Numerische Methoden der Umweltphysik

Aufgabe A

Das notwendige Courant-Friedrichs-Levi (CFL) Kriterium für numerische Stabilität lautet im allgemeinen Fall

$$\left| c \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| < 1$$

Dabei bezeichnet Δx die räumliche und $\Delta \tau$ die zeitliche Diskretisierung. Beantworten Sie die folgenden Fragen:

1. Was ist für c ganz allgemein einzusetzen?

2. Was würden Sie für c in der Atmosphäre einsetzen? Warum?

3. Kennen Sie Verfahren, deren Zeitschritt nicht durch das CFL-Kriterium begrenzt wird?

4. Heisst das, dass Sie bei solchen Verfahren einen beliebig grossen Zeitschritt wählen können?

Antworten zu Aufgabe A

1. Für c muss die Geschwindigkeit derjenigen Störung eingesetzt werden, die sich im System am schnellsten ausbreiten kann. Häufig setzt sich diese aus einer advektiven Geschwindigkeit und aus einer Wellengeschwindigkeit zusammen gemäss (Skript 3.15):

$$c = \max\left|\vec{u} + \vec{c_g}\right|$$

2. In einem allgemeinen Atmosphärenmodell wird die Schallgeschwindigkeit (~300m/s) einzusetzen sein. Dies stellt die schnellste Welle in der Atmosphäre dar. Im Vergleich zu dieser grossen Wellengeschwindigkeit kann die Advektion in erster Näherung vernachlässigt werden (Skript 3.15)

3. Bei den impliziten Verfahren muss das CFL-Kriterium nicht erf'üllt sein. Ein implizites Schema bleibt also auch bei einem beliebig grossen Zeitschritt stabil (Skript 4.2-4.5)

4. Das implizite Schema bleibt zwar f'ür einen beliebig grossen Zeitschritt stabil, aber der numerische Fehler nimmt stark zu. Deshalb können auch bei einem solchen Schema keine Courant-Zahlen $c/\Delta x \cdot \Delta t$ gewählt werden, die bedeutend grösser als 1 sind (Skript 4.2-4.4).

Aufgabe B

Betrachten Sie folgende Teile eines Fortran-Programmes. Beantworten Sie folgende Fragen:

1. Welche Gleichung wird integriert? Geben Sie die Gleichung, die Grösse des Rechengebietes und die Art der Randbedingungen an!

2.Welches numerische Verfahren (im Orts und Zeitraum) wird verwendet?

3. Wie lautet die diskretisierte formale Form der Integration?

```
do i=2,nx-1
      new(i)=old(i)-(u*dt/dx)*(now(i+1)-now(i-1))
enddo
new(1) =new(nx-1)
new(nx)=new(2)
do i=1,nx
      old(i)=now(i)
      now(i)=new(i)
enddo
```

Antworten zu Aufgabe B

1. Es wird die eindimensionale Advektionsgleichung integriert (siehe Skript Formel 3.1). Das wird aus der ersten Do-Schleife ersichtlich, in der <new>, <old> und <now> drei verschiedene Zeitniveaus der advergierten Grösse darstellen. Der Index <i> der drei Variablen stellt die räumliche Diskretisierung dar. Aus dem Index-Bereich der ersten Do-Schleife (<i=2,nx-1>) entnimmt man die Grösse des Rechengebietes, nämlich von 2 bis nx-1. Die vierte und fünfte Anweisung (<new(1)=new(nx-1)> und <new(nx)=new(2)>) realisieren periosdische Randbedingungen.

2. Es handelt sich um ein räumlich und zeitlich zentriertes Schema. Dieses ist auch unter der Bezeichnung Leapfrog-Schema bekannt (Skript 3.4).

3. Die diskretisierte formale Form lautet (Skript 3.4):

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^{n-1} - \alpha \cdot (\phi^n{}_{i+1} - \phi_{i-1}{}^n) \qquad \text{mit} \qquad \alpha = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$$

Aufgabe C

Betrachten Sie die null-dimensionale Reibungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\gamma u$$

und beantworten Sie dazu die folgenden Fragen:

1. Wie lautet die Diskretisierung dieser Gleichung mit Finiten Differenzen und einem Backward-Zeitschritt?

2. Welches ist der Stabilitätsbereich der Methode. Benutzen Sie zur Herleitung desselben

die Von Neumann Methode.

3. Würden Sie empfehlen, den theoretischen Stabilitätsbereich voll auszuschöpfen? Begründen Sie Ihre Empfehlung!

Antworten zu Aufgabe C

1. Die Diskretisierung mit einem Backward-Zeitschritt lautet (Skript 4.1)

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = -\gamma \cdot u^{n+1}$$

2. Die obige Gleichung lässt sich leicht in die folgende Form bringen:

$$u^{n+1} = \frac{1}{1 + \gamma \cdot \Delta t} \cdot u^n$$

Aus dieser Gleichung folgt sofort, dass das Schema für alle Werte des Zeitschrittes Δt stabil bleibt, vorausgesetzt die Reibungskonstante γ ist positiv. Denn in diesem Fall ist $|1 + \gamma \cdot \Delta t| < 1$. Dieses Ergebnis war zu erwarten, da es sich um ein implizites Verfahren handelt (siehe Klassifizierung im Skript 4.1).

3. Wählt man einen zu grossen Zeitschritt Δt, so wird das Ergebnis ungenau. Man wird deshalb den Zeitschritt Δt so wählen, dass $|\gamma \cdot \Delta t| < 1$ bleibt.

Aufgabe D

Betrachten Sie folgende Teile eines Fortran-Programmes. Beantworten Sie folgende Fragen:

1. Welche Gleichung wird integriert? (Gleichung angeben)

2. Welches numerische Verfahren (im Orts und Zeitraum) wird verwendet?

3. Wie lautet die diskretisierte formale Form der Integration?

4. Was ist der Vorteil/Besonderheit der Methode?

```
do i=2,nx-1
      f(i)=0.5*(u(i)+u(i+1))*0.5*(now(i)+now(i+1))
enddo
do i=2,nx-1
      new(i)=old(i)-(dt/dx)*(f(i)-f(i-1))
enddo
new(1) =new(nx-1)
new(nx)=new(2)
do i=1,nx
      old(i)=now(i)
      now(i)=new(i)
```

```
enddo
```

Antworten zu Aufgabe D

1. Es wird die eindimensionale Kontinuitätsgleichung integriert (Skript Formel 6.1 in eindimensionaler Form):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) = 0$$

2. Es wird eine Flussformulierung verwendet. Die theoretischen Grundlagen hierzu sind im Skript auf Seite 6.5 aufgeführt (Formel 6.26 und 6.27).

$$\frac{\rho_j^{\ n+1} - \rho_j^{\ n-1}}{2\Delta t} + \frac{F^n_{\ j+\frac{1}{2}} - F^n_{\ j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0 \quad \text{mit} \quad F^n_{\ j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u^n_{\ j} + u^n_{\ j+1}) \cdot \frac{1}{2}(\rho^n_{\ j} + \rho^n_{\ j+1})$$

In der ersten Do-Schleife werden die Flüsse an den Zwischengitterstellen bestimmt (gemäss Formel 6.27). Diese Flüsse werden dann in der zweiten Do-Schleife verwendet, um einen zeitlich-zentrierten Schritt in die Zukunft zu rechnen (gemäss Formel 6.27). Zusammenfassend: konservative Flussformulierung mit einem Leapfrog-Schema. Beachte, dass in diesem Verfahren die Flüsse auf einem gestaggerten Gitter berechnet werden.

3. Diese sind unter 2) angegeben.

4. Die Flussformulierung der Advektionsgleichung ist konservativ. Die konservativen Verfahren garantieren die Erfüllung von Erhaltungssätzen, zum Beispiel der Massenerhaltung. In Fig.6.2 des Skripts wird das am Beispiel einer nichtlinearen Advektion einer Dreiecksanomalie gezeigt.