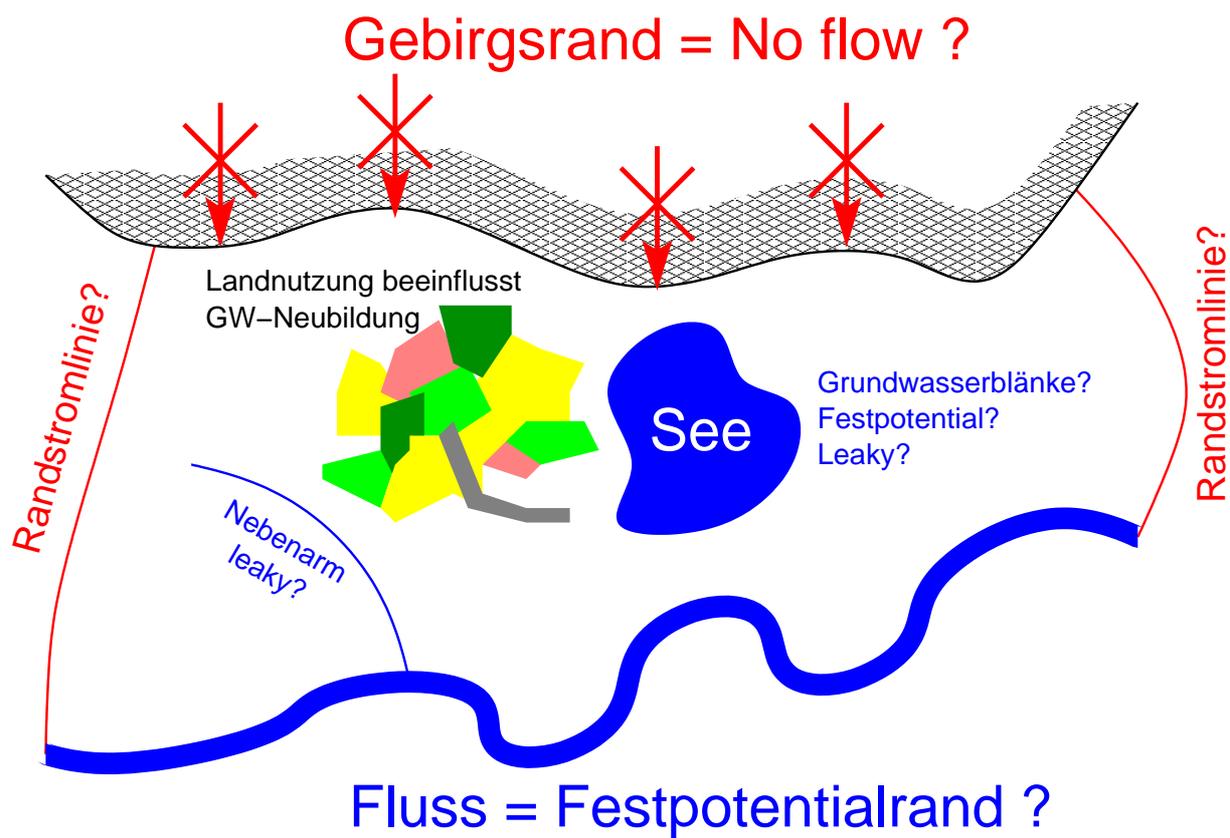


Abbildung 3.45: Entwicklung eines konzeptionellen Modells für die regionale Grundwasserströmung.

ner Diskontinuität, deren Kante in y -Richtung verläuft. Die Filtergeschwindigkeit senkrecht zur Grenzfläche (also in x -Richtung) darf sich aus Kontinuitätsgründen über die Grenzfläche nicht verändern. Gleichzeitig muss der Druck entlang der Grenzfläche kontinuierlich bleiben, weshalb der Druckgradient parallel zur Grenzfläche auf beiden Seiten den gleichen Wert hat. Hieraus ergibt sich, wie in Abb. 3.46 aufgeführt, dass die Tangense der Ein- und Ausfallwinkel im selben Verhältnis stehen wie die Durchlässigkeitsbeiwerte.

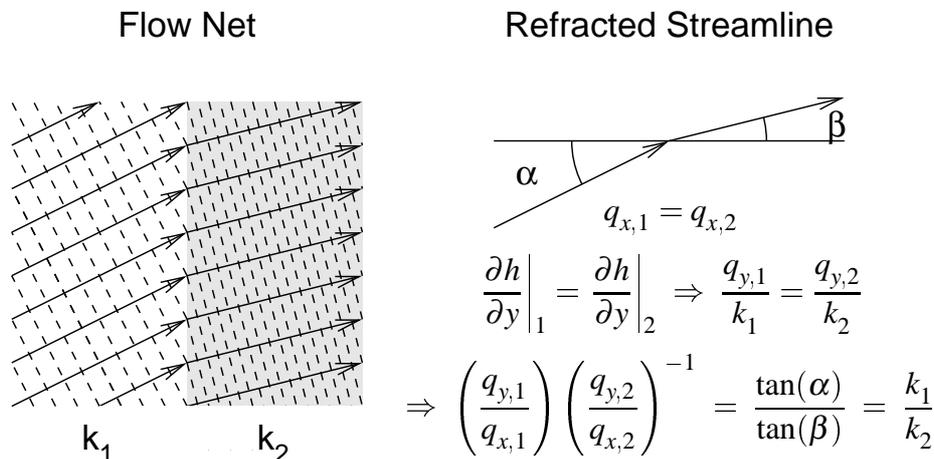


Abbildung 3.46: Brechung von Strom- und Potentiallinien an einer Grenzfläche zwischen zwei Bereichen mit unterschiedlicher Durchlässigkeit.

Für die Berechnung der Brunnenströmung in Gebieten mit Wechsel in der Durchlässigkeit kann die Methode der Spiegelbrunnen (siehe Abschnitt 3.7.2) in der Weise modifiziert werden, dass an dem Rand zwischen den beiden Gebieten eine partielle Spiegelung vorgenommen wird (siehe Absch. 7.7 in Bear [1972]).

Die Beschreibung der Aquiferheterogenitäten mit Zonen und Schichten stellt eine starke Vereinfachung der Wirklichkeit dar. In der *stochastischen Geohydrologie* wird die räumliche Variabilität des natürlichen Untergrundes mit Hilfe der Geostatistik beschrieben [Dagan 1989, Gelhar 1993, Kitanidis 1997]. Abb. 3.47 zeigt eine stochastisch generierte Durchlässigkeitsverteilung eines heterogenen Grundwasserleiters und das zugehörige Strömungsnetz für einen mittleren hydraulischen Gradienten in x -Richtung. Zonen hoher Durchlässigkeit fokussieren die Strömung. Aus der Variabilität der Durchlässigkeit ergibt sich die Variabilität der Standrohrspiegelhöhenverteilung und, im stärkeren Ausmaß, der Geschwindigkeit. Dies ist insbesondere für den Stofftransport von großer Bedeutung.

Für viele Anwendungen ist es durchaus zulässig, die kleinräumliche Variabilität zu vernachlässigen. Man muss sich jedoch darüber im Klaren sein, dass dann die angenommene Durchlässigkeit einen Mittelwert darstellt und dass die berechneten Piezometerhöhen- und Geschwindigkeitsverteilungen ebenfalls geglättet sind, d.h., kleinräumige Fluktuationen werden nicht wiedergegeben und müssen gegebenenfalls bei Transportberechnungen als Dispersion parametrisiert werden.

3.8.3 Wechselwirkung mit Oberflächengewässern

Der Austausch zwischen Grundwasser und Oberflächengewässern wird aus der Sicht des Grundwasserleiters beschrieben: Ein Fluss vom Oberflächengewässer in das Grundwasser wird als *In-*

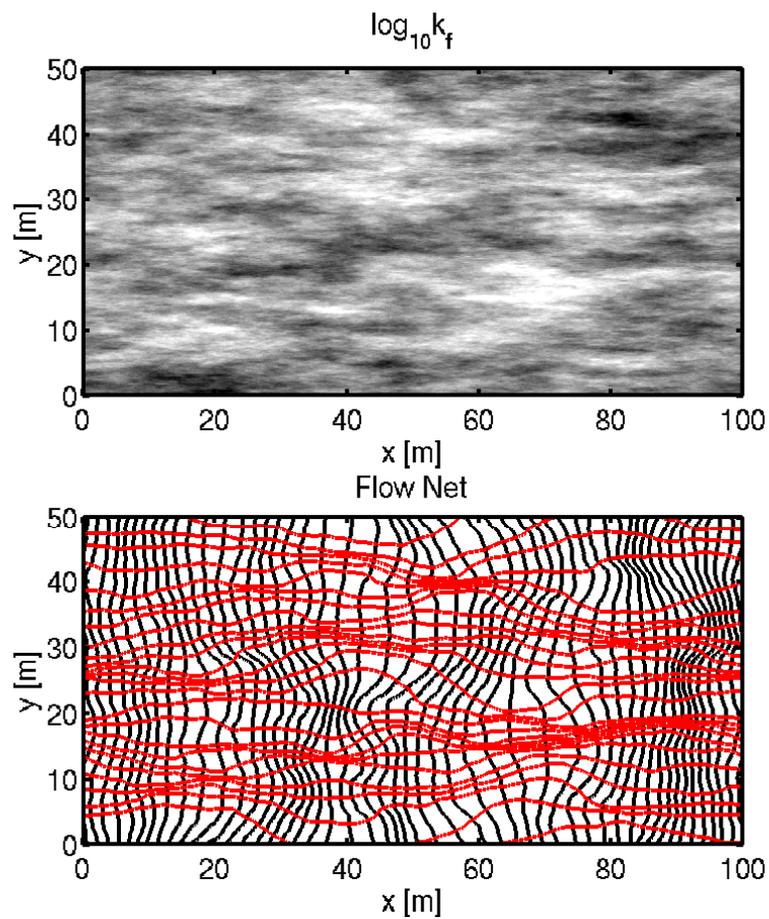


Abbildung 3.47: Durchlässigkeitsverteilung (oben) und korrespondierendes Strömungsfeld bei einem mittleren Gradienten in x -Richtung. Helle Schattierung = hohe Durchlässigkeit.

filtration bezeichnet, während ein Fluss aus dem Grundwasser in das Oberflächengewässer als *Exfiltration* bezeichnet wird. Hierbei können wir mehrere Fälle unterscheiden:

- Der Austausch kann direkt erfolgen. Hierbei ist die Standrohrspiegelhöhe im Grundwasser in der direkter Nachbarschaft zum Oberflächengewässer identisch zum Wasserstand im Oberflächengewässer.
- Die Gewässersohle kann kolmatiert sein. In diesem Fall erfolgt der Wasseraustausch durch eine halbdurchlässige Schlickschicht. Für diese Fälle hat sich das Konzept des *leaky aquifer* bewährt.
- Der Wasserstand im Oberflächengewässer kann praktisch vom Grundwasserstand unabhängig sein. Zum Beispiel ist der Pegelstand in einem staugeregelten Fluss kaum durch die Grundwasserin- und -exfiltration beeinflusst. In einem solchen Fall stellt der Fluss oder See einen Festpotentialrand dar, zumindest bei direktem Kontakt zwischen Oberflächengewässer und Grundwasser. Für einen *leaky*-Rand kann eine *Randbedingung der dritten Art* verwendet werden:

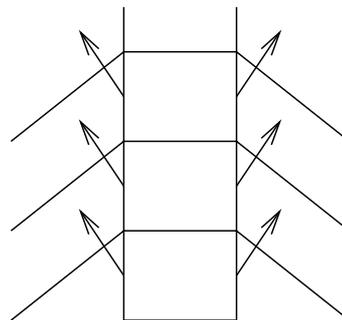
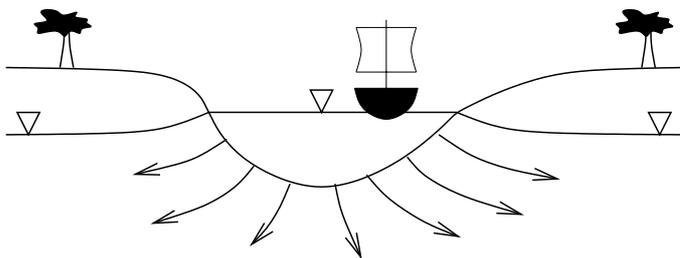
$$q_{Rand} = -K \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{Rand} = \frac{h_0 - h_{Rand}}{d_{Sohle}} K_{Sohle} \quad (3.177)$$

bei der sowohl der Wert der Standrohrspiegelhöhe als auch dessen Ableitung am Rand berücksichtigt wird.

