

Numerische Methoden in der Umweltphysik
Erfahrungsnote D-ERDW
14. Februar 2003

Aufgabe 1 (Punkteverteilung: 3+3+4=10 Punkte)

- (a) Wie lautet das CFL-Kriterium für die lineare Advektionsgleichung?

Ist das CFL-Kriterium im Allgemeinen eine hinreichende oder notwendige Bedingung für die Stabilität eines Schemas?

Gibt es Verfahren welche auch bei verletztem CFL-Kriterium stabil sind? (Namen angeben!)

Welches ist die Grundidee welche hinter dem CFL-Kriterium steckt?

- (b) Betrachten Sie den folgenden Teil eines Fortran-Programmes

```
alpha=u*dt/dx
do i=2,nx-1
  new(i)=now(i)*(1-alpha) + now(i-1)*alpha
enddo
```

wobei $now(i) = \varphi_i^n$ und $new(i) = \varphi_i^{n+1}$.

Beantworten Sie dazu folgende Fragen:

- Welche Gleichung wird integriert? (Gleichung angeben!)
- Welche Diskretisierungen werden dabei für die einzelnen Terme verwendet?
- Welches ist der numerische Stabilitätsbereich des Verfahrens?

- (c) Betrachten Sie den folgenden Teil eines Fortran-Programmes

```
alpha=u*dt/dx
b=kappa*dt/2
do i=2,nx-1
  new(i)=now(i)*(1-b)/(1+b) - alpha*(now(i)-now(i-1))/(1+b)
enddo
```

wobei $now(i) = \varphi_i^n$, $new(i) = \varphi_i^{n+1}$ und $kappa = \varphi$.

Beantworten Sie dazu folgende Fragen:

- Welche Gleichung wird integriert (Gleichung angeben)?
- Welche Diskretisierungen werden dabei für die einzelnen Terme verwendet?

Aufgabe 2 (Punkteverteilung: 3+3+4=10 Punkte)

- (a) Was versteht man unter "Konsistenz" eines numerischen Verfahrens?

Was versteht man unter "Konvergenz" eines numerischen Verfahrens?

Wie sind die Begriffe "Konvergenz", "Konsistenz" und "Stabilität" miteinander verknüpft?

- (b) Betrachten Sie die lineare Advektionsgleichung $\partial \varphi / \partial t + u(\partial \varphi / \partial x) = 0$ und deren Integration mit dem sogenannten Lax-Fredrichs Verfahren

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\varphi_i^{n+1} - \left(\varphi_{i+1}^n + \varphi_{i-1}^n \right) / 2 \right] + \frac{u}{2\Delta x} \left(\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n \right) = 0 .$$

Wie würden Sie die Stabilität dieses Schemas beurteilen? Welche Methode ist dazu geeignet? Warum? Wie lautet der mathematische Ansatz und welche sind die entscheidenden Schritte des Stabilitätsbeweises? Was fällt als Nebenprodukt des Stabilitätsbeweises an?

Es wird hier nicht erwartet dass ein Stabilitätsbeweis durchgeführt wird, jedoch sollen die entscheidenden Schritte der Methode rezeptartig skizziert werden.

- (c) Ist das in (b) betrachtete Schema konsistent? Warum?

Viel Glück!