

# Numerische Methoden in der Umweltphysik

Vorlesungsnotizen

Christoph Schär

Institut für Atmosphäre und Klima, ETH, 8057 Zürich

[schaer@env.ethz.ch](mailto:schaer@env.ethz.ch)

William Sawyer

Seminar für angewandte Mathematik / Institut für Atmosphäre und Klima, ETH, 8057 Zürich

[william.sawyer@env.ethz.ch](mailto:william.sawyer@env.ethz.ch)

Wintersemester 2004/05

Oktober 2004

Preis: SFr. 10.-



# Inhalt

<b>1.</b>	<b>Einleitung und Ueberblick.....</b>	<b>1.1</b>
<b>2.</b>	<b>Klassifikation numerischer Probleme .....</b>	<b>2.1</b>
2.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen .....	2.1
2.2	Partielle Differentialgleichungen .....	2.1
2.3	Randwertprobleme .....	2.2
2.4	Linearität und Nichtlinearität .....	2.4
2.4.1	Lagrange'sche versus Euler'sche Form der Transportgleichung .....	2.4
2.4.2	Lineare versus nichtlineare Transportgleichung .....	2.5
<b>3.</b>	<b>Einführung in die Methode der finiten Differenzen.....</b>	<b>3.1</b>
3.1	Das Upstream-Schema .....	3.1
3.2	Das "Leapfrog"-Schema.....	3.5
3.3	Die Ordnung eines numerischen Schemas .....	3.6
3.4	Die Stabilität eines Schemas .....	3.7
3.4.1	Die Von-Neumann Methode.....	3.7
3.4.2	Phasen und Amplitudenfehler.....	3.9
3.4.3	Numerische Dispersion.....	3.12
3.4.4	Die Energiemethode.....	3.16
3.4.5	Das Courant-Friedrichs-Levy Kriterium.....	3.17
3.5	Konvergenz und Konsistenz von Schemen.....	3.19
3.6	Schemen höherer Ordnung.....	3.20
3.6.1	Zentrierte räumliche Differenzen höherer Ordnung .....	3.20
3.6.2	Höhere räumliche Ordnung beim Upstream-Schema .....	3.23
<b>4.</b>	<b>Zeitschrittverfahren .....</b>	<b>4.1</b>
4.1	Klassifikation.....	4.1
4.2	Implizite Advektion.....	4.2
4.3	Schemen mit mehreren Zeitniveaus .....	4.5
4.4	Mehrstufige Methoden .....	4.9
<b>5.</b>	<b>Nichtlinearität.....</b>	<b>5.1</b>
5.1	Nichtlineare Instabilität und Aliasing.....	5.1
5.2	Ideale Filter.....	5.7
<b>6.</b>	<b>Konservative Schemen.....</b>	<b>6.1</b>
6.1.	Theoretischer Hintergrund .....	6.1
6.2	Ein numerisches Beispiel .....	6.2
6.3.	Die Fluss-Formulierung .....	6.4
6.4.	Flusskorrektur.....	6.8

<b>7.</b>	<b>Beispiele aus der Umweltphysik.....</b>	<b>7.1</b>
7.1	Wärmeleitungsgleichung (Bodenphysik).....	7.1
7.2	Wellengleichung (Geophysik).....	7.4
7.3	Flachwasserdynamik (Atmosphärenphysik, aquatische Physik).....	7.6
<b>8.</b>	<b>Übersicht über andere Methoden .....</b>	<b>8.1</b>
8.1	Klassifikation.....	8.1
8.2	Einführung in die klassische spektrale Methode.....	8.6
	(a) Lineare Advektion .....	8.6
	(b) Gibbs Phänomene .....	8.7
	(c) Nichtlineare Advektion.....	8.8
	(d) Lineare Randwertprobleme .....	8.9
8.3	Die Methode der finiten Volumen.....	8.11
<b>9.</b>	<b>Literatur .....</b>	<b>9.1</b>

# 1. Einleitung und Ueberblick

Numerische Modelle in der Umweltphysik haben in den letzten Jahrzehnten stetig an Bedeutung gewonnen. In zahlreichen Bereichen sind Modelle nicht mehr wegzudenken: Wetterprognosen zum Beispiel sind weitgehend auf Computermodelle angewiesen. Auch das Problem der Klimaveränderung kann ohne geeignete Modelle nicht mehr beurteilt werden.