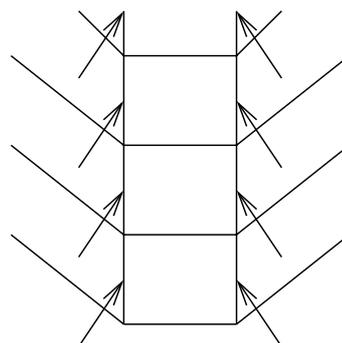
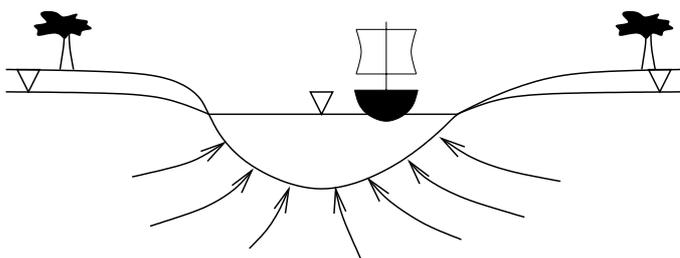
- Der Wasserstand im Oberflächengewässer kann stark vom Grundwasserstand bestimmt sein. Dies ist typisch für sogenannte *Grundwasserblänken*, also Stellen, an denen das Grundwasser über eine begrenzte Fläche zu Tage tritt. Ein Beispiel hierfür wäre ein zuflussloser Baggersee. Wenn sich der Grundwasserspiegel senkt, sinkt auch der Wasserstand im Baggersee ab. Grundwasserblänken lassen sich am Besten als Teile des Grundwasserleiters mit extrem hoher Durchlässigkeit (z.B. 1 m/s) und einem Speicherkoeffizienten von 1 in einem Modell berücksichtigen. Gleichzeitig müssen die Wasserzutritte durch Niederschlag und -verluste durch Verdunstung als Quell/Senkenterm berücksichtigt werden.
- Schließlich besteht die Möglichkeit, dass die Gewässersohle in der ungesättigten Zone liegt (, was eine abdichtende Sohlschicht voraussetzt). In diesem Fall kann die Infiltration als verstärkte Grundwasserneubildung dargestellt werden.

Abb. 3.48 veranschaulicht einige der genannten Konfigurationen. Ob ein Oberflächengewässer infiltriert oder exfiltriert lässt sich anhand der Einfallrichtung der Grundwasserdruckfläche feststellen.

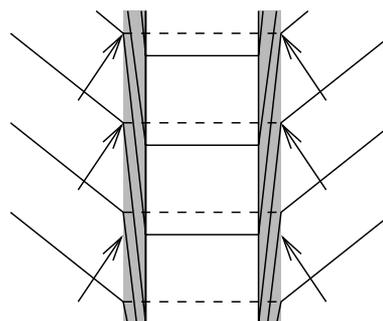
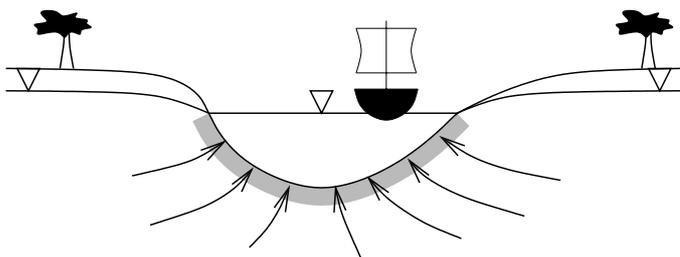
Direct Infiltration (heads in river and aquifer identical)



Direct Exfiltration (heads in river and aquifer identical)



Leaky Exfiltration (heads in river and aquifer differ)



Infiltration Through Unsaturated Zone

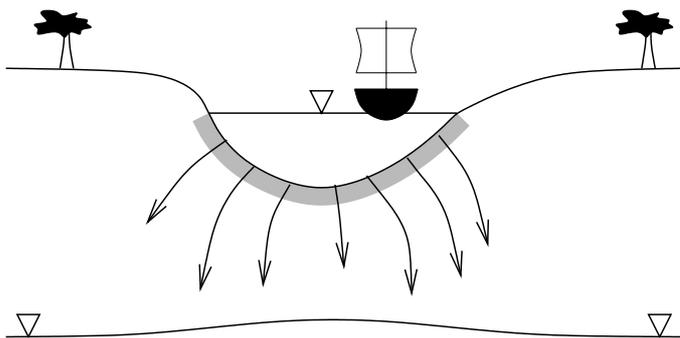


Abbildung 3.48: Austausch zwischen einem Fluss und einem Grundwasserleiter. Direkte Infiltration und Exfiltration, Exfiltration über eine halbdurchlässige Schicht sowie Infiltration in die ungesättigte Zone.

3.8.4 Dichteeffekte

In allen vorherigen Kapiteln sind wir davon ausgegangen, dass sich die Dichte des Wasser allenfalls durch die Kompressibilität des Wassers verändern kann. In realen Grundwasserleitern können sich jedoch Dichteunterschiede auch durch Konzentrations- und Temperaturunterschiede ergeben: Salzwasser ist schwerer als Süßwasser, und warmes Wasser ist leichter als kaltes. Eine genaue Untersuchung der dichtebeeinflussten Strömung setzt deshalb die gekoppelte Lösung von Strömung und Transport voraus. Hierbei werden grundsätzlich folgende Phänomene beobachtet:

- Eine instabile Schichtung ergibt sich, wenn das leichtere Wasser unter dem schwereren Wasser liegt. In diesem Fall steigt das leichte Wasser in sogenannten Fingern auf, während das schwere Wasser absinkt. Die Strömung ist unregelmäßig, es bilden sich fluktuierende Wirbel aus. Hierbei findet zu einem gewissen Grad eine Durchmischung des Wassers statt. Eine genaue Vorhersage der Strömung bei instabiler Schichtung ist grundsätzlich nicht möglich, weil kleine Störungen zu großen Änderungen des Strömungsmusters führen können.
- Bei einer stabilen Schichtung liegt das schwerere Wasser unterhalb des leichteren. Wird ein äußerer Druckgradient auf das leichtere Wasser aufgebracht, kann je nach Druckgradient und Dichteunterschied eine stabile Zirkulationsströmung induziert werden oder nicht. Bei starken Dichteunterschieden bleibt das schwere Wasser praktisch in Ruhe. Die Grenzfläche zwischen schwerem und leichtem Wasser stellt ein stabiles *Interface* dar.

Eine der wichtigsten Anwendungen der Dichteströmung ergibt sich bei der Trinkwassergewinnung aus Grundwasser in Küstennähe. Das schwere Salzwasser des Meeres kann nicht als Trinkwasser genutzt werden. Das leichte Süßwasser, das der Neubildung entstammt, schwimmt auf dem Salzwasser auf. Eine vereinfachte Beschreibung ergibt sich, wenn man das Süß- und das Salzwasser als unvermischbare Phasen betrachtet. Eine zusätzliche Vereinfachung besteht darin, für das Salzwasser vollständige Ruhe anzunehmen. Dann lässt sich die Druckverteilung im Salzwasser mit der hydrostatischen Druckverteilung berechnen, wobei die Meeresoberfläche den Nullpunkt darstellt.

Unter der Annahme eines ruhenden Salzwasserkörpers können wir die Lage des Interfaces aus einer Druckbetrachtung berechnen. Die Dichte des Salzwassers betrage ρ_s und die des Süßwassers ρ_f . Für das Salzwasser nehmen wir die hydrostatische Druckverteilung an, wobei die vertikale Koordinate z auf Meeressniveau ihren Nullpunkt hat. Den Druck im Süßwasser am Interface beschreiben wir mit einer Druckhöhe h_f über Meeressniveau, wobei sich die Höhe aus der Dichte des Süßwassers ergibt. Am Interface mit der Lage z_i müssen nun die Drücke in den beiden Phasen gleich sein. Hieraus ergibt sich:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Salzwasser} & p_s = -z\rho_s \\
 \text{Süßwasser} & p_f = (h_f - z)\rho_f \\
 & p_s = p_f \\
 \text{Interface} & \implies z_i = -\frac{\rho_f}{\rho_s - \rho_f}h_f
 \end{array} \tag{3.178}$$

Gehen wir nun für einen freien Grundwasserleiter in Küstennähe von der Dupuit-Annahme aus (hydrostatische Druckverteilung im Süßwasserkörper, vertikale Strömungskomponenten werden vernachlässigt), ergibt sich folgende Mächtigkeit des Süßwasserkörpers [Badon-Ghyben 1888, Herzberg 1901]:

$$m_f = (h_f - z_i) = \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho_f} h_f \quad (3.179)$$

Diesen Ansatz können wir in unsere tiefenintegrierte Strömungsgleichung für einen freien Grundwasserleiter einsetzen (siehe Herleitung von Gl. (3.71)):

$$n_e \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho_f} \frac{\partial h_f}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\bar{K} \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho_f} h_f \nabla h_f \right) = N \quad (3.180)$$

$$n_e \frac{\partial h_f}{\partial t} - \frac{1}{2} \nabla \cdot (\bar{K} \nabla h_f^2) = N \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_s} \quad (3.181)$$

wobei wir von einer unveränderlichen Dichte des Süß- und Salzwassers ausgegangen sind. Abb. 3.49 veranschaulicht die Lage des Interfaces für einen küstennahen Aquifer, die sich bei der genannten Betrachtung ergibt. An der Küste wird angenommen, dass das Süßwasser genau auf Meeresniveau ausströmt. Dies impliziert eine Mächtigkeit von null und damit eine unendlich hohe Filtergeschwindigkeit am Austrittspunkt. Bei einer realistischeren Betrachtung, die auf die Dupuit-Annahme verzichtet, ergibt sich eine freie Sickerstrecke in direkter Küstennähe und der teilweise Austritt des Grundwassers unter der Meeresoberfläche.

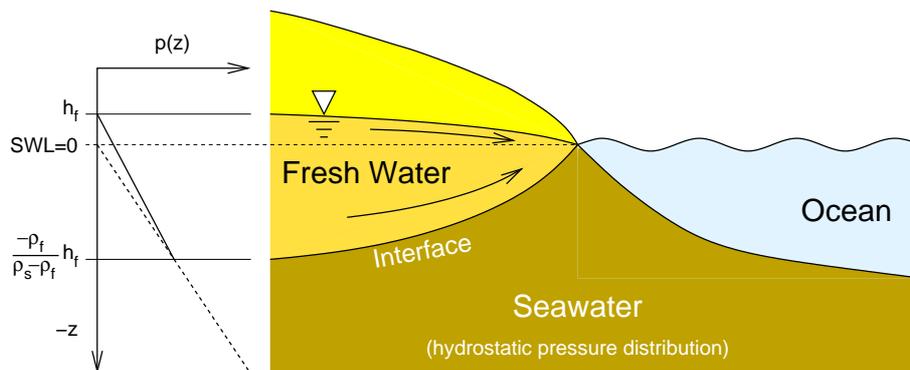


Abbildung 3.49: Vereinfachte Berechnung des Süßwasser/Salzwasser-Interfaces in Küstennähe.

3.9 Stofftransport in porösen Medien

3.9.1 Diffusion und Dispersion in porösen Medien

Porendiffusion

In porösen Medien wird der molekulare Diffusionskoeffizient durch die Verwundenheit der Bahnlinien reduziert. Die makroskopische Betrachtung poröser Medien vernachlässigt die Geometrie der einzelnen Poren, d.h. der betrachtete Weg zwischen zwei Punkten wird durch den Abstand definiert. Abb. 3.50 veranschaulicht, dass der tatsächliche Weg um die Körner herumführt und deshalb länger ist. Das Verhältnis zwischen tatsächlicher Weglänge und Abstand wird als *Tortuosität* τ [-] bezeichnet. Hieraus ergibt sich ein effektiver Diffusionskoeffizient D_e :

$$D_e = \frac{D}{\tau} \quad (3.182)$$

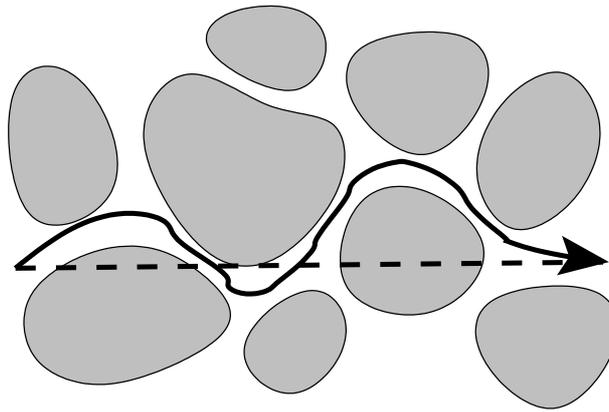


Abbildung 3.50: Tatsächliche Bahnlinie (durchgezogener Pfeil) und Abstand zwischen Anfangs- und Endpunkt in einem porösen Medium.

Die Tortuosität τ ist eine Materialeigenschaft des porösen Mediums. Sie ist nur über die Messung des effektiven Diffusionskoeffizienten zu bestimmen. Eine gute Näherung für gesättigte Verhältnisse ist:

$$\tau \approx \frac{1}{n_e} \quad (3.183)$$

wobei n_e die effektive Porosität ist. In der ungesättigten Zone ist τ sehr viel größer, weil der direkte Weg nicht nur von den Körnern sondern auch von der Luft blockiert wird.

