Numerische Methoden in der Umwelphysik

Computer-Übungen zur linearen Advektion

WS 2005/2006 — 1. Dez. 2005

NO F34.1

Der Transport eines passiven Tracers mit konstanter Geschwindigkeit wird durch die eindimensionale Advektionsgleichung

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad\qquad u = \text{const} > 0$$

beschrieben, wobei ϕ die Konzentration des Tracers, und u die konstante Advektionsgeschwindigkeit bezeichnet. In dieser Übung sollen verschiedene numerische Verfahren zur Lösung der Advektionsgleichung untersucht und implementiert werden.

Installation und Ausführung des Matlab Programms

1. Holen Sie die Matlab Programme `linadv.m`, `visual.m` und `upstream.m` von:
   `http://www.iac.ethz.ch/staff/schaer/Vorlesungen/NumUmwelt/UEBUNGEN/index.html`

2. Starten Sie Matlab

3. Starten Sie das Programm `linadv`

Beispiele mit bereits implementierten Schemen

4.a Reproduzieren Sie den in Fig. 3.2 des Skripts abgebildeten Advektionstest für das Leapfrog-Schema. Mit dem Button "A" können Sie die analytische Lösung ein- und ausblenden.

4.b Das Programm enthält einen Diffusionsoperator der Form

$$\tilde{\phi}_j = \phi_j + \frac{\nu}{4}\left(\phi_{j-1} - 2\phi_j + \phi_{j+1}\right) ,$$

welcher nach jedem Zeitschritt aufgerufen wird. Dieser Operator hat eine glättende Wirkung für $0 < \nu \leq 1$. Suchen Sie denjenigen Wert von ν, welcher eine optimal glättende Wirkung auf das Resultat von Aufgabe 4.a hat, ohne die Amplitude übertrieben zu reduzieren.

Überprüfen Sie anschliessend die Wirkung dieses Diffusionsoperators bei höherer Auflösung, sowie auf den in Fig. 3.5 gezeigten "Zickzack-Test". Die minimale mögliche Auflösung beim "Zickzack-Test" beträgt 80 Gitterpunkte.

4.c Führen Sie auch einen "Zickzack-Test" mit hoher räumlicher Auflösung durch (400 oder mehr Gitterpunkte).

Implementation weiterer Schemen

5. Implementieren Sie das Upstream-Schema (Gleichung 3.6 des Skripts). Dazu muss an der entsprechenden Stelle im Programm `upstream.m` die Variable

   `new(i)` für `i=3` bis `nx+2`

   berechnet werden (siehe Matlab Primer). Alle anderen Vorgänge (periodische Randbedingungen, Umspeichern der Zeitniveaus, Initialisierung, Input/Output) werden im Rahmenprogramm `linadv.m` übernommen.

   Zum Editieren des Files `upstream.m` können Sie den Matlab Editor verwenden. Nach Änderungen am Programm, muss dieses abgespeichert und `linadv` neu gestartet werden.

6. Implementieren Sie eines der folgenden numerischen Verfahren:

   6.a Das Leapfrog-Schema 4. Ordnung

   $$\phi_i^{n+1} = \phi_i^{n-1} - \alpha \left[\frac{4}{3} \left(\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n \right) - \frac{1}{6} \left(\phi_{i+2}^n - \phi_{i-2}^n \right) \right]$$

   Vergleichen Sie die Resultate des Advektionstests mit dem klassischen Leapfrog-Schema 2. Ordnung.

   Hinweis: Entweder können Sie `leapfrog4.m` *von der oberwähnten URL herunterladen und abändern, oder* `upstream.m` *dementsprechend umbenennen und umschreiben.*

   6.b Das Lax-Wendroff Schema

   $$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\alpha}{2} \left(\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n \right) + \frac{\alpha^2}{2} \left(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n \right)$$

   Vergleichen Sie die Resultate mit dem Upstream-Schema.

   Hinweis: Entweder können Sie `lax_wendroff.m` *von der oberwähnten URL herunterladen und abändern, oder* `upstream.m` *dementsprechend umbenennen und umschreiben.*

7. Untersuchen Sie die Konvergenz des Upstream, Lax-Wendroff und Leapfrog-4 Verfahrens. Wie ändert sich der Fehler bei Verfeinerung der Maschenweite, bei konstant gehaltener Courant-Zahl? Bestimmen Sie die Ordnung der Schemen für die Sinus- und Dreiecksanomalie.