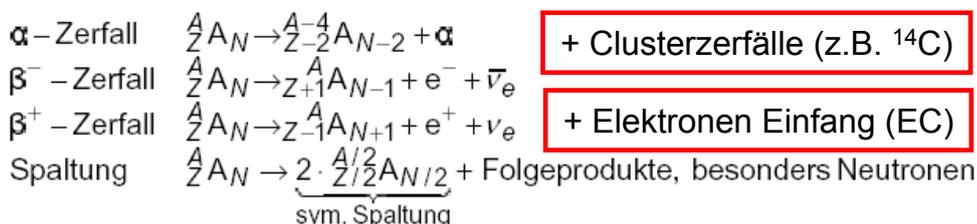


# Strahlung bei Kernzerfällen

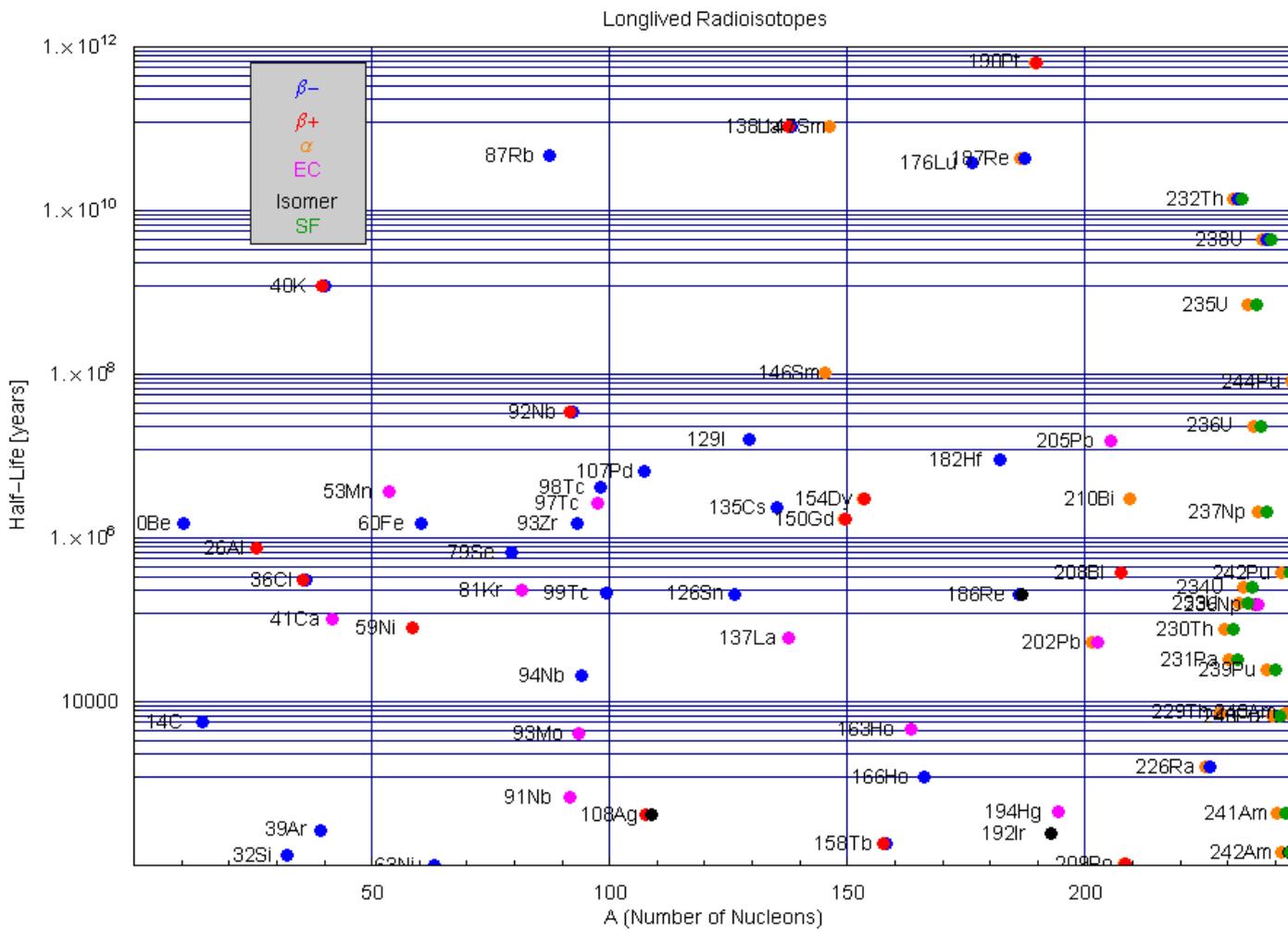
## Klassifizierung der beobachteten Strahlungen

Meßgröße	$\alpha$ -Strahlung	$\beta$ -Strahlung	$\gamma$ -Strahlung
Typ.Reichweite in Luft	einige cm; scharf begrenzt	einige m; diffus	typ. 100 m; diffus
Ablenkung im Magnetfeld	ja; schwach	ja; stark (+,-)	nein
Natur der Strahlung	$^4\text{He}$ -Kerne	Elektronen, Positronen	el.-magnet. Strahlung

### Zerfallstypen



## Langlebige Radionuklide



# Relevante Grössen von Radionukliden

## Kenngrößen eines Radionuklids

1. Zerfallstyp (Art der emittierten Strahlung),
2. Zerfallsenergie (Energie der Strahlung),
3. Halbwertszeit (Intensität der Strahlung bei gegebener Substanzmenge).

## Zerfallsschema: z.B.: $^{212}\text{Pb}$

### Charakteristische Eigenschaften:

Halbwertszeiten

Zerfallsenergien

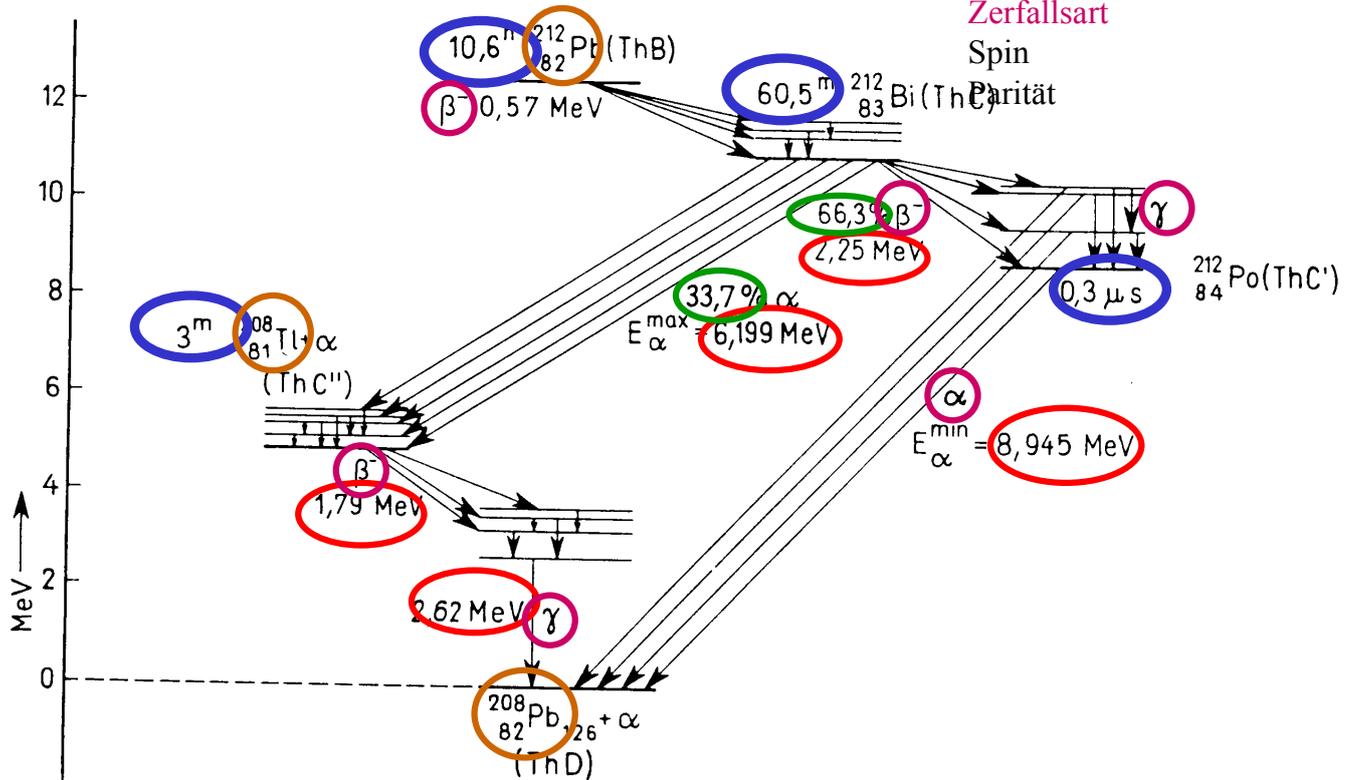
Kern (A,Z)

Häufigkeit

Zerfallsart

Spin

Parität



# Zerfallsgesetz

## Eigenschaften des radioaktiven Zerfalls

Der Zerfall erfolgt statistisch. Der Zeitpunkt des Zerfalls eines willkürlich herausgegriffenen Kerns ist nicht vorhersagbar. Es gibt nur Wahrscheinlichkeitsaussagen. Es gibt eine Zerfallskonstante, die ein Maß für die Wahrscheinlichkeit eines Zerfalls ist. Die Zerfallskonstante ist unabhängig von der Vorgeschichte sowie äußeren Bedingungen, wie Druck, Temperatur usw. Bei extrem hohen Drucken wurde jedoch eine geringe Änderung der Zerfallskonstanten beim  $\beta$ -Zerfall beobachtet.

### Zerfallsgesetz

Zur Zeit  $t = 0$  werde eine große Zahl  $N_0$  radioaktiver Kerne isoliert. Die Abnahme  $dN$  der Teilchenzahl läßt sich schreiben als

$$dN = -\lambda \cdot