Wenn man die Gesamtquerschnittsfläche des porösen Mediums als Referenz nimmt, muss man berücksichtigen, dass die Diffusion lediglich im Wasser stattfindet und nicht in den Körnern. Entsprechend muss die diffusive Massenflussdichte mit der Porosität multipliziert werden:

$$\mathbf{J}_d = -n_e D_e \nabla c \quad (3.184)$$

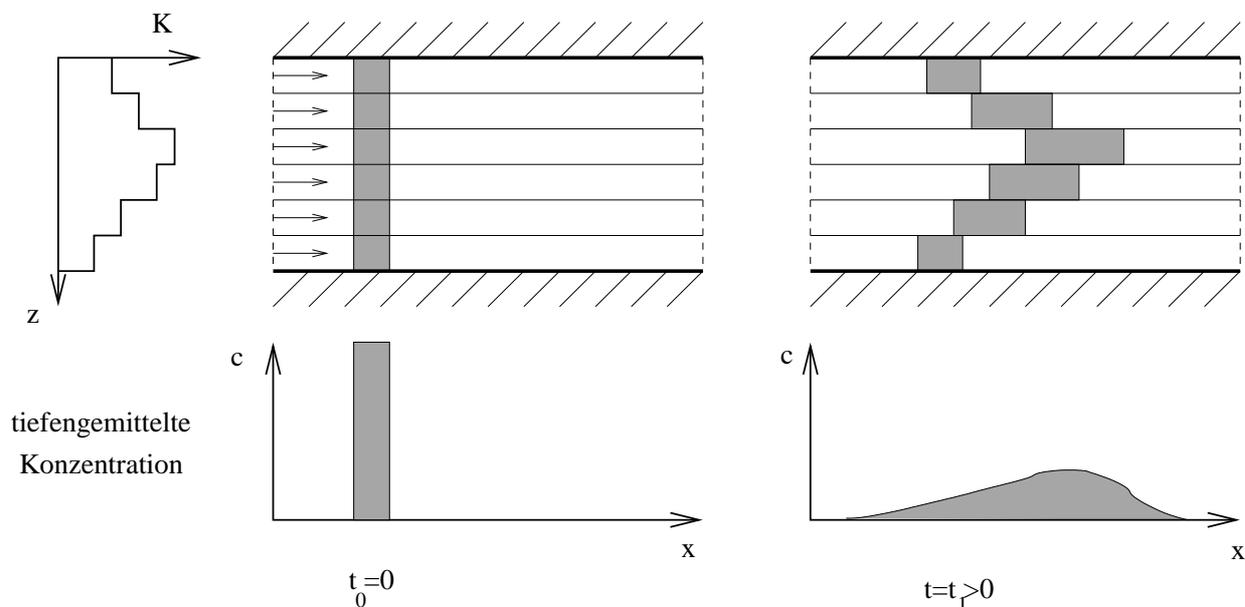


Abbildung 3.51: Makrodispersion in einem geschichteten Grundwasserleiter.

Hydrodynamische Dispersion in porösen und geklüfteten Medien

Die Strömung in einem porösen oder geklüfteten Medium ist bei hoch auflösender Betrachtung sehr variabel, weil die Form der Poren unregelmäßig ist. Wir beschreiben die Strömung in diesen Medien normalerweise in einem räumlich gemittelten Maßstab, in dem einzelne Poren nicht mehr auftreten und die gemittelte Geschwindigkeit mit dem Gesetz von Darcy beschrieben werden kann. Diese Betrachtungsweise möchten wir für den Transport übernehmen. Wie in Abb. 3.52 dargestellt ist, bewirkt die Variabilität der Strömung die Verformung einer advektiv verfrachteten Stoffwolke. Wir lösen die genaue Form der Stoffwolke nicht auf, sondern mitteln die Konzentration. Dabei entsteht zusätzlich zum advektiven Transport mit der mittleren Geschwindigkeit ein dispersiver Transport, der formal der Diffusion ähnelt.

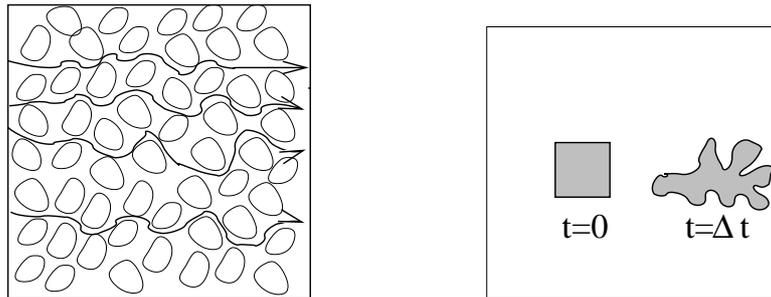


Abbildung 3.52: Advektive Verformung einer Stoffwolke in einem porösen Medium.

Verschiedene Mechanismen tragen zur korngerüstbedingten Dispersion bei (siehe Abb. 3.53):

- Die einzelnen Poren weisen \pm das parabolische Geschwindigkeitsprofil der laminaren Rohrströmung auf. Dies erzeugt Taylor-Aris Dispersion. Allerdings unterscheidet sich der zugehörige Makrodispersionskoeffizienten bei Wahl realistischer Parameter ($R \approx 10^{-4}m$, $v \approx 10^{-5}m/s$, $D \approx 10^{-9}m^2/s \implies D^* \approx 2 \cdot 10^{-11}m^2/s + D \approx D$) kaum vom molekularen Diffusionskoeffizient.
- Es findet ein Austausch zwischen den durchströmten Poren und Zwickeln, in denen keine Strömung besteht, statt.
- Die Poren weisen unterschiedliche Durchmesser auf, die zu unterschiedlichen Geschwindigkeiten führen. Ein wesentlicher Unterschied zur Taylor-Aris Dispersion liegt bei diesem Mechanismus darin, dass ein bestimmter Stromfaden relativ zu einem anderen in bestimmten Teilgebieten schneller und in anderen langsamer sein kann. Bei der Dispersion in laminarer Rohrströmung ist die Querdiffusion der einzige Prozess, der dazu führt, dass ein Teilchen das gesamte Geschwindigkeitsspektrum erfahren kann. Im Porennetzwerk kann Advektion dasselbe bewirken. Dies ist auf die stochastische Natur der Strömung im Porennetzwerk zurückzuführen. Die Konsequenz hieraus ist, dass der Dispersionskoeffizient in ungeordneten porösen Medien proportional zur Geschwindigkeit und nicht zu dessen Quadrat ist [Scheidegger 1961, Koch & Brady 1985].
- Die Körner bewirken ferner, dass die Strömung in Querrichtung abgelenkt wird. Die stochastischen Geschwindigkeitsfluktuationen führen damit auch zu einem dispersiven Massenfluss in Querrichtung [Saffman 1959, Saffman 1960, de Josselin de Jong 1958].

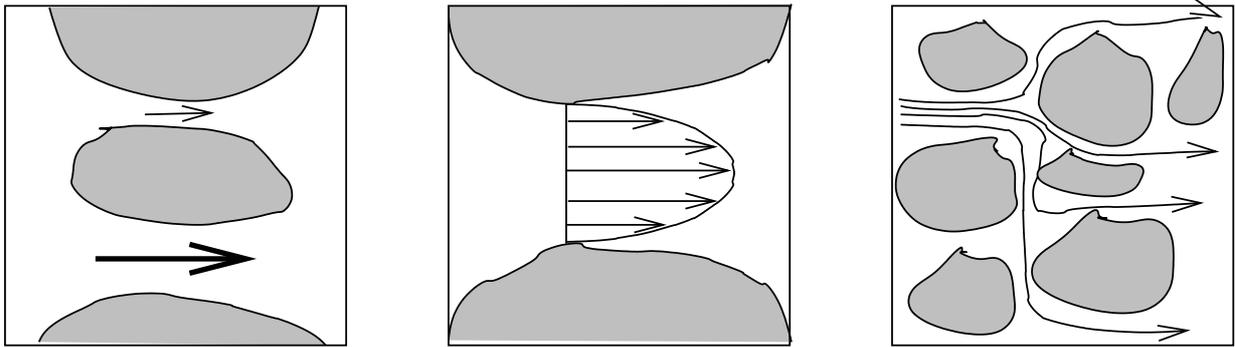


Abbildung 3.53: Mechanismen, die zur Dispersion in porösen Medien beitragen.

Bei Mittelung über das kleinste Volumen, in dem das Darcy-Gesetz Gültigkeit hat, erhalten wir folgende Parametrisierung des Dispersionskoeffizienten [Scheidegger 1961]:

$$D_\ell = \alpha_\ell v + D_e \quad (3.185)$$

$$D_t = \alpha_t v + D_e \quad (3.186)$$

wobei D_ℓ der Längs-, D_t der Querdispersionskoeffizient und D_e der effektive molekulare Diffusionskoeffizient sind. Die Längsdispersivität α_ℓ entspricht ungefähr dem mittleren Korndurchmesser, während die Querdispersivität α_t um einen Faktor 5-20 kleiner ist. v ist die Abstandsgeschwindigkeit q/n_e . Wir sprechen bei der geschwindigkeitsproportionalen Dispersion auch von der *hydrodynamischen Dispersion*. Der dispersive Massenfluss lässt sich am praktischsten in Matrixschreibweise darstellen:

$$\mathbf{J}_d = -n_e \mathbf{D} \nabla c \quad (3.187)$$

mit dem Dispersionstensor:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha_\ell v + D_e & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_t v + D_e & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_t v + D_e \end{bmatrix}, \text{ wenn } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.188)$$

Bei beliebig orientierter Abstandsgeschwindigkeit ergibt sich für den Dispersionstensor aus der Drehung der Koordinaten:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\|\mathbf{v}\|} (\alpha_\ell - \alpha_t) + \mathbf{I} (D_e + \alpha_t \|\mathbf{v}\|) \text{ für beliebiges } \mathbf{v} \quad (3.189)$$

wobei \mathbf{I} die Einheitsmatrix ist (alle Einträge auf der Hauptdiagonalen betragen eins, alle anderen null).

Die Variabilität des Geschwindigkeitsfeldes setzt sich auf größeren Skalen fort. Mikrostrukturen sedimentärer Ablagerungen (gradierte Schichtung, Kreuzablagerungen, Rippel etc.) führen zur Variabilität der hydraulischen Durchlässigkeit im cm-Maßstab. In der ungesättigten Zone können auf dieser Skala auch Wurzel- und Wurmgänge sowie Bodenaggregate zu Durchlässigkeitsunterschieden führen. Im Bereich von Metern können wir weitere sedimentäre Strukturen (z.B. Kiesbänke in fluviatilen Ablagerungen) feststellen. In noch größeren Skalen spielen Wechsel des Gesteins eine wichtige Rolle. Mit den Unterschieden in den Gesteinen sind häufig Unterschiede in der hydraulischen Durchlässigkeit und damit in der Geschwindigkeit verbunden. Abb. 3.54 versucht die räumliche Variabilität natürlicher Grundwasserleiter zu illustrieren.

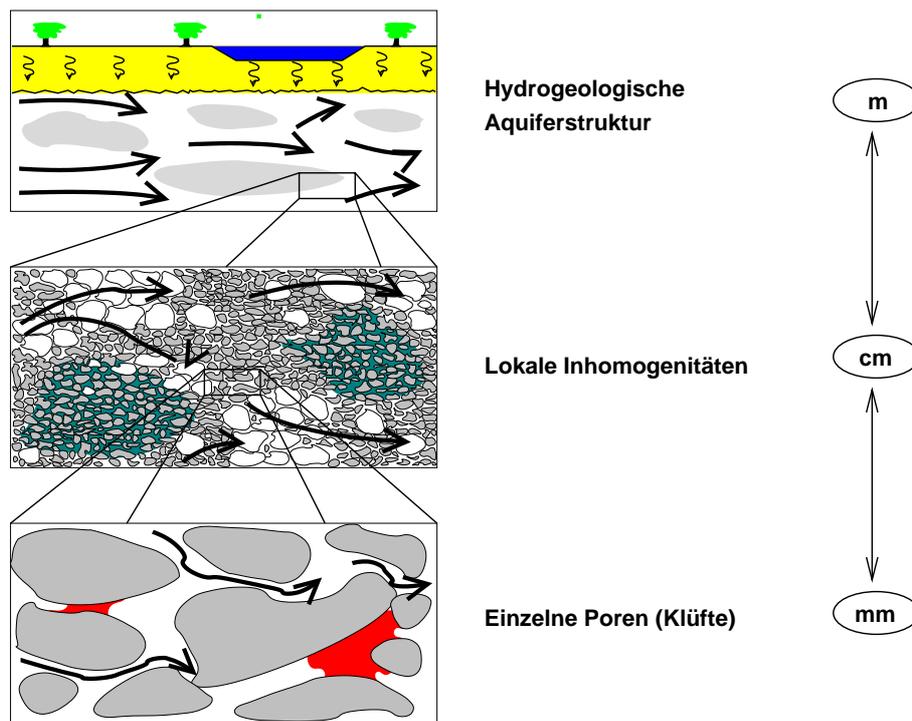


Abbildung 3.54: Variabilität der Grundwasserströmung auf unterschiedlichen Skalen.

Wie oben dargestellt wurde, ergibt sich die Dispersion aus einem Mittelungsprozess über räumliche Fluktuationen des Geschwindigkeitsfeldes. Wenn es räumliche Variabilität auf allen Skalen gibt, ist die Größe der Dispersionskoeffizienten eine Frage des Mittelungsvolumens. Längsdispersivitäten im Bereich mehrerer Meter sind in regionalen Grundwassermodellen durchaus typisch. Die Querdispersivität nimmt dagegen mit der Größe des Mittelungsvolumens weniger stark zu. Typische Werte liegen um 1mm .

