Numerische Methoden in der Umweltphysik

Computer-Übungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

WS 2005/2006 — 19. Jan. 2006

Definition des Lorenzmodells

Eine Flüssigkeit, die sich zwischen zwei horizontalen Platten unterschiedlicher Temperatur befindet, verhält sich ganz verschieden, je nachdem, wie gross der Temperaturunterschied zwischen den beiden Platten ist. Ist die untere Platte kälter als die obere, so bleibt die Flüssigkeit in Ruhe. Aber selbst bei leicht höherer Temperatur der unteren Platte verhindert die innere Reibung der Flüssigkeit ein Einsetzen einer Bewegung. Erst ab einem kritischen Temperaturunterschied setzt eine Vertikalbewegung ein, die sogenannte Rayleigh-Bénard Konvektion.

Der Atmosphärenphysiker E. N. Lorenz betrachtete die Erdatmosphäre als eine Box, die nicht unähnlich zum obigen Rayleigh-Bénard Problem ist (mit einem warmen Erdboden und einer kalten oberen Atmosphäre). Durch starke Vereinfachungen konnte er 1963 ein System von gekoppelten Differentialgleichungen vorstellen, die näherungsweise den obigen Prozess in der Atmosphäre beschreiben:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(y-x) \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + cx - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz \end{aligned}$$

Das Lorenz-Modell gilt als das einfachste Modell der Atmosphäre welches chaotisches Verhalten zeigt. Die Lorenz-Variablen x, y und z ergeben sich aus der Herleitung des Modells, und beinhalten die Temperatur, die Dichte und die Geschwindigkeiten (siehe Lorenz 1963). Für uns ist hier die genaue Bedeutung unwesentlich, da aufgrund der starken Idealisierungen ohnehin kein Vergleich mit der realen Atmosphäre durchgeführt werden kann. Wichtig ist hingegen, dass das System drei Parameter a, b und c besitzt. Das Verhalten des Lorenz-Modells als Funktion dieser Parameter ist das Thema dieser Übung.

Installation und Ausführung des Matlab Programms

1. Holen Sie die Matlab Programme `Lorenz.m` und `Lorenz_visual.m` von:
   `http://www.iac.ethz.ch/staff/schaer/Vorlesungen/NumUmwelt/UEBUNGEN/`
2. Starten Sie Matlab
   `matlab`
3. Starten Sie das Programm Lorenz
   `Lorenz`

Beachten Sie, dass das Runge-Kutta Verfahren noch nicht implementiert ist.

Visualisierung

Die zeitliche Evolution des Systems kann auf unterschiedliche Weise visualisiert werden. In der Standardeinstellung wird eine Trajektorie, d.h. die *Bahn* eines "Teilchens" im Phasenraum (X,Y,Z), dargestellt. Mit der Option `Animation` kann die *Bewegung* eines "Teilchens" im Phasenraum (X,Y,Z) angeschaut werden. Mit den Optionen `"XY"`, `"XZ"`, `"YZ"` kann die Bahn bzw. die Bewegung des Systems auf eine Koordinatenebene projiziert werden. Die Optionen `X(t)`, `Y(t)` und `Z(t)` zeichnen eine Zeitreihe für das Power-Spektrum der ausgewählten Koordinate.

Verschiedene Regime

1. Wählen Sie die Parameter $a = 10$ und $b = 8/3$ im Lorenzmodell und untersuchen Sie das Verhalten des Systems in Abhängigkeit des Parameters c ($c = 10, 20, 30, 40, 50, 60$). Verwenden Sie den Befehl `Trajectory` zur Visualisierung. Bei welchem Wert von c setzt ungefähr das chaotische Verhalten ein? Vergleichen Sie die Trajektorien im Phasenraum (x, y, z) im nicht-chaotischen und im chaotischen Bereich.

2. Wählen Sie den Parameter $c = 160$. Es sollte sich eine periodische Oszillation ergeben (Verwenden Sie die Befehle `Trajectory X/Y/Z(t)` und `PowerSpectrum` um das zu überprüfen). Wie klein müssen Sie den Zeitschritt im Euler-Verfahren wählen, um das zu erreichen?

Implementation der Methode von Runge Kutta

3. Implementieren Sie das Verfahren von Runge-Kutta! Dieses lautet in einer sehr Speicherplatz sparenden Version für die Differentialgleichung $d\vec{x}/dt = F(\vec{x})$ (siehe Vorlesung Formel 4.35):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^n) & \mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{x}^n + \tfrac{1}{3}\Delta t\mathbf{q}_1 \\
\mathbf{q}_2 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) - \tfrac{5}{9}\mathbf{q}_1 & \mathbf{x}^{(2)} &= \mathbf{x}^{(1)} + \tfrac{15}{16}\Delta t\mathbf{q}_2 \\
\mathbf{q}_3 &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(2)}) - \tfrac{153}{128}\mathbf{q}_2 & \mathbf{x}^{n+1} &= \mathbf{x}^{(2)} + \tfrac{8}{15}\Delta t\mathbf{q}_3
\end{aligned}
$$

   Am besten studieren Sie im Detail, wie der Euler-Schritt im Programm implementiert ist. Danach sollte es einfacher sein, den mehrstufigen Runge-Kutta Schritt einzubauen.

   Schauen Sie sich also die Routine `eulerschritt(xnew,xold,a,b,c,dt)` im Programm an. Der Routine wird die alte Koordinate `xold`, die Parameter `a,b,c` des Lorenzmodells und der Zeitschritt `dt` übergeben. Zurückgeliefert wird die neue Koordinate `xnew`.

4. Wie klein müssen Sie den Zeitschritt wählen, um eine (korrekte) periodische Kurve zu erhalten ($c = 160$)?

Sensitivität bezüglich den Anfangsbedingungen

5. Eine charakteristische Eigenschaft von nichtlinearen und chaotischen Systemen ist ihre grosse Sensitivität bezüglich den Anfangsbedingungen. Startet man bei einer leicht verschiedenen Position, so ergibt sich in der Regel eine völlig andere Trajektorie. Dies lässt sich am besten zeigen, indem man nicht die Bewegung eines einzelnen Punktes anschaut, sondern die zeitliche Entwicklung einer ganzen Punktwolke betrachtet. Simulieren Sie solche Wolken (mit etwa 50 Störungen (*Perturbations*) des Anfangspunktes) in verschiedenen Regimes des Lorenzsystems.

Literatur

Lorenz, E. N., 1963: Deterministic Nonperiodic Flow. *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130-141.