UWIS, Atmosphärenphysik, Übung 2

Thomas Kuster

30. November 2005

1 Frage

Welche Feuchtemasse sind konservativ während adiabatischen Prozessen?

1.1 Adiabatischer Prozess

$\Delta Q = 0$

1.2 Feuchtemasse

1.2.1 Absolute Luftfeuchtigkeit ($\varrho_v = \mathbf{M}\,\mathbf{L}^{-3}$)

Das Volumen ändert bei adiabatischen Prozessen (z. B. adiabatischer Aufstieg) $\Rightarrow$ nicht konservativ.

1.2.2 Relative Luftfeuchtigkeit ($[f] = \%$)

Volumenänderung führt zu Temperaturänderung $\Rightarrow$ nicht konservativ.

1.2.3 Spezifische Luftfeuchtigkeit ($[q] = \mathbf{M}\,\mathbf{M}^{-1}$)

Masse von Wasserdampf pro Masse feuchter Luft. Beide Massen bleiben erhalten, solange kein Wasserdampf kondensiert (oder neuer dazu kommt durch Verdunstung) $\Rightarrow$ konservativ (falls trockenadiabatisch).

1.2.4 Mischungsverhältnis ($\mathbf{M}\,\mathbf{M}^{-1}$)

Masse Wasserdampf pro Masse trockener Luft. Es gilt das in (1.2.3) gesagte.

1.3 Taupunkt Temperatur (T)

Die Taupunkttemperatur nimmt mit sinkender Temperatur ab, da mit sinkender Temperatur der Sättigungsdampfdruck sinkt $\Rightarrow$ nicht konservativ.

2 instabile Schicht

Gegeben

$$\begin{aligned}\Gamma_t &= 10^{-2}\,\mathrm{K\,m^{-1}}\\ \gamma &= 3\cdot 10^{-2}\,\mathrm{K\,m^{-1}}\\ v_0 &= 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}\\ T_0 &= 280\,\mathrm{K}\\ t_1 &= 2' = 120\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

DGL

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}} + N^2 z = 0$$

Ansatz

$$\begin{aligned} z(t) &= A\cos(Nt) + B\sin(Nt)\\ z(t) &= A\exp(iNt) + B\exp -iNt\\ sqrt\frac{9.81}{280}(0.01-0.03)\ N &= \sqrt{\frac{g}{T}(\Gamma_t-\gamma)}\end{aligned}$$

Beide Ansätze sind eine Lösung der DGL.
Da behauptet wurde, dass der trigometrische Ansatz nicht funktioniert, wird hier gezeigt, dass dieser auch funktioniert.
Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} z(0) &= 0\,\mathrm{m}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}z(0) &= 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}\end{aligned}$$

Einsetzen in den trigometrischen Ansatz

$$\begin{aligned} z(0) &= A\underbrace{\cos(N0)}_{=1} + B\underbrace{\sin(N0)}_{=0} = 0 \Rightarrow A = 0\\ \dot z(0) &= -AN\underbrace{\sin(N0)}_{=0} + BN\underbrace{\cos(N0)}_{=1} = 1 \Rightarrow BN = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{N}\\ \Rightarrow z(t) &= \frac{1}{N}\sin(Nt)\end{aligned}$$

Das Argument des Sinus ist imaginär, den $\sin(Nt)$ könnte man jedoch durch $i\sinh(\mathrm{Re(Nt)})$ ersetzen, falls man unbedingt eine reelle Zahl als Argument will. Mein Taschenrechner hat damit aber kein Problem.
Einsetzen ergibt die Höhe

$$z(120) = \left(\frac{9.81}{280}(0.01-0.03)\right)^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\sqrt{\frac{9.81}{280}(0.01-0.03)}120\right) = 451.8\,\mathrm{m}$$

Ableiten und einsetzen ergibt die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{1}{N} \sin(Nt) = \cos(Nt) \\ \dot{z}(120) &= \cos\left(\sqrt{\frac{9.81}{280}(0.01-0.03)120}\right) = 12\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned}$$