Alternative Parametrisierung der Dispersion

Neben der Parametrisierung der Dispersion als diffusionsartiger Prozess wurden auch Ansätze entwickelt, die davon ausgehen, dass das Gebiet von mehreren Kontinua durchdrungen ist, die unterschiedliche Geschwindigkeiten aufweisen und miteinander im kinetischen Austausch stehen. Abb. 3.55 veranschaulicht die folgenden konzeptionellen Modelle:

- Das 2-Bereiche Modell, das in der ungesättigten Bodenzone den Austausch zwischen mobilem Bodenwasser und immobilem Wasser in Bodenaggregaten beschreibt [Coats & Smith 1964, van Genuchten & Wierenga 1976], wird im Grundwasser auch für den Austausch mit größeren Bereichen schlechter Durchlässigkeit verwendet [Brusseu 1994] und in Flüssen zur Beschreibung des Stoffübergangs zwischen durchströmter Rinne und Totwasserzonen eingesetzt [Fischer et al. 1979]. Das Modell geht davon aus, dass der advective Transport auf einen mobilen Teilbereich beschränkt ist. Im Fall poröser Medien ist dies ein Anteil am Porenraum, im Fall von Flüssen ein Anteil des Flusskörpers. Der verbleibende Anteil des fluiderfüllten Raums wird nicht durchströmt. Der Austausch

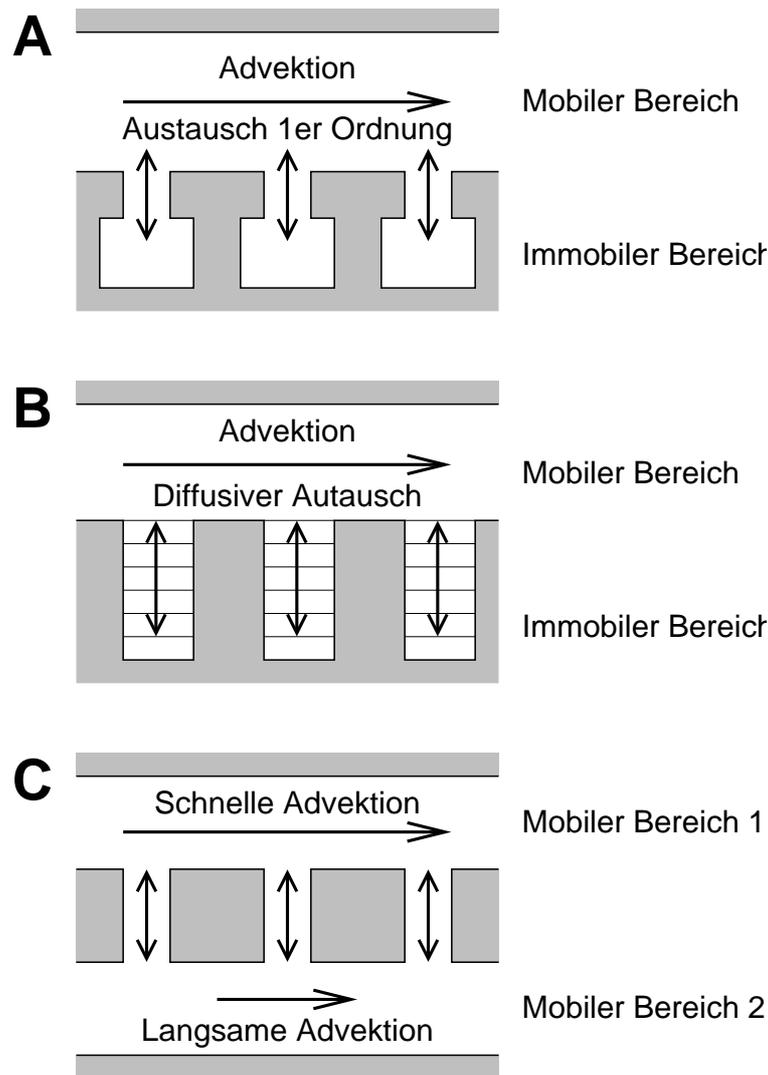


Abbildung 3.55: Mehrkontinua-Ansätze als konzeptionelle Modelle für die Dispersion: A: Totzonenmodell mit Austausch erster Ordnung; B: Diffusion in immobile Bereiche; C: Doppelkontinuummodell mit zwei Geschwindigkeiten.

erfolgt nach einem Gesetz erster Ordnung:

$$n_{im} \frac{\partial c_{im}}{\partial t} = \lambda (c_{im} - c_{mob}) \quad (3.190)$$

$$n_{mob} \frac{\partial c_{im}}{\partial t} = \lambda (c_{mob} - c_{im}) + \text{Transportterme} \quad (3.191)$$

wobei die Indizes *im* und *mob* auf den immobilen und mobilen Bereich verweisen, n_{im} und n_{mob} [-] die Volumenanteile der immobilen und mobilen Bereiche sind und λ [T^{-1}] einen Austauschkoeffizienten erster Ordnung darstellt.

- Das 2-Bereiche Modell lässt sich verfeinern, indem man eine echte Diffusion in den immobilen Bereich hinein beschreibt. Dies ist insbesondere in porösen Medien für die Penetration von Filmen (z.B. Biofilme) oder das Eindringen in poröse Körner eine realistischere Beschreibung des Austauschvorganges als das Gesetz erster Ordnung, bei dem

nur eine mittlere Konzentration innerhalb der immobilen Phase verwendet wird [Ball & Roberts 1991].

- Insbesondere für die Beschreibung von Karstgrundwasserleitern hat sich ein Modell bewährt, bei dem der immobile Bereich in einen Bereich mit niedrigerer Durchströmungsgeschwindigkeit umgewandelt wurde [Barenblatt et al. 1960]. Das schnelle Kontinuum soll hierbei das Kluftnetzwerk beschreiben und das langsame die poröse Festgesteinsmatrix.

3.9.2 Advektions-Dispersionsgleichung für poröse Medien

Wir beziehen uns jetzt wieder auf die allgemeine Erhaltungsgleichung für eine explizite Speichergröße mit Volumendichte ϱ , Flussdichte \mathbf{f} und volumenbezogenem Quell/Senkenterm s , Gl. (1.15):

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} = s \quad (1.15)$$

1. Die zu bilanzierende extensive Größe ist die Masse des gelösten Stoffes im Wasser. Das Kontrollvolumen umfasst sowohl wasser- als auch kornerfüllten Raum. Im Fall der ungesättigten Zone, wird ein Teil des Volumens durch Luft eingenommen. Deswegen entspricht die Masse des gelösten Stoffes pro Gesamtvolumen dem Produkt aus Volumenkonzentration c und dem volumetrischen Wassergehalt Θ_w :

$$\varrho \rightarrow c\Theta_w \quad (3.192)$$

2. Die zugehörige Flussdichte ist die Massenflussdichte des gelösten Stoffes, d.h. die Masse des Stoffes, die pro Zeiteinheit über eine Einheit des Querschnittes [inklusive Kornquerschnitt] transportiert wird. Sie setzt sich aus dem advektiven Fluss $\mathbf{q}c$ und dem diffusiv-dispersiven Fluss \mathbf{J}_d zusammen:

$$\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{q}c - \Theta_w \mathbf{D} \nabla c \quad (3.193)$$

3. Die Quellen und Senken beinhalten den Massenfluss eines gelösten Stoffes wenn Wasser durch eine interne Volumquelle zu bzw. abfließt sowie einen Reaktionsterm:

$$s \rightarrow c_* W_0 + r\Theta_w \quad (3.194)$$

mit

$$c_* = \begin{cases} c_{in} & \text{wenn } W_0 > 0 \\ c & \text{wenn } W_0 < 0 \end{cases}$$

Damit wird aus der allgemeinen Erhaltungsgleichung, Gl. (1.15), für den Massenerhalt des im Wasser gelösten Stoffes:

$$\frac{\partial (c\Theta_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{q}c - \Theta_w \mathbf{D} \nabla c) = c_* W_0 + \Theta_w r \quad (3.195)$$

Wir differenzieren jetzt den Speicherterm und die Divergenz des advektiven Flusses aus und berücksichtigen die Erhaltungsgleichung für die Masse des Wassers:

$$\frac{\partial (c\Theta_w)}{\partial t} = c \frac{\partial \Theta_w}{\partial t} + \Theta_w \frac{\partial c}{\partial t} \quad (3.196)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{q}c) = c \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \nabla c \quad (3.197)$$

$$\frac{\partial \Theta_w}{\partial t} = W_0 - \frac{\Theta_w}{\varrho_w} \frac{\partial \varrho_w}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (3.38)$$

Dies ergibt:

$$\Theta_w \frac{\partial c}{\partial t} - c \frac{\Theta_w}{\varrho_w} \frac{\partial \varrho_w}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\Theta_w \mathbf{D} \nabla c) = (c_{in} - c) W_{in} + r \Theta_w \quad (3.198)$$

sowie nach Division durch den volumetrischen Wassergehalt Θ_w und Vernachlässigung von $\nabla \Theta_w$ im Dispersionsterm:

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{c}{\varrho_w} \frac{\partial \varrho_w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) = (c_{in} - c) \frac{W_{in}}{\Theta_w} + r \quad (3.199)$$

mit

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{q}}{\Theta_w} \quad (3.200)$$

wobei \mathbf{v} als Abstandsgeschwindigkeit bezeichnet wird.

Gl. (3.199) unterscheidet sich lediglich in einer Hinsicht von den Transportgleichungen für freie Wasserkörper: Als maßgebliche Geschwindigkeit ist die Abstandsgeschwindigkeit \mathbf{v} zu verwenden, die um den Faktor $1/\Theta_w$ höher ist als der spezifische Durchfluss \mathbf{q} . Dieser Unterschied rührt von der Massenspeicherung im wassererfüllten Porenvolumen anstelle des Gesamtvolumens. Wenn wir die Dichtefluktuationen des Wassers vernachlässigen, erhalten wir:

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) = (c_{in} - c) \frac{W_{in}}{\Theta_w} + r} \quad (3.201)$$

3.9.3 Berücksichtigung einer Festphase in der Transportgleichung

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Transportgleichung im Grundwasser verändert, wenn wir eine sorbierenden Phase berücksichtigen. Die Massenflüsse verändern sich durch die Sorption nicht, der Stoff kann jetzt jedoch auch in der Festphase gespeichert werden. Zur Vereinfachung gehen wir von vollständig wassergesättigten Verhältnissen aus. Dann ist der volumetrische Wassergehalt Θ_w identisch zur effektiven Porosität n_e , und der volumetrische Korngehalt ist $1 - n_e$. Üblicherweise werden Konzentrationen in der Festphase s [M/M] auf die Masse der Festphase bezogen. Dann lautet die volumetrische Dichte der zu speichernden Größe:

$$n_e c + (1 - n_e) \varrho_s s \quad (3.202)$$

mit der Massendichte ϱ_s der Festphase. Aus Gl. (3.195) wird nun:

$$\frac{\partial (n_e c + (1 - n_e) \varrho_s s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{q} c - n_e \mathbf{D} \nabla c) = c_* W_0 + n_e r \quad (3.203)$$

Unter Verwendung der gleichen Annahmen wie im Fall eines nicht sorbierenden Stoffes erhalten wir:

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{(1 - n_e) \varrho_s}{n_e} \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) = (c_{in} - c) \frac{W_{in}}{n_e} + n_e r} \quad (3.204)$$

Die erweiterte Transportgleichung, Gl. (3.204), beinhaltet zwei Speicherterme, einen in der wässrigen und den anderen in der sorbierenden Phase. Gl. (3.204) gilt unabhängig davon, ob für die Sorption Gleichgewicht angenommen wird oder nicht. Dies ist dadurch bedingt, dass der Speicherterm die Summe der Konzentrationen in beiden Phasen beinhaltet.

Annahme des lokalen Sorptionsgleichgewichts

Die Transportgleichung mit Sorption, Gl. (3.204), beinhaltet zwei Konzentrationen für eine Substanz. Nur wenn wir davon ausgehen, dass an jedem Punkt das Sorptionsgleichgewicht erreicht ist, besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den beiden Konzentrationen:

$$s(x) = f(c(x)) \quad (3.205)$$

Wir können nun die Kettenregel der Differentiation auf die Zeitableitung der sorbierten Konzentration anwenden:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial c}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial c} \quad (3.206)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(c + \frac{(1 - n_e) \rho_s}{n_e} s \right) = \underbrace{\left(1 + \frac{(1 - n_e) \rho_s}{n_e} \frac{\partial s}{\partial c} \right)}_{=R(c)} \frac{\partial c}{\partial t} \quad (3.207)$$

$R(c)$ ist als Retardationskoeffizient bekannt. Die Transportgleichung mit Sorption, Gl. (3.204), kann nun als Gleichung für die Konzentration im Wasser allein ausgedrückt werden:

$$R \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) = (c_{in} - c) \frac{W_{in}}{n_e} + n_e r \quad (3.208)$$

Der Retardationskoeffizient hängt von der Gesetzmäßigkeit der Gleichgewichtssorption $s(c)$ ab. Diese Funktion wird als Sorptionsisotherme bezeichnet. Tabelle 3.12 listet Retardationskoeffizienten für verschiedene gebräuchliche Sorptionsisothermen auf. Nur im Fall der linearen Sorption ist der Retardationskoeffizient unabhängig von der Konzentration. Die Langmuir-Isotherme führt zu abnehmenden Retardationskoeffizienten mit zunehmender Konzentration. Bei der Freundlich-Isotherme hängt die Zu- oder Abnahme des Retardationskoeffizienten mit der Konzentration vom Exponenten n ab. Die Freundlich-Isotherme mit $n < 1$ hat für $c_w = 0$ sogar einen unendlich großen Retardationskoeffizienten.

Tabelle 3.12: Retardationskoeffizienten für unterschiedliche Sorptionsisothermen.

Name	Sorptionsisotherme	Retardationskoeffizient
linear	$s(c) = K_d c$	$R = 1 + \frac{(1 - n_e)}{n_e} \rho_s K_d$
Freundlich	$s(c) = K c^n$	$R = 1 + \frac{(1 - n_e)}{n_e} \rho_s K n c^{n-1}$
Langmuir	$s = \frac{s_{\max} c}{c + K}$	$R = 1 + \frac{(1 - n_e)}{n_e} \rho_s \frac{s_{\max} K}{(c + K)^2}$

Der Vergleich zwischen Gl. (3.208) und Gl. (3.201) zeigt, dass die Gleichgewichtssorption zu einem Vorfaktor für die zeitliche Ableitung der Konzentration im Wasser führt. Dieser Faktor, Retardationskoeffizient R genannt, ist immer größer eins. Das bedeutet, die advektiv-dispersiven und reaktiven Terme führen zu einer langsameren Konzentrationsänderung als im Fall ohne Sorption. Deshalb auch "Retardation"="Verlangsamung". Dies ist darin begründet, dass mehr von dem Stoff gespeichert wird als die Masse in der wässrigen Phase.

Für den Fall einer linearen Gleichgewichtssorption sind die Konzentrationsverläufe im retardierten und nicht-retardierten Fall grundsätzlich gleich. Es finden lediglich alle Konzentrationsänderungen zu einem späteren Zeitpunkt statt. Im Fall nichtlinearer Sorptionsisothermen hängt die Retardation von der Konzentration selbst ab. Z.B. ist R im Fall der Langmuir-Isotherme größer für kleine Konzentrationen. In diesem Fall werden Konzentrationsänderungen

bei niedrigen Konzentrationen stärker verzögert als bei hohen, was zu einer Verformung der Konzentrationsprofile und Durchbruchskurven führt.

Kinetische Sorption

Wir betrachten die kinetische Sorption für den Fall des *linear-driving-force* Ansatzes:

$$\left. \frac{\partial s}{\partial t} \right|_{sorb} = \lambda (K_d c - s) \quad (3.209)$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial t} \right|_{sorb} = \frac{n_e}{(1 - n_e) \varrho_s} \lambda (s - K_d c) \quad (3.210)$$

Hierbei wurde impliziert, dass der Gleichgewichtszustand, den das System anstrebt, einer linearen Sorptionsisotherme entspricht. Wir vernachlässigen andere reaktive Terme, sodass Gl. (3.204) sich wie folgt vereinfacht:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{(1 - n_e) \varrho_s}{n_e} \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) = 0 \quad (3.211)$$

Nun setzen wir Gl. (3.209) als den Ausdruck für die Konzentrationsveränderung in der sorbierenden Phase in Gl. (3.211) ein und erhalten folgende gekoppelten Gleichungen:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) = \frac{(1 - n_e) \varrho_s}{n_e} \lambda (s - K_d c) \quad (3.212)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \lambda (K_d c - s) \quad (3.213)$$

Gln. (3.212 & 3.213) beschreiben den Transport eines konservativen Tracers, der einer kinetischen Sorption mit linearer Sorptionsisotherme unterliegt. Im Gegensatz zum Gleichgewichtsfall müssen wir zwei gekoppelte Gleichungen lösen, weil zwischen den Konzentration im Wasser und in der sorbierenden Phase kein eindeutiger Zusammenhang besteht.

3.9.4 Wirkung der Prozesse

Nachdem nun die Transportgleichung mit unterschiedlichen Zusatztermen vorgestellt worden ist, wollen wir - zunächst ohne exakte Herleitung der Gleichungen - die qualitative Wirkung der beschriebenen Prozesse auf Konzentrationsprofile diskutieren. Hierzu enthält Abb. 3.56 schematische Darstellungen.

- Die **Advektion** bewirkt eine laterale Verschiebung der Konzentrationsverteilung. Bei konstanter Geschwindigkeit verändert sich die Form der Verteilung nicht.
- Die **Dispersion** führt zu einer Verschmierung der Konzentrationsverteilung. Steile Gradienten werden abgebaut. Für den dargestellten Rechteckpuls als Anfangsverteilung weist die Konzentrationsverteilung folgende Symmetrien auf:
 - An jeweils der an- und absteigenden Flanke ist die Konzentrationsverteilung punktsymmetrisch bezüglich des Punktes mit der mittleren Konzentration (zumindest solange sich die beiden Flanken noch nicht überlagern).
 - Es gibt kein unterschiedliches Verhalten zwischen Konzentrationsan- und -abstieg.

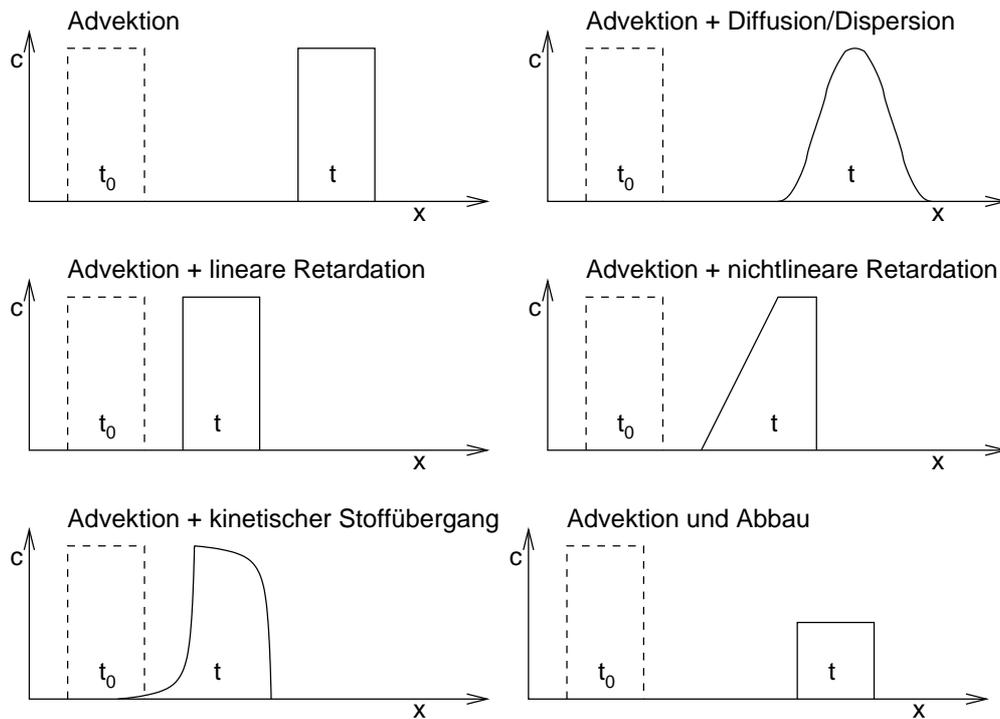


Abbildung 3.56: Konzentrationsprofile im eindimensionalen Transport unter Berücksichtigung unterschiedlicher Prozesse.

- Die **lineare Gleichgewichtssorption** führt zur linearen Retardation. Die Stoffwolke bewegt sich langsamer durch das Gebiet. Die Form wird jedoch nicht verändert.
- Die **nichtlineare Gleichgewichtssorption** bewirkt eine konzentrationsabhängige Retardation. Im dargestellten Fall ist die Retardation stärker für niedrigere Konzentrationen. Dies bewirkt beim Konzentrationsabfall ein auseinandergezerrtes Profil, wohingegen sich beim Konzentrationsanstieg eine steiles Profil ausbildet.
- Die **kinetische Sorption** führt zu einem verzögerten An- und Abstieg der Konzentration. Im Gegensatz zur Dispersion besteht keine Punktsymmetrie bezüglich des Punktes mit der mittleren Konzentration. Das Verhalten von Konzentrationsan- und -abstieg ist jedoch identisch.
- Der **Abbau** bewirkt einen Verlust an Masse. Die Konzentrationen werden kleiner.

Kombinationen der Prozesse, z.B. advektiv-dispersiver Transport eines kinetisch nicht-linear sorbierenden Stoffes, bewirken kombinierte Konzentrationsprofile. In diesen Fällen ist es häufig nicht möglich, aus den Profilen alle Parameter abzuleiten, weil unterschiedliche Prozesse ähnliche Wirkungen haben.

3.10 Fließzeiten-Analyse

Für den dispersionslosen Grenzfall lässt sich die Transportgleichung entscheidend vereinfachen. Wir beginnen mit der Advektions-Reaktionsgleichung für eine quellenfreie Strömung:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = r \quad (3.214)$$

und führen die advective Fließzeit τ ein:

$$\tau(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \frac{d\xi}{\|\mathbf{v}(\xi)\|} \quad (3.215)$$

hierbei ist \mathbf{x}_0 der Startpunkt der Bahnlinie, die zum Betrachtungspunkt \mathbf{x} führt. ξ ist die Raumkoordinate entlang der gekrümmten Trajektorie (Bahnlinie). Die Fließzeit $\tau(\mathbf{x})$ beschreibt, wie lange ein Teilchen, das lediglich der Advektion unterliegt, unterwegs ist, um Punkt \mathbf{x} zu erreichen. Abb. 3.57 zeigt Stromlinien und Isochronen (Linien gleicher Fließzeit) für einen Brunnenpaar in Grundströmung. Bei pulsartiger Zugabe in den Zugabebrunnen würde die Konzentrationsverteilung unter Vernachlässigung der Dispersion linienhaft sein, und zwar genau entsprechend der Isochrone der betrachteten Fließzeit.

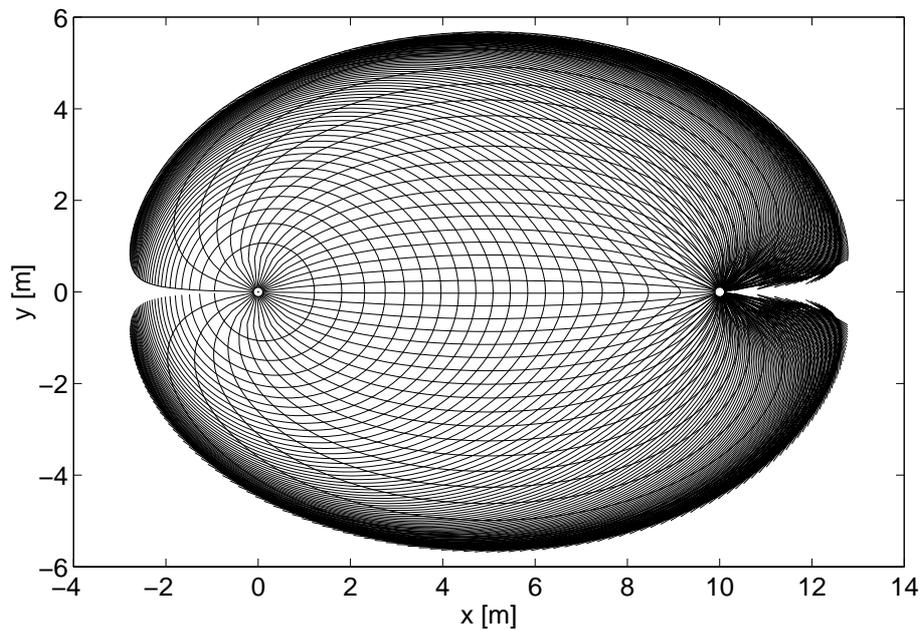


Abbildung 3.57: Numerisch ermittelte Stromlinien und Isochronen (Linien gleicher Fließzeit) für die Stoffeinleitung in einen Brunnen bei Entnahme in einem unterstromigen Brunnen.

Mit Hilfe der Fließzeit lassen sich advective Durchbruchkurven konstruieren. Die Durchbruchkurve entspricht nun der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(\tau)$ der Fließzeit an der Mantelfläche der Brunnenverfilterung.

Die räumliche Ableitung $\partial\tau/\partial x_\ell$ der Fließzeit $\tau(\mathbf{x})$ nach der Langsrichtung der Strömung beträgt:

$$\frac{\partial\tau}{\partial x_\ell} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \quad (3.216)$$

Damit kann das Skalarprodukt des Konzentrationsgradientens mit der Geschwindigkeit wie folgt ausgedrückt werden:

$$\nabla c \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial c}{\partial x_\ell} \|\mathbf{v}\| = \frac{\partial c}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_\ell} \|\mathbf{v}\| = \frac{\partial c}{\partial \tau} \quad (3.217)$$

Womit sich die Advektions-Reaktionsgleichung, Gl. (3.214), drastisch vereinfacht [Simmons

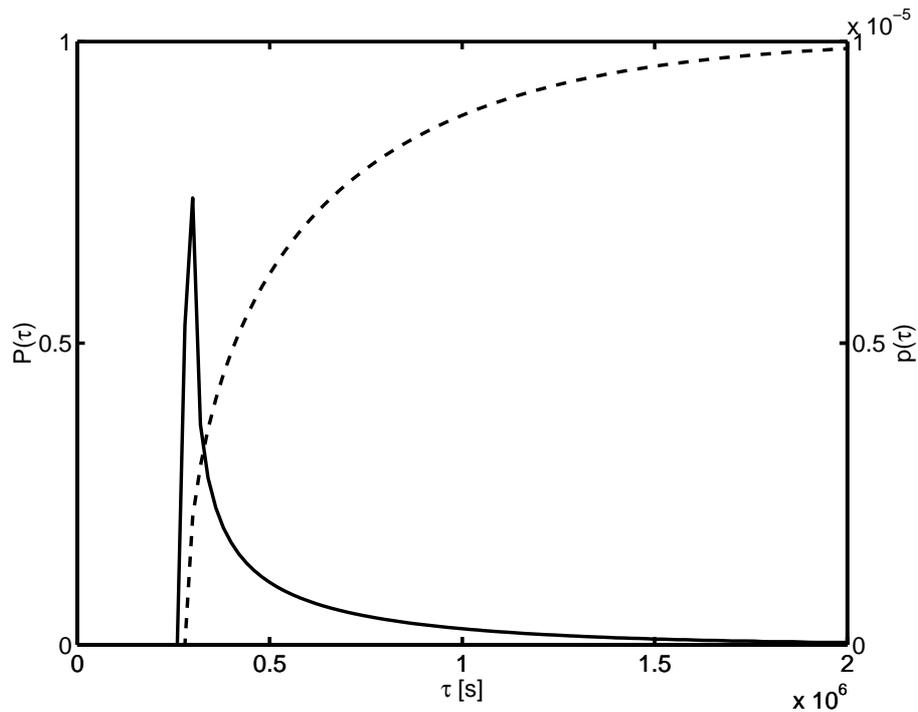


Abbildung 3.58: Durchbruchkurve (durchgezogen) und kumulative Durchbruchkurve (gestrichelt) im Entnahmebrunnen bei pulsartiger Zugabe in den Zugabebrunnen.

et al. 1995, Yabusaki et al. 1998, Crane & Blunt 1999, Cirpka & Kitanidis 2001]:

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial \tau} = r} \quad (3.218)$$

Das heißt, beim Wechsel von räumlichen Koordinaten \mathbf{x} zur Fließzeitkoordinate τ wird aus der mehrdimensionalen Advektions-Reaktionsgleichung mit variabler Geschwindigkeit eine eindimensionale Transportgleichung mit konstantem Koeffizienten von eins. Die Anwendung auf den reaktiven Transport setzt voraus, dass der Reaktionsterm r als Funktion der Fließzeit τ ausgedrückt werden darf. Dies ist bei räumlich konstanten Koeffizienten der Fall, aber auch bei Systemen, in denen die Reaktionsraten im Wesentlichen vom Transport selbst bestimmt werden. Bei der Anwendung auf den reaktiven Transport ist die Fließzeitformulierung besonders günstig, weil aufwändige mehrdimensionale reaktive Transportberechnungen durch einfachere 1-D-Berechnungen ersetzt werden können. Die Mehrdimensionalität beschränkt sich dann auf die Ermittlung der Fließzeiten.

Analog zum eindimensionalen Fall können wir die Transportgleichung um eine sorbierte Phase erweitern. Wir berücksichtigen jetzt Advektion in der wässrigen Phase gekoppelt mit Massenspeicherung und Reaktionen in der wässrigen und einer sorbierenden Phase:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{(1 - n_e)\rho_s}{n_e} \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = r \quad (3.219)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{(1 - n_e)\rho_s}{n_e} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial \tau} = r \quad (3.220)$$

Für den Fall von Gleichgewichtssorption ohne weitere Reaktionen ergibt sich damit:

$$R \frac{\partial c_w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c_w = 0 \quad (3.221)$$

$$R \frac{\partial c_w}{\partial t} + \frac{\partial c_w}{\partial \tau} = 0 \quad (3.222)$$

mit dem bereits im eindimensionalen Transport definierten Retardationskoeffizienten R :

$$R(c_w) = 1 + \frac{(1 - n_e) \rho_s}{n_e} \frac{\partial s}{\partial c_w} \quad (3.223)$$

3.10.1 Bestimmung von Fließzeiten in stationären Strömungen

Die mittlere Aufenthaltszeit eines Wasserteilchens in einem Wasserkörper ergibt sich aus dem Quotienten des betrachteten Volumens und dem Durchfluss (Summe aller Zuflüsse oder Entnahmen):

$$\text{mittlere Verweilzeit } \tau_m = \frac{\text{Volumen des durchflossenen Wasserkörpers } [m^3]}{\text{Durchfluss } [m^3/s]} \quad (3.224)$$

Leider ist mit dieser Bilanzbetrachtung im Allgemeinen keine räumliche Differenzierung möglich. Für Entnahmepunkte würden wir genau einen Wert erhalten, z.B. die mittlere Verweilzeit in einem Grundwasserleiter aus dem Volumen des Einzugsgebietes und der Entnahmerate. In Wirklichkeit beobachten wir jedoch an Entnahmepunkten eine Verteilung der Ankunftszeiten. Deshalb ist die Bestimmung der Fließzeit aus dem Integral in Gl. (3.215) unumgänglich. Hierzu sind mehrere Lösungswege denkbar:

a.) Auswertung eines Strömungsnetzes (veraltet)

1. Bestimmung der Stromlinien aus der gegebenen Verteilung der Standrohrspiegelhöhen.
2. Aufteilung der Stromlinien in einzelne Wegstücke.
3. Ermittlung der repräsentativen Abstandsgeschwindigkeit für das Weginkrement $\Delta \xi_i$.
4. Bildung der mittleren Verweilzeiten $\Delta \tau_i$ für die einzelnen Weginkremente $\Delta \xi_i$.
5. Addition der anteiligen Fließzeiten $\Delta \tau_i$.

b.) Direkte Integration von Gl. (3.215)

1. Näherungsweise Beschreibung der Strömung durch eine analytische Funktion.
2. Lösung des Integrals bei bekanntem Stromlinienverlauf und bekanntem Geschwindigkeitsfeld.

c.) Numerische Integration von Gl. (3.215)

1. Einsetzen einzelner Tracerteilchen in das bekannte analytisch oder numerisch berechnete Strömungsfeld.
2. Bestimmung der Abstandsgeschwindigkeit der Teilchen.
3. Berechnung des Fließweges der Tracerteilchen für einen vorgegebenen Zeitschritt Δt und Versetzen der Teilchen in ihre neue Position.

4. Erneute Berechnung von Punkt 2. und 3. und Addition der Zeitschritte. Für die Berechnung der Fließzeiten zu einem Entnahmepunkt (z.B. Brunnen) hin empfiehlt es sich, die Markierungsteilchen an den Rand des Entnahmepunktes zu setzen und die Stromlinien mit Punkten gleicher Fließzeit durch Voranschreiten entgegen der Fließrichtung (negative Zeitschritte) zu finden (*backward tracking*).

Beispiele für die analytische Integration der Strömungsgleichung

Einzelbrunnen ohne Grundströmung In einem homogenen, isotropen Grundwasserleiter mit Brunnen ohne Grundströmung ist die Strömung radialsymmetrisch. Die radiale Abstandsgeschwindigkeit beträgt:

$$v(r) = \frac{Q_w}{2n_e \pi r m} \quad (3.225)$$

mit der Pumprate des Brunnens Q_w . In einem homogenen, gespannten Grundwasserleiter ist die Mächtigkeit m räumlich gleichförmig. Die tangentielle Komponente der Geschwindigkeit ist null. Damit ergibt sich für die Fließzeit τ :

$$\tau(r) = \int_0^r \frac{d\rho}{v(\rho)} = \int_0^r \frac{2n_e \pi \rho m}{Q_w} d\rho = \frac{n_e \pi r^2 m}{Q_w} \quad (3.226)$$

Einzelbrunnen in Grundströmung Das Strömungsfeld und damit auch die mittleren Verweilzeiten sind für den Fall einer Entnahme aus einem Grundwasserstrom abhängig vom spezifischen Durchfluss der Grundströmung q_0 , der Entnahmerate Q , der effektiven Porosität n_e und der Aquifermächtigkeit m . Das Strömungsfeld wird durch folgende Beziehungen beschrieben:

$$\text{Stromfunktion} \quad \psi = \frac{Q_w}{2\pi m} \beta + y q_0 \quad (3.227)$$

$$\text{spezifischer Durchfluss} \quad q_x = q_0 + \frac{Q_w}{2\pi m \sqrt{x^2 + y^2}} \cos \beta \quad (3.228)$$

$$q_y = \frac{Q_w}{2\pi m \sqrt{x^2 + y^2}} \sin \beta \quad (3.229)$$

mit: $\beta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$; Koordinatenursprung im Brunnen. Hiermit ergibt sich der Filtergeschwindigkeitsverlauf entlang der x-Achse:

$$q_x = q_0 + \frac{Q}{2\pi m x} \quad (3.230)$$

$$q_y = 0 \quad (3.231)$$

Die Laufzeiten werden durch Integration der Geschwindigkeiten $v(x, y) = 1/n_e \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ entlang der Stromlinien $\psi = \text{const}$ ermittelt. Zum Beispiel gilt für die x-Achse:

$$\begin{aligned} \tau(x_0, 0) &= n_e \int_0^{x_0} \frac{dx}{q(x, y=0)} \\ &= n_e \left[\frac{x_0}{q_0} - \frac{Q}{2\pi m q_0^2} \cdot \ln \left(\frac{2\pi m q_0}{Q} x_0 + 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.232)$$

Allgemein ergeben sich die Laufzeiten τ^* in dimensionsloser Form zu:

$$\tau^* = x^* + \ln \left[\frac{\sin \beta}{\sin(y^* + \beta)} \right] \tag{3.233}$$

mit

$$\tau^* = \tau \frac{2\pi m q_0^2}{Q_w n_e}$$

$$x^* = x \frac{2\pi m q_0}{Q_w}$$

$$y^* = y \frac{2\pi m q_0}{Q_w}$$

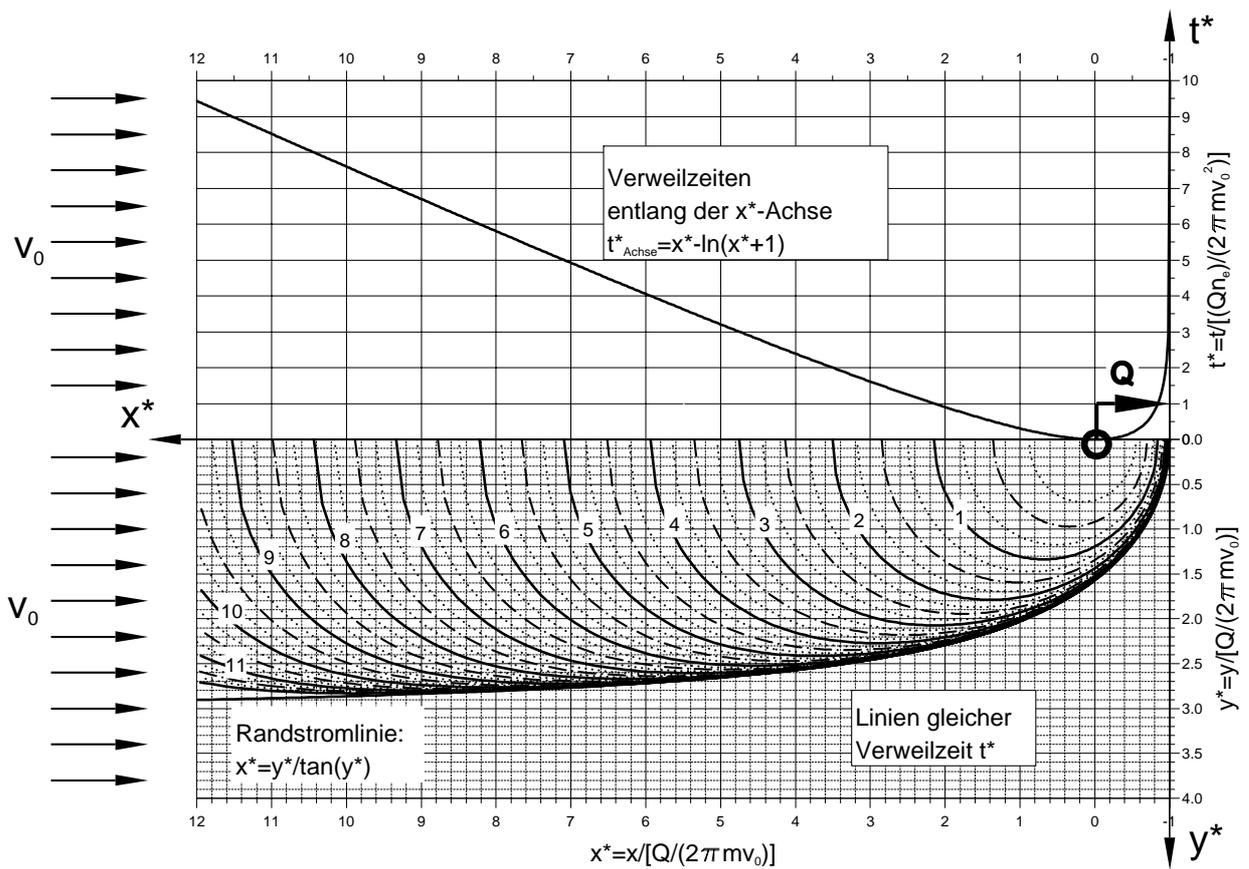


Abbildung 3.59: Entnahmewellen in Grundströmung: Dimensionslose Fließzeiten.

3.11 Lösungen für den advektiv-dispersiven Transport in Parallelströmung

Wir betrachten jetzt die Advektions-Dispersionsgleichung, Gl. (3.201), bei Parallelströmung mit konstantem Dispersionstensor \mathbf{D} und konstantem Abbaukoeffizienten λ :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) = -\lambda c \quad (3.234)$$

\mathbf{v}, \mathbf{D} und λ unabhängig von \mathbf{x}

3.11.1 Punktquelle und ausgedehnte Quelle im unendlichen Gebiet

Wir betrachten jetzt eine punkttartige Anfangsbedingung, bei der die Masse m sich zur Anfangszeit im Ursprung befindet:

$$\text{Anfangsbedingung} \quad c(t_0, \mathbf{x}) = m\delta(\mathbf{x}) \quad (3.235)$$

$$\text{Randbedingung} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \pm\infty} c(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (3.236)$$

Die Lösung von Gl. (3.234) für die punkttartige Anfangsbedingung ist eine mehrdimensionale Gauß-Funktion mit Gesamtintegral $m \exp(-\lambda t)$, Mittelwertsvektor $\mathbf{v}t$ und Kovarianzmatrix $2\mathbf{D}t$:

$$c(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{(4\pi t)^{d/2} \sqrt{\det(\mathbf{D})}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)^T \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{v}t)}{4t}\right) \exp(-\lambda t) \quad (3.237)$$

hierbei ist d die Dimensionalität des Problems. Für den Fall einer Strömung in x -Richtung ergibt sich in 3D:

$$c(x, y, z, t) = \frac{m}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{D_{xx}D_{yy}D_{zz}}} \exp\left(-\frac{(x - vt)^2}{4D_{xx}t} - \frac{y^2}{4D_{yy}t} - \frac{z^2}{4D_{zz}t}\right) \exp(-\lambda t) \quad (3.238)$$

sowie in 2D (siehe auch Abb. 3.60):

$$c(x, y, t) = \frac{m}{\Delta z 4\pi t \sqrt{D_{xx}D_{yy}}} \exp\left(-\frac{(x - vt)^2}{4D_{xx}t} - \frac{y^2}{4D_{yy}t}\right) \exp(-\lambda t) \quad (3.239)$$

Wir können aus Gl. (3.237) die Lösungen für beliebige Anfangsbedingungen $c_0(\mathbf{x})$ durch Faltung konstruieren:

$$c(t_0, \mathbf{x}) = c_0(\mathbf{x}) \quad (3.240)$$

$$c(\mathbf{x}, t) = \int_{V_\infty} c_0(\xi) c_\delta(\mathbf{x} - \xi, t) d\xi \quad (3.241)$$

mit

$$c_\delta(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2} \sqrt{\det(\mathbf{D})}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)^T \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{v}t)}{4t}\right) \exp(-\lambda t) \quad (3.242)$$

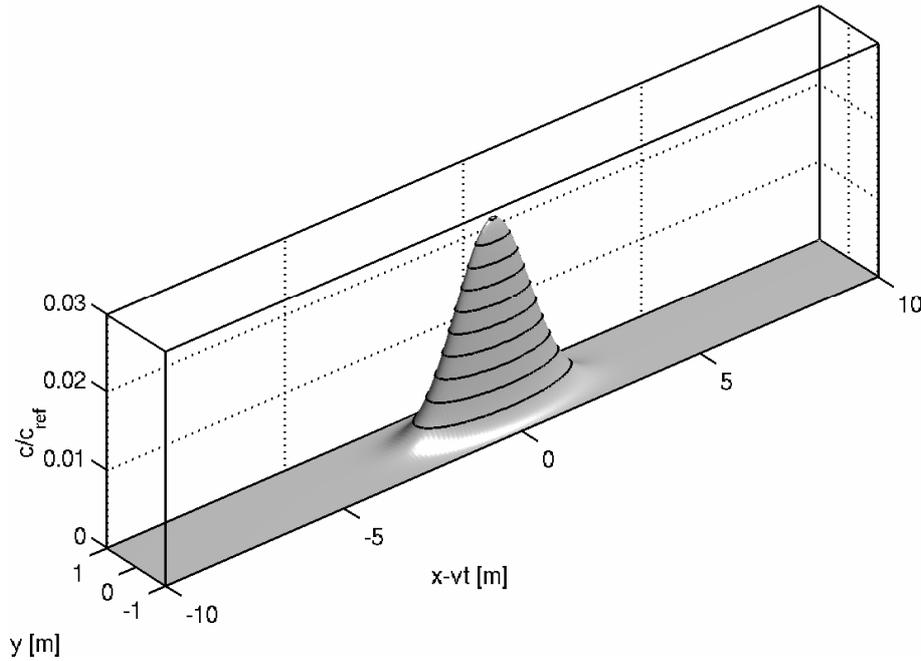


Abbildung 3.60: Zweidimensionale Konzentrationsverteilung in homogener Parallelströmung.

3.11.2 Vereinfachte Lösung für eine dauerhafte Einleitung

Wir betrachten die stationäre Konzentrationsverteilung, die sich in einem dreidimensionalen Gebiet bei dauerhafter punktförmiger Einleitung ausbildet. Unter Vernachlässigung der Längsdispersion erhalten wir:

$$v \frac{\partial c}{\partial x} - D_{yy} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - D_{zz} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = -\lambda c \quad (3.243)$$

$$\text{Randbedingungen} \quad \lim_{x,y,z \rightarrow \pm\infty} c(t, x, y, z) = 0 \quad (3.244)$$

$$J_{in}(x_0, y, z) = \dot{m}_{in} \delta(y) \delta(z) \quad (3.245)$$

Wir können nun eine Koordinatentransformation vornehmen, indem wir die Längskoordinate x durch die Fließzeit τ ersetzen:

$$x = v\tau \quad (3.246)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} - D_{yy} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - D_{zz} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = -\lambda c \quad (3.247)$$

$$\text{Randbedingung} \quad \lim_{y,z \rightarrow \infty} c(\tau, y, z) = 0 \quad (3.248)$$

$$\text{Anfangsbedingung} \quad c(\tau = 0, y, z) = \frac{\dot{m}_{in}}{v} \delta(y) \delta(z) \quad (3.249)$$

Dieses Problem haben wir bereits als instationäres Transportproblem gelöst. Bei Rücktransformation von τ zu x ergibt sich aus Gl. (3.239):

$$c(x, y, z) = \frac{\dot{m}_{in}}{4\pi x \sqrt{D_{yy} D_{zz}}} \exp\left(-\frac{y^2 v}{4D_{yy} x} - \frac{z^2 v}{4D_{zz} x}\right) \exp\left(-\frac{\lambda x}{v}\right) \quad (3.250)$$

Analog ergibt sich bei zweidimensionaler Betrachtung:

$$c(x, y) = \frac{\dot{m}_{in}}{\sqrt{4\pi x D_{yy}}} \exp\left(-\frac{y^2 v}{4D_{yy}x}\right) \exp\left(-\frac{\lambda x}{v}\right) \quad (3.251)$$

Das Gauß-Fahnen-Modell stellte von 1986 bis einschließlich 2001 die Grundlage für die Immissionsberechnung nach TA Luft dar (VDI-Richtlinie 3782 Blatt 1). Hierbei werden die Querdispersionskoeffizienten aus der mittleren Windgeschwindigkeit und der Stabilität der Schichtung abgeschätzt. Der Ansatz kann selbstverständlich auch für punktartige Einleitungen in Fließgewässer verwendet. Wie jedoch im Folgenden dargestellt wird, muss noch der Einfluss der Bodenoberfläche berücksichtigt werden.

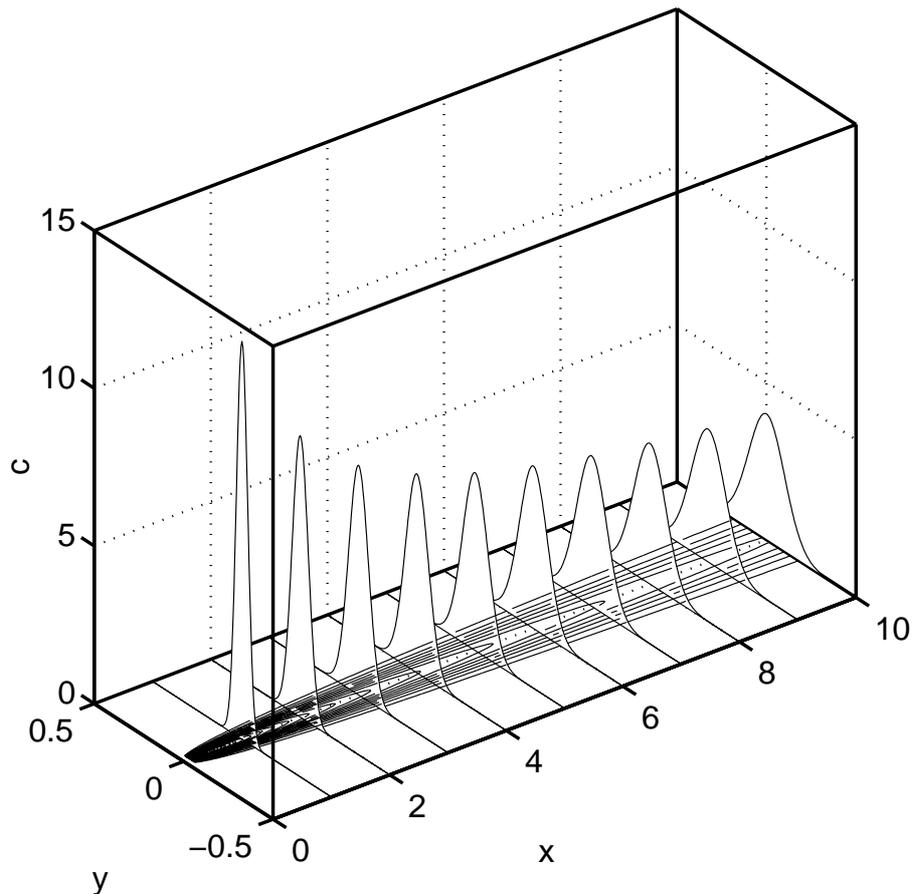


Abbildung 3.61: Zweidimensionale Konzentrationsverteilung bei dauerhafter Einleitung unter Vernachlässigung der Längsdispersion.

3.11.3 Berücksichtigung von Rändern

Die Lösungen nach Gln. (3.250 & 3.251) gehen von einem in alle Raumrichtungen unendlichen Gebiet aus. Das heißt, die Stofffahne kann sich in Querrichtung unbegrenzt ausdehnen. Bei der Betrachtung von Stoffeinleitungen in reale Systeme (bodennahe Atmosphäre, Fluss etc.) müssen wir die Wirkung der lateralen Begrenzung berücksichtigen. Das heißt, wir betrachten nun ein System, das in einer Querrichtung durch eine Ebene begrenzt ist. Im Weiteren betrachten wir die vertikale Richtung z als nach unten begrenzt. Hierbei unterscheiden wir zwischen:

1. einem *no-flow*-Rand, über den kein lateraler Fluss stattfindet:

$$D_{zz} \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z_0} = 0 \quad (3.252)$$

2. einem Festkonzentrationsrand, bei dem die Konzentration einen festen Wert annimmt (z.B. null):

$$c(z_0) = c_0 \quad (3.253)$$

Ein *no-flow*-Rand ergibt sich z.B. für einen gelöster Stoff, der nicht mit der Sohle eine Gewässers reagiert. Im Gegensatz dazu würde ein Luftschadstoff, der bei Kontakt mit der Erdoberfläche sofort vollständig sorbiert wird, am besten mit einer Festkonzentration von Null an der Erdoberfläche modelliert werden.

Bei dem *no-flow*-Rand muss der Gesamtmassenstrom erhalten bleiben. Betrachten wir die Gaußfahne nach Gl. (3.250), so besteht ein bestimmter Massenstrom unterhalb der angestrebten Begrenzung. In Analogie zur Brunnenströmung in begrenzten Grundwasserleitern definieren wir eine am Rand gespiegelte virtuelle Quelle mit gleicher Stärke und gleichem Vorzeichen wie die Originalquelle:

$$c(x, y, z) = \frac{\dot{m}_{in}}{4\pi x \sqrt{D_{yy} D_{zz}}} \left(\exp \left(-\frac{(z - z_s)^2 v}{4D_{zz}x} \right) + \exp \left(-\frac{(z + z_s)^2 v}{4D_{zz}x} \right) \right) \times \exp \left(-\frac{y^2 v}{4D_{yy}x} - \frac{\lambda x}{v} \right) \quad (3.254)$$

wobei z_s die Vertikalkoordinate der Punkteinleitung ist (als Horizontalkoordinaten wird jeweils null angenommen).

Eine Festkonzentrationsrandbedingung mit Festkonzentration null erreichen wir durch Superposition mit einer gespiegelten virtuellen Senke:

$$c(x, y, z) = \frac{\dot{m}_{in}}{4\pi x \sqrt{D_{yy} D_{zz}}} \left(\exp \left(-\frac{(z - z_s)^2 v}{4D_{zz}x} \right) - \exp \left(-\frac{(z + z_s)^2 v}{4D_{zz}x} \right) \right) \times \exp \left(-\frac{y^2 v}{4D_{yy}x} - \frac{\lambda x}{v} \right) \quad (3.255)$$

Das Prinzip ist in Abb. 3.62 verdeutlicht. Abb. 3.63 zeigt eine explizite Berechnung für beide Arten von Randbedingungen.

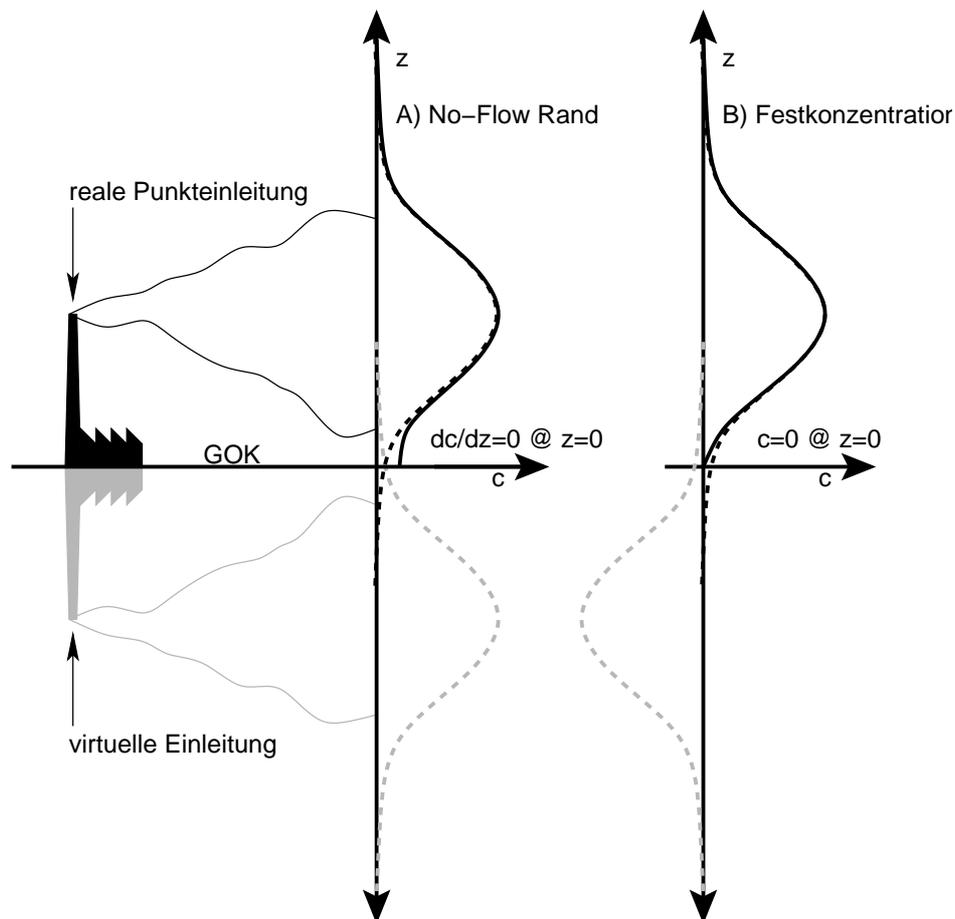


Abbildung 3.62: Spiegelungsprinzip für die Berücksichtigung von Randbedingungen. A) Durch eine virtuelle Einleitung mit positivem Eintrag wird der Gradient $\partial c / \partial z|_{z=0}$ zu null. B) Durch eine virtuelle Einleitung mit negativem Eintrag wird der Wert $c|_{z=0}$ zu null.

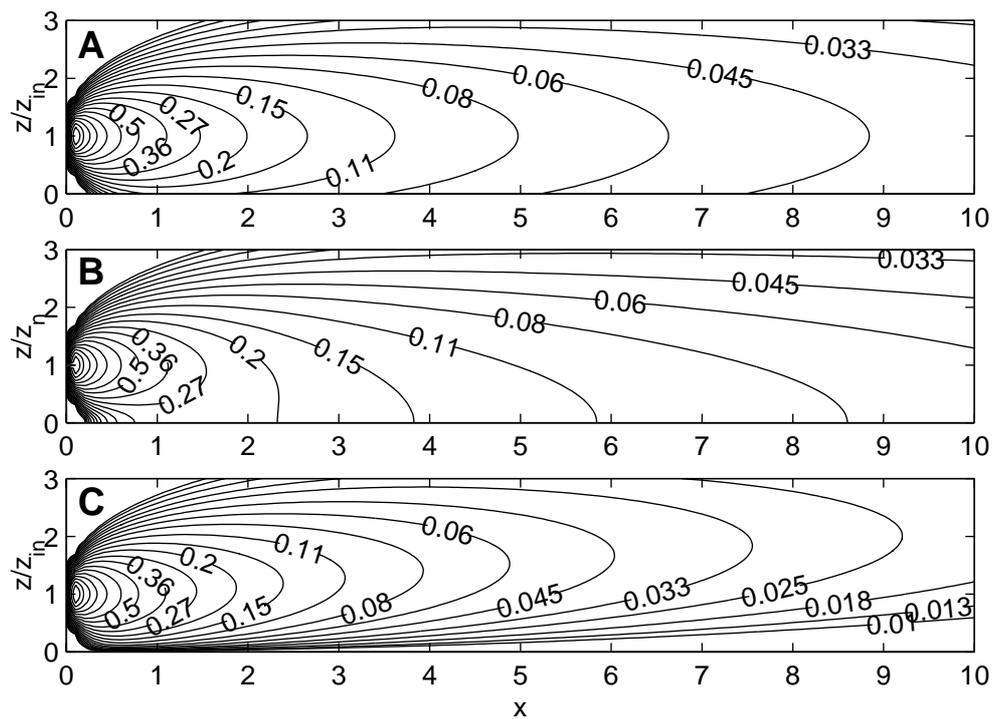


Abbildung 3.63: Konzentrationsverteilung infolge einer Punkteinleitung in ein dreidimensionales Gebiet. Schnitt durch die Hauptachse. A) Ohne Berücksichtigung von Rändern; B) kein Fluss über die untere Begrenzung; C) Konzentration an unterer Begrenzung null.

Literaturverzeichnis

- Abramowitz, M. & Stegun, I. A., eds [1974], *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York.
- Badon-Ghyben, W. [1888], 'Notes on the probable results of well drilling near Amsterdam (in Dutch)', *Tijdschrift van het Koninklijk Inst. van Ing. Den Haag* p. 21.
- Ball, W. P. & Roberts, P. V. [1991], 'Long-term sorption of halogenated organic chemicals by aquifer material. 2. intraparticle diffusion', *Environ. Sci. Technol.* **25**(7), 1237–1249.
- Barenblatt, G. E., Zheltov, I. P. & Kochina, I. N. [1960], 'Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks', *J. Appl. Math. Mech.* **24**, 1286–1303.
- Bear, J. [1972], *Dynamics of fluids in porous media*, American Elsevier, New York.
- Beyer, W. [1964], 'Zur Bestimmung der Wasserdurchlässigkeit von Kiesen und Sanden aus der Kornverteilungskurve', *WWT* **14**, 165–168.
- Brooks, R. & Corey, A. [1964], Hydraulic properties of porous media, Hydrol. Pap. 3, Colorado State University, Fort Collins, CO.
- Brusseau, M. L. [1994], 'Transport of reactive contaminants in heterogeneous porous media', *Reviews of Geophysics* **32**(3), 285–313.
- Busch, K.-F., Luckner, L. & Tiemer, K. [1993], *Geohydraulik*, Vol. 3 of *Lehrbuch der Hydrogeologie*, Borntraeger, Berlin.
- Carman, P. [1937], 'Fluid flow through a granular bed', *Trans. Inst. Chem. Eng. London* **15**, 150–156.
- Carsel, R. F. & Parrish, R. S. [1988], 'Developing joint probability distributions of soil water retention characteristics', *Water Resour. Res.* **24**(5), 755–769.
- Cirpka, O. A. & Kitanidis, P. K. [2001], 'Travel-time based model of bioremediation using circulation wells', *Ground Water* **39**(3), 422–432.
- Coats, K. & Smith, B. [1964], 'Dead-end pore volume and dispersion in porous media', *Soc. Petrol. Eng. J.* **4**(3), 73–84.
- Crane, M. J. & Blunt, M. J. [1999], 'Streamline-based simulation of solute transport', *Water Resour. Res.* **35**(10), 3061–3078.
- Dagan, G. [1989], *Flow and transport in porous formations*, Springer Verlag, New York.
- Darcy, H. [1856], *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, Dalmont, Paris.

- de Josselin de Jong, G. [1958], 'Longitudinal and transverse diffusion in granular deposits', *Trans. Amer. Geophys. Union* **39**, 67–74.
- Dupuit, J. [1863], *Études Théoriques et Pratiques sur Le Movement Des Eaux Dans Les Canaux Découverts et À Travers Les Terrains Permeables*, Dunod, Paris.
- Ehrenberger, R. [1928], 'Versuche über die Ergiebigkeit von Brunnen und Bestimmung der Durchlässigkeit des Sandes', *Z. Österreich. Ing. Archit.-Verein* pp. 71–74, 89–93, 110–112.
- Fair, G. & Hatch, L. [1933], 'Fundamental factors governing the streamline flow of water through sand', *J. Am. Water Works Ass.* **25**, 1551–1565.
- Fischer, H. [1967], 'The mechanics of dispersion in natural streams', *J. Hydraul. Div. ASCE* **93**(HY6), 187–216.
- Fischer, H., List, E., Koh, C., Imberger, J. & Brooks, N. [1979], *Mixing in inland and coastal waters*, Academic Press, New York.
- Gelhar, L. W. [1993], *Stochastic subsurface hydrology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Hazen, A. [1892], 'Some physical properties of sands and gravels with special reference to their use in filtration.', *Ann. Rep. State Board of Health Mass.* **24**, 541–556.
- Herzberg, A. [1901], 'Die Wasserversorgung einiger Nordseebäder', *J. Gasbeleuch. Wasservers.* **44**, 815–819, 842–844.
- Hölting, B. [1995], *Hydrogeologie*, 5. edn, Spektrum Akademischer Verlag, Stuttgart.
- Jacob, C. [1963], Determining the permeability of water-table aquifers, Water Supply Paper 1536-I, USGS.
- Kitanidis, P. K. [1997], *Introduction to geostatistics: Applications to hydrogeology*, Cambridge University Press, New York.
- Koch, D. L. & Brady, J. F. [1985], 'Dispersion in fixed beds', *J. Fluid Mech.* **154**, 399–427.
- Kozeny, J. [1927], 'Über kapillare Leitung des Wassers im Boden', *Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien* **136**, 271–306.
- Langguth, H.-R. & Voigt, R. [1980], *Hydrogeologische Methoden*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- Nahrgang, G. [1965], *Über die Anströmung von Vertikalbrunnen mit freier Oberfläche in einförmig homogenen sowie geschichteten Grundwasserleitern*, number 6 in 'Schriftenreihe Des Deutschen Arbeitskreises Wasserforschung', Erich Schmidt Verlag, Berlin.
- Saffman, P. [1959], 'A theory of dispersion in a porous medium', *J. Fluid Mech.* **6**(3), 321–349.
- Saffman, P. [1960], 'Dispersion due to molecular diffusion and macroscopic mixing in flow through a network of capillaries', *J. Fluid Mech.* **7**(2), 194–208.
- Scheidegger, A. E. [1961], 'General theory of dispersion in porous media', *J. Geophys. Res.* **66**(10), 3273–3278.

- Sichardt, W. [1928], *Das Fassungsvermögen von Rohrbrunnen und seine Bedeutung für die Grundwasserabsenkung, insbesondere für größere Absenkungstiefen*, J. Springer Verlag, Berlin.
- Simmons, C. S., Ginn, T. R. & Wood, B. D. [1995], 'Stochastic-convective transport with non-linear reaction: Mathematical framework', *Water Resour. Res.* **31**(11), 2675–2688.
- Strozodka, K., ed. [1977], *Hydrotechnik im Bergbau und Bauwesen*, VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig.
- Thiem, G. [1906], *Hydrologische Methoden*, Gebhardt, Leipzig.
- van Genuchten, M. T. [1980], 'A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity in unsaturated soils', *Soil Sci. Soc. Am. J.* **44**, 892–898.
- van Genuchten, M. T. & Wierenga, P. J. [1976], 'Mass transfer studies in sorbing porous media: I. analytical solutions', *Soil Sci. Soc. Amer. J.* **40**, 473–480.
- Weber, H. [1928], *Die Reichweite von Grundwasserabsenkungen mittels Rohrbrunnen*, Springer Verlag, Berlin.
- Yabusaki, S., Steefel, C. & Wood, B. [1998], 'Multidimensional, multicomponent, subsurface reactive transport in nonuniform velocity fields: code verification using an advective reactive streamtube approach', *J. Contam. Hydrol.* **30**(3-4), 299–331.