Numerische Methoden in der Umweltphysik
Übungsserie 4 (Hausaufgaben)
Ausgabe: 22.12.05 Abgabe: 12.01.06

Name:..

Vorname:...

Aufgabe 1 (4+3 = 7 Punkte)

Gegeben sei die Gleichung,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p$$

wobei p der Druck und $\vec{v}$ eine gegebene Geschwindigkeit ist.

a) Beschreiben Sie den Unterschied zwischen $\frac{dp}{dt}$ und $\frac{\partial p}{\partial t}$? Veranschaulichen Sie Ihre Anwort mit Worten, evtl. Skizze.

b) In einer anhaltenden Wetterlage nimmt der Bodendruck um 3 hPa in einer Entfernung von 180 km in östliche Richtung ab. Ein mit 10 km/Std. in Richtung Osten fahrendes Schiff misst einen Druckabfall von 1 hPa in 3 Stunden. Was ist der stündliche Druckabfall auf einer Insel, an der das Schiff vorbeifährt?

Aufgabe 2 (3+3+5 = 11 Punkte)

Man betrachte die ein-dimensionale lineare Advektion mit periodischer Randbedingung im Interval $x \in \{0, 1\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + u\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) &= 0 \\ \phi(x; t = 0) &= \phi_0(x) \\ \phi(0, t) &= \phi(1, t) \quad \text{(Periodizität)} \end{aligned}$$

a) Betrachten Sie den folgenden Teil eines Matlab-Programmes:

```
% nx:  Die Anzahl Punkte in der raeumlichen Diskretisierung
cour = u*dt/dx;
for i = 2:nx-1
  new(i) = 0.5*(now(i+1)+now(i-1)) - cour/2*(now(i+1)-now(i-1));
end % for
new(1) = 0.5*(now(2)+now(nx)) - cour/2*(now(2)-now(nx));
new(nx) = 0.5*(now(1)+now(nx-1)) - cour/2*(now(1)-now(nx-1));
```

wobei `now(i)` $= \phi_i^n$, `new(i)` $= \phi_i^{n+1}$, `dt` $= \Delta t$, und `dx` $= \Delta x$.

Welche Disketisierungen werden dabei für die einzelnen Terme verwendet?

b) Folgendes Schema wird vorgeschlagen (mit Courant Zahl $\alpha = u\Delta t/\Delta x$):

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n + \frac{\alpha}{12}\left[8(\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n) - (\phi_{j+2}^n - \phi_{j-2}^n)\right]$$

Welche räumliche Fehlerordnung hat dieses Schema? Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit der physikalische im numerischen Abhängigkeitsbereich enthalten ist? Ist der Algorithmus immer stabil, falls diese erfüllt ist?

c) Ein weiteres Schema wird vorgeschlagen:

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n + \frac{\alpha}{2}\left(\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_{j-1}^{n+1}\right)$$

Zeigen Sie anhand der Von Neumann Analyse, dass dieses Schema absolut stabil ist. Beachten Sie folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
\phi_j^n &= \lambda^n e^{ijk\Delta x} \quad \text{(Von Neumann Ansatz)} \\
\sin(k\Delta x) &= \frac{e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}}{2i} \qquad \cos(k\Delta x) = \frac{e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (3+3+4 = 10 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem (AWP),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= F(\phi) \\
\phi(x; t = 0) &= \phi_0(x)
\end{aligned}$$

a) Zur Lösung des AWPs wird eine Zeitdiskretisierung $(\phi^1, \ldots, \phi^n)$ vorgenommen. Klassifizieren Sie (implizit/explizit, Anzahl Zeit-Niveaus, einstufig/mehrstufig) die folgenden Zeitschrittverfahren zweiter Ordnung, die man zur Lösung des AWPs verwenden könnte:

i)

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{\Delta t}{2}\left[3F(\phi^n) - F(\phi^{n-1})\right]$$

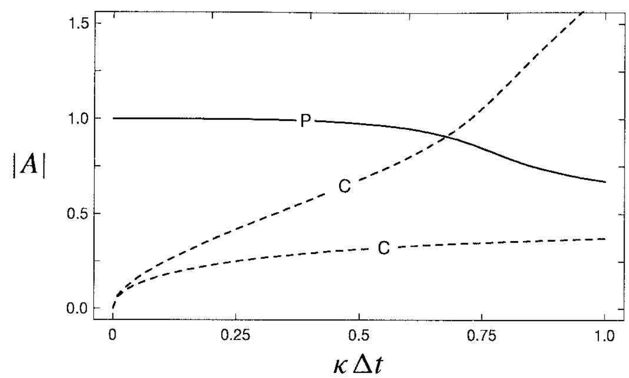
ii)

$$\begin{aligned}
q_1 &= F(\phi^n) \\
q_2 &= F(\phi^n + \Delta t F(\phi^n)) \\
\phi^{n+1} &= \phi^n + \Delta t\left(\frac{q_1}{2} + \frac{q_2}{2}\right)
\end{aligned}$$

iii)

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{\Delta t}{2}\left[F(\phi^{n+1}) - F(\phi^n)\right]$$

b) Ein Vier-Schrittverfahren, dass nicht näher spezifiziert wird, wird durch seine Verstärkungsfaktoren $|A|$ beschreiben:



κ ist die Frequenz in der Wellenfunktion $\phi = e^{i\kappa\Delta t}$, und Δt der Zeitschritt. "P" und "C" stehen für die "Physical" resp. "Computational" Moden. Erläutern Sie die Bedeutung der Moden, und beschreiben Sie das qualitative Verhalten dieses Schemas anhand der Figur. Was wird geschehen, wenn die Anfangsdaten grosse Frequenzen aufweisen?

c) Man verwende das *Adams-Moulton* Verfahren zur Lösung des AWPs:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{\Delta t}{12}\left[5F(\phi^{n+1}) + 8F(\phi^n) - F(\phi^{n-1})\right]$$

i) Klassifizieren Sie dieses Schema ebenfalls.

ii) Welche Zeit-Ordnung hat dieses Schema? Begründen Sie Ihre Antwort!