Nun noch der exponential Ansatz in kurz Form, aus den Anfangsbedingungen folgt

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ iNA - iNB &= 1 \Rightarrow 2AiN = 1 \\ A &= \frac{1}{2iN} \\ B &= -\frac{1}{2iN} \end{aligned}$$

Für die Höhe

$$z(t) = \frac{1}{2iN}\left(\exp(iNt) - \exp(-iNt)\right)$$

Für die Geschwindigkeit

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{2}\left(\exp(iNt) + \exp(-iNt)\right)$$

Man sieht sofort, dass die eine Lösung mit der Formel von Euler in die andere überführt werden kann.

3 Radiosonde

3.1 Entropie

Trockenadiabatischer Aufstieg bis $\approx 820\,\mathrm{hPa}$ anschliessend feucht adiabatischer Aufstieg bis $500\,\mathrm{hPa}$.

$$\begin{aligned} T_{910} &= 23°\mathrm{C} \\ T_{500} &= -7°\mathrm{C} \text{ aus Tephigram} \\ \kappa &= 0.286 \\ c_p &= 1005\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K{-}1} \end{aligned}$$

Potentielle Temperatur

$$\begin{aligned} \theta &= T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\kappa} \\ \theta_{910} &= 304\,\mathrm{K} \\ \theta_{500} &= 325\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

Entropie

$$\begin{aligned} s &= c_p \ln(\theta) \\ \Delta s &= c_p \ln\left(\frac{\theta_{500}}{\theta_{910}}\right) = 64.8\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K{-}1} \end{aligned}$$

3.2 latente Wärme

spezifische Feuchte (aus Tephigram)

$$\begin{aligned} q &= 12.0\,\mathrm{g\,kg^{-1}} \\ q &= 4.8\,\mathrm{g\,kg^{-1}} \\ \Delta q &= 7.2\,\mathrm{g\,kg^{-1}} \end{aligned}$$

latente Wärme

$$\Delta q L = 7.2\,\mathrm{g\,kg^{-1}} \cdot 2.5 \cdot 10^6\,\mathrm{J\,kg^{-1}} = 18\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$$

3.3 CAPE

$$\mathrm{CAPE} = \mathrm{g}\int_{\mathrm{z_0}}^{\mathrm{z}} \mathrm{B(z)\,dz} = \mathrm{g}\int_{\mathrm{z_0}}^{\mathrm{z}} \frac{\mathrm{T(z) - T'(z)}}{\mathrm{T'(z)}}\,\mathrm{dz} \approx \mathrm{g}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{T(z) - T'(z)}}{\mathrm{T'(z)}}\Delta\mathrm{z}$$

$$\begin{aligned} \Delta z &= -\frac{\Delta p}{\varrho g} \\ p &= \varrho R T \Rightarrow \varrho = \frac{p}{RT} \\ \Delta z &= \frac{\Delta p R T}{p g} \end{aligned}$$

$$\mathrm{CAPE} \approx \mathrm{R}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \left(\frac{\mathrm{\Delta pT(z)(T(z) - T'(z))}}{\mathrm{pT'(z)}}\right)$$

Von 810 hPa bis 500 hPa aufsummieren

p_{Mitte} [hPa]	Δp [hPa]	T' [K]	T	$\frac{\Delta p T(z)(T(z)-T'(z))}{pT'(z)}$ [K]
800	20	285	286	0.03
770	32.5	283	284	0.04
745	55	283	283	0.00
660	95	275	278	0.44
555	67.5	263	271	1.00
525	27.5	261	270	0.49
500	12.5	260	266	0.15
				Summe 2.15

$$\mathrm{CAPE} \approx \mathrm{R_v} \cdot \mathrm{Summe} = 461.5\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}} \cdot 2.15\,\mathrm{K} = 991\,\mathrm{J\,kg^{-1}}$$