Modelle können auf äusserst vielfältige Art und Weise eingesetzt werden:

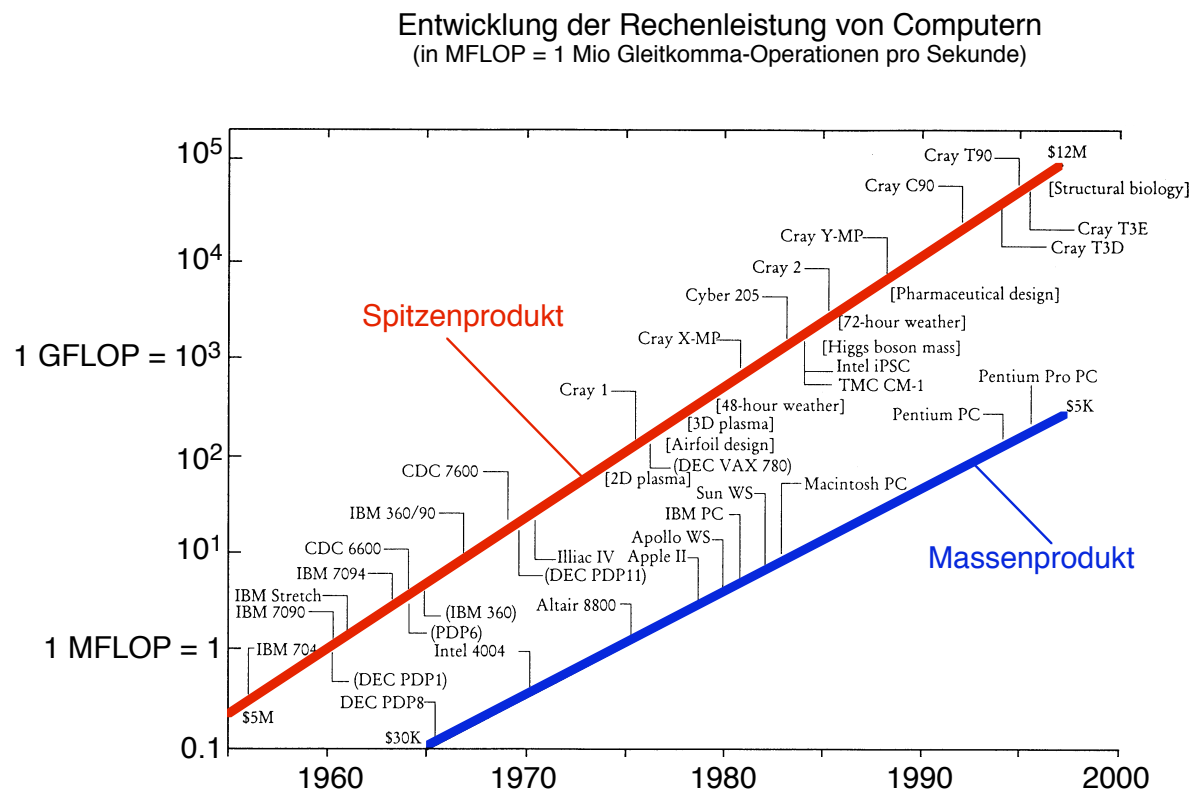
- als *Prognosemodell*: Ausgehend von einem Anfangszustand wird in die Zukunft integriert (siehe Beispiele in Tab.1.1).
- als *Assimilationsmodell*: Ein Modell wird laufend mit vorhandenen Messdaten "gefüttert", um ein räumlich und zeitlich konsistentes Abbild der Beobachtungen (unter Umständen in weit höherer Auflösung als die Beobachtungen vorliegen) zu erstellen.

Prognose	Zeitskala	involvierte Disziplinen
Wettervorhersage	1-10 Tage	Atmosphärenphysik, Meteorologie
Abflussvorhersage	1 h bis 1 Jahr	Hydrologie, Limnologie, Hydraulik, Meteorologie
Saisonale Klimaprognosen	1 bis 24 Monate	Ozeanographie, Atmosphärenphysik, Hydrologie
Klimamodelle	10 bis 10'000 Jahre	Ozeanographie, Atmosphärenphysik, Hydrologie, Astronomie, Eisschilddynamik
Tsunamis Vorhersagen	1 bis 48 Stunden	Seismologie, Ozeanographie
Bewertung von Süsswasserverschmutzungen	Tage bis Jahrzehnte	Bodenphysik, Hydrologie, Bodenchemie, Biologie
Luftqualitätsvorhersagen	Stunden bis Tage	Atmosphärenchemie, Atmosphärenphysik, Emissionsdisziplinen
Epidemologische Vorhersagen	Tage bis Jahrzehnte	Biologie, Medizin, etc
Populationsdynamische Vorhersagen	Jahre bis Jahrzehnte	Biologie, Populationsgenetik, etc

**Tab.1.1:** Beispiele von Prognosemodellen im Umweltbereich

- als *Inversionsmodell*: Ein Modell dient der Interpretation von indirekten Messdaten (z.B. Seismik, Computertomographie).
- als Werkzeug für *Prozess- und Sensitivitätsstudien*: das Wechselspiel verschiedener Prozesse kann häufig nur noch verstanden werden, wenn gleichsam in einem "numerischen Laboratorium" die entscheidenden Prozesse isoliert und / oder vereinfacht werden können.

Die Fortschritte bei der Modellierung von Umweltsystemem basieren zu einem beachtlichen Teil auf den rasanten Entwicklung der Computertechnologie. Fig.1.1 zeigt dazu die Entwicklung der Rechenleistung seit 1960 in einem logarithmischen Massstab. Im betrachteten Zeitraum hat die Rechenleistung exponentiell zugenommen und sich durchschnittlich alle zwei bis drei Jahre verdoppelt. Es wird im Moment erwartet, dass diese Gesetzmässigkeit (Moore's law) noch für mindestens 5-10 Jahre anhalten wird. Die Rechenleistungen ist insbesondere bei Echtzeit-Anwendungen zentral. Bei Wetter- und Klimamodellen zum Beispiel bestimmt die verfügbare Rechenleistung schlussendlich die Feinheit des numerischen Rechengitters. Nebst geeigneter Rechenkapazität sind jedoch viele zusätzliche Faktoren ausschlaggebend für die Qualität eines numerischen Modells, dazu gehört insbesondere die Qualität der numerischen Verfahren, welche zum Einsatz kommen.



**Fig.1.1:** Entwicklung der Rechengeschwindigkeit von Computern in den letzten 40 Jahren. Alle Angaben sind in FLOPs (Floating point operations per second).

Tab.1.2 zeigt die Hierarchie bei der Formulierung eines numerischen Modells: Unmittelbar auf die *Problemstellung* folgt die *physikalische und mathematische Formulierung* des entsprechenden Problems. Im optimalen Fall beinhaltet dies einen Gleichungssatz welcher direkt auf physikalischen Prinzipien beruht. Solche Gleichungssätze basierend auf "first principles" sind zum Beispiel vorhanden, um die Strömung in der Atmosphäre oder den Ozeanen zu beschreiben, doch für viele Probleme im Umweltbereich muss auf andere Methoden (approximative und/oder statistische Beschreibungen) zurückgegriffen werden. Für realistische Probleme sind die resultierenden Gleichungssätze in der Regel nicht analytisch lösbar, und es muss auf ein *numerisches Verfahren* zurückgegriffen werden. Dieses wird durch ein *Computerprogramm* auf die Ebene der Hardware übertragen. Programme dieser Art verwenden heutzutage eine höhere Programmiersprache, um Portabilität zwischen verschiedenen *Betriebssystemen* und *Hardwarekonfigurationen* zu ermöglichen. Bei der *Anwendung* von Modellen muss schlussendlich berücksichtigt werden, dass die verwendete mathematische Formulierung, sowie alle anderen Parameter und Anfangsdaten gewisse Fehler aufweisen. Zusätzlich gibt es intrinsische Prognosegrenzen (welche zum Beispiel durch die Chaos-Theorie gesetzt werden).

In der vorliegenden Vorlesung geht es primär um die Schritte von der physikalischen / mathematischen Formulierung bis zur Erstellung eines zur Lösung des entsprechenden Problems geeigneten Computerprogramms (Tab.1.2). Das Schwergewicht liegt somit auf den numerischen Methoden und deren Implementation auf einem Computer. Dabei wird eine Auswahl von Methoden und Beispielen vorgenommen, welche im Umweltbereich besonders häufig sind und eine grosse Bedeutung haben. Als Hintergrundinformation ist dies auch für den reinen Anwender von Modellen wichtig, denn moderne numerische Modelle können ohne solche Kenntnisse häufig nicht sinnvoll eingesetzt werden.

1	Problemstellung
2	Physikalische / Mathematische Formulierung
3	Numerisches Verfahren
4	Programm in höherer Programmiersprache (z.B. Fortran, C)
5	Betriebssystem (z.B. Unix)
6	Hardware (z.B. Mac, Sun, DEC, Cray, NEC SX-4)
7	Anwendung des Modells in der Praxis

**Tab.1.2:** Hierarchie der Modellformulierung

