

Numerische Methoden in der Umweltphysik

Übungsserie 4

Musterlösung

Aufgabe 1

- (a)
- Wie lautet das CFL-Kriterium für die lineare Advektionsgleichung?
 - Ist das CFL-Kriterium im Allgemeinen eine hinreichende oder notwendige Bedingung für die Stabilität eines Schemas?
 - Gibt es Verfahren welche auch bei verletztem CFL-Kriterium stabil sind? (Namen angeben!)
 - Welches ist die Grundidee, welche hinter dem CFL-Kriterium steckt?

Lösung:

- *Grundidee des CFL-Kriteriums: Eine Finite Differenzenmethode muss alle Informationen berücksichtigen, die zu der Lösung der Differentialgleichung beitragen. Bei der linearen Advektion mit positiver Geschwindigkeit c , kann die "Information" (d.h. Funktionswert) im Punkt (x_0, t_0) die Funktionswerte in allen Punkten beeinflussen, die zwischen den Geraden $x = x_0$ und $t = t_0 + \frac{1}{c}(x - x_0)$ (die Charakteristik) liegen. Punkte ausserhalb dieses Einflussbereiches (engl: domain of influence) können nichts von dem Wert in (x_0, t_0) "wissen". Zurückschauend in der Zeit gibt es analog einen Abhängigkeitsbereich (domain of dependence), der aus den Punkten besteht, die (x_0, t_0) in ihrem Einflussbereich haben. Das numerische Schema muss mindestens so viele Punkte haben (so "breit" sein), dass es den Abhängigkeitsbereich abdeckt.*
- *Das CFL-Kriterium lautet : $c\Delta t/\Delta x \leq 0$ für $c > 0$ für ein breites Spektrum numerischer Methoden, nämlich die expliziten, die die Punkte $\phi_{j-1}^n, \phi_j^n, \phi_j^{n+1}$ zur Bestimmung von ϕ_j^{n+1} verwenden.*
- *Das CFL-Kriterium ist eine notwendige Bedingung, aber meistens keine hinreichende. Nehmen Sie folgendes Schema als Beispiel:*

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^{n-1} - \alpha \left(\frac{4}{3}(\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n) - \frac{1}{6}(\phi_{j+2}^n - \phi_{j-2}^n) \right).$$

Der Differenzenstern ist "breiter" ($\pm 2\Delta x$) als die üblichen Methoden, und deckt daher mehr vom Abhängigkeitsbereich ab. Das CFL-Kriterium für dieses Schema ist also :

$$\left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 2.$$

Das Kriterium ist notwendig aber nicht hinreichend für die Stabilität. Das hinreichende Kriterium findet man mit Hilfe der Von Neumann Analyse, und zwar $\left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 0.728$.

- *Implizite Verfahren (z.B. die Trapezregel, Backwards Euler) sind trotz verletztem CFL-Kriterium absolut stabil.*

b) Betrachten Sie den folgenden Teil eines Matlab-Programmes

```
alpha=u*dt/dx
for i=2:nx-1
    new(i)=now(i)*(1-alpha) + now(i-1)*alpha
end
```

wobei $\text{now}(i) = \phi_i^n$ und $\text{new}(i) = \phi_i^{n+1}$.

Beantworten Sie dazu folgende Fragen:

- Welche Gleichung wird integriert? (Gleichung angeben!)
- Welche Diskretisierungen werden dabei für die einzelnen Terme verwendet?
- Welches ist der numerische Stabilitätsbereich des Verfahrens?

Lösung:

- Den Code kann man folgendermassen umformen:

$$\begin{aligned}\phi_i^{n+1} &= (1 - \alpha)\phi_i^n + \alpha\phi_{i-1}^n, \\ \phi_i^{n+1} - \phi_i^n &= -\alpha(\phi_i^n - \phi_{i-1}^n), \\ \underbrace{\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t}}_{\text{Euler Forward}} &= -u \underbrace{\frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{\Delta x}}_{\text{Upstream}}.\end{aligned}$$

Die eindimensionale lineare Advektionsgleichung wird integriert:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0.$$

- Diskretisierungen: Euler Forward in der Zeit, Upstream im Raum
- Stabilitätsbereich: $0 \leq \alpha \leq 1$ (siehe Skript, Gleichung (3.24)).

c) Betrachten Sie den folgenden Teil eines Matlab-Programmes

```
alpha=u*dt/dx
b=kappa*dt/2
for i=2:nx-1
    new(i)=now(i)*(1-b)/(1+b) - alpha*(now(i)-now(i-1))/(1+b)
end
```

wobei $\text{now}(i) = \phi_i^n$, $\text{new}(i) = \phi_i^{n+1}$ und $\text{kappa} = \kappa$.

Beantworten Sie dazu folgende Fragen:

- Welche Gleichung wird integriert? (Gleichung angeben!)
- Welche Diskretisierungen werden dabei für die einzelnen Terme verwendet?

Lösung:

- Den Code kann man folgendermassen umformen:

$$\begin{aligned} \phi_i^{n+1} &= \frac{(1-b)}{(1+b)} \phi_i^n + \frac{\alpha}{(1+b)} (\phi_i^n - \phi_{i-1}^n), \\ (b+1)\phi_i^{n+1} &= (1-b)\phi_i^n + \alpha(\phi_i^n - \phi_{i-1}^n), \\ \phi_i^{n+1} - \phi_i^n &= -b(\phi_i^{n+1} + \phi_i^n) - \alpha(\phi_i^n - \phi_{i-1}^n), \\ \underbrace{\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t}}_{\text{Euler Forward}} &= -\kappa \underbrace{\frac{\phi_i^{n+1} + \phi_i^n}{2}}_{\text{Arith. Mittel}} - u \underbrace{\frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{\Delta x}}_{\text{Upstream}}. \end{aligned}$$

Die *Reibungsgleichung mit Advektion* wird integriert:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \kappa \phi + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0.$$

- *Diskretisierungen: Euler Forward in der Zeit, Arithmetisches Mittel von ϕ , und Upstream Ableitung im Raum.*

Aufgabe 2

a) Was versteht man unter “Konsistenz” eines numerischen Verfahrens?

Was versteht man unter “Konvergenz” eines numerischen Verfahrens?

Wie sind die Begriffe “Konvergenz”, “Konsistenz” und “Stabilität” miteinander verknüpft.

Lösung:

- **Konsistenz:** der Diskretisierungsfehler pro Zeitschritt verschwindet, wenn $\Delta x \rightarrow 0$ und $\Delta t \rightarrow 0$ streben.
- **Konvergenz:** Die exakte Lösung resultiert, wenn $\Delta x \rightarrow 0$ und $\Delta t \rightarrow 0$ streben.
- **Lax Richtmyer Theorem:** eine lineare finite Differenzenmethode konvergiert genau dann, wenn sie konsistent und stabil ist.

Als Beispiel eines konsistenten Schemas, das nicht konvergiert, betrachten Sie das Upstream Schema in dem Δx und Δt gegen Null streben unter der Nebenbedingung $c\Delta t/\Delta x > 1$. Das Schema ist bekanntlich konsistent, aber in diesem Bereich instabil. Trotz kleiner werdender Zeitschritte und Intervalle “schaukelt” die Lösung massiv und konvergiert nicht.

b) Betrachten Sie die lineare Advektionsgleichung $\partial\phi/\partial t + u(\partial\phi/\partial x) = 0$ und deren Integration mit dem sogenannten Lax-Fredrichs Verfahren

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\phi_i^{n+1} - \frac{(\phi_{i+1}^n + \phi_{i-1}^n)}{2} \right] + \frac{u}{2\Delta x} (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) = 0. \quad (1)$$

Wie würden Sie die Stabilität dieses Schemas beurteilen? Welche Methode ist dazu geeignet? Warum? Wie lautet der mathematische Ansatz und welches sind die entscheidenden Schritte des Stabilitätsbeweises? Was fällt als Nebenprodukt des Stabilitätsbeweises ab?

Es wird hier nicht erwartet, dass ein Stabilitätsbeweis durchgeführt wird, jedoch sollen die entscheidenden Schritte der Methode rezeptartig skizziert werden.

Lösung:

Die Stabilität eines linearen Schemas kann man mit der Von Neumann Analyse untersuchen. Man betrachtet wellenförmige Störungen der Form:

$$\phi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}.$$

wobei k die Wellenzahl und $\omega = ku$ die Kreisfrequenz sind. Die Übersetzung dieser Lösung auf das numerische Gitter ergibt:

$$\phi_j^n = e^{ijk\Delta x} \underbrace{(e^{-iku\Delta t})^n}_{\lambda}$$

(Von Neumann Ansatz).

i) Der Von Neumann Ansatz wird in die Differenzgleichung eingesetzt.

- ii) Man löst nach dem λ auf, und bestimmt den Amplifikationsfaktor $|\lambda|$.
- iii) Man bestimmt das Gebiet, in dem $|\lambda| \leq 1$ ist, zum Beispiel als Funktion von der Courant Zahl α (Stabilitätsbereich).

Als Nebenprodukt der Analyse können Informationen über Phasen- und Amplitudenfehler gewonnen werden. Durch den Phasenfehler kann man wiederum die numerische Dispersion des Schemas quantifizieren.

Der Stabilitätsbeweis selber wurde zwar nicht gefragt, ist aber in diesem Fall nicht schwierig:

$$\begin{aligned}
 \phi_i^{n+1} &= \frac{(\phi_{i+1}^n + \phi_{i-1}^n)}{2} - \frac{\alpha}{2} (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n), \\
 \lambda^{n+1} e^{ijk\Delta x} &= \lambda^n \frac{(e^{i(j+1)k\Delta x} + e^{i(j-1)k\Delta x})}{2} - \frac{\alpha}{2} \lambda^n (e^{i(j+1)k\Delta x} - e^{i(j-1)k\Delta x}), \\
 \lambda &= \frac{(e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x})}{2} - \alpha \frac{(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x})}{2}, \\
 \lambda &= \cos(k\Delta x) - i\alpha \sin(k\Delta x), \\
 |\lambda|^2 &= \cos^2(k\Delta x) + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x), \\
 |\lambda|^2 &= 1 - (1 - \alpha^2) \sin^2(k\Delta x).
 \end{aligned}$$

Dazu wurden folgende Relationen verwendet:

$$\begin{aligned}
 \sin(k\Delta x) &= \frac{e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}}{2i}, \\
 \cos(k\Delta x) &= \frac{e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}}{2}, \\
 \cos^2(k\Delta x) &= 1 - \sin^2(k\Delta x), \\
 |z|^2 &= z\bar{z}.
 \end{aligned}$$

Daraus ist ersichtlich, dass der Amplifikationsfaktor $|\lambda|$ genau dann kleiner 1 ist, wenn $(1 - \alpha^2) > 0$, d.h. $|\alpha| < 1$.

c) Ist das in (b) betrachtete Schema konsistent? Warum?

Lösung:

Diese Frage kann man nur richtig beantworten, indem man den Diskretisierungsfehler mit Hilfe der Taylor Entwicklung der exakten Lösung um den Punkt (x,t) berechnet.

$$\begin{aligned}\phi_i^{n+1} &\approx \phi(x, t + \Delta t) = \phi(x, t) + \Delta t \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + O((\Delta t)^3), \\ \phi_{i+1}^n &\approx \phi(x + \Delta x, t) = \phi(x, t) + \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3), \\ \phi_{i-1}^n &\approx \phi(x - \Delta x, t) = \phi(x, t) - \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3).\end{aligned}$$

Setzt man diese Approximationen in Gleichung (1) ein, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + O((\Delta t)^2) - \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + O\left(\frac{(\Delta x)^4}{\Delta t}\right) + u \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} + O((\Delta x)^2) \right] = 0. \quad (2)$$

Wenn Δx und Δt "vernünftig" gegen Null streben, z.B. mit $\Delta x/\Delta t = \text{const}$, dann ist das Schema konsistent. Falls aber $\Delta x \rightarrow 0$ und $\Delta t \rightarrow 0$ mit $(\Delta x)^3/\Delta t = \text{const}$, wird der Term $\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}$ unendlich gross. D.h. das Schema ist nur konsistent unter einer vernünftigen Annahme.

Es wird nochmals auf die Wichtigkeit der Taylor Entwicklung in der Numerischen Mathematik hingewiesen.