3.4 Vertikalgeschwindigkeit

$$U = \sqrt{\underbrace{U_0^2}_{=0} + 2 \cdot \mathrm{CAPE}} = \sqrt{991\,\mathrm{J\,kg^{-1}}} = 31.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

3.5 realistische Vertikalgeschwindigkeit

Die realistische Geschwindigkeit ist kleiner:

- Kondensierte Tropfen fallen herunter
- Kalte Luft strömt an den Grenzen hinein ⇒ Abkühlung der Luft und Turbulenzen
- Aufsteigende Luft muss die darüberliegende Luft verdrängen ⇒ Luftwiederstand

3.6 Stabilität

Stabilität bei anheben der Schicht

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial z} &> 0 \text{ stabil} \\ \frac{\partial\theta}{\partial z} &= 0 \text{ neutral} \\ \frac{\partial\theta}{\partial z} &< 0 \text{ instabil} \end{aligned}$$

Da Δz immer > 0 ist, spielt nur $\Delta\theta$ eine Rolle.

Frage	p [hPa]	T °C	T K	θ [K]	$\Delta\theta$ [K]	Schicht	Paket
a)	950	26	299	300			γ zwischen Γ_f und Γ_t
	890	21	294	298	-0.03	instabil	neutral
b)	840	16	289	296			$\gamma = \Gamma_t$
	800	12	285	293	-0.08	instabil	neutral (trocken)
c)	770	10	283	293			$\gamma < \Gamma_f$
	745	10	283	294	0.04	stabil	stabil
d)	500	-12	261	288			$\gamma \approx \Gamma_f$
	400	-25	248	288	0.00	neutral	neutral (feucht)

Stabilität des Luftpaketes

4 Nebelbildung

Luftmasse 1: $T_1 = 30°\mathrm{C} = 303\,\mathrm{K}$ $\quad f_1 = 90\%$
Luftmasse 2: $T_2 = 2°\mathrm{C} = 275\,\mathrm{K}$ $\quad f_2 = 80\%$

$$T = \frac{M_1T_1 + M_2T_2}{M_1 + M_2}$$

Die Formulierung gleichgrosse Luftmassen ist mir unklar, sind sie nun gleichschwer oder gleichgross? Ich nehme mal an, dass sie die selben Masse haben und M_x die Massen sind und nicht die Molmassen $\Rightarrow M_1 = M_2$.

$$T = \frac{1}{2}(303\,\mathrm{K} + 275\,\mathrm{K}) = 289\,\mathrm{K}$$

Berechnen wie gross der Gesamtwassergehalt der beiden Luftmassen ist.
Sättigungsdampfdruck:

$$E = E_0 \exp \frac{17.5043 \cdot T}{241.2^\circ\mathrm{C} + T} \qquad E_0 = 6.11213\,\mathrm{hPa}$$

$$\begin{aligned} E_1 &= 42.376\,\mathrm{hPa} \quad \Rightarrow \quad e = 42.376\,\mathrm{hPa} \cdot 0.9 = 38.138\,\mathrm{hPa} \\ E_2 &= 7.059\,\mathrm{hPa} \quad \Rightarrow \quad e = 7.059\,\mathrm{hPa} \cdot 0.8 = 5.647\,\mathrm{hPa} \\ E_{\mathrm{Mischung}} &= 18.159\,\mathrm{hPa} \end{aligned}$$

Spezifische Feuchte:

$$q = \frac{0.622 \cdot e}{p - 0.378 \cdot e}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= 24.1\,\mathrm{g\,kg^{-1}} \\ q_2 &= 3.52\,\mathrm{g\,kg^{-1}} \\ q_{\mathrm{Mischung}} &= 11.4\,\mathrm{g\,kg^{-1}} \\ \Delta q &= \frac{q_1 + q_2}{2} - q_{\mathrm{Mischung}} = 2.42\,\mathrm{g\,kg^{-1}} \end{aligned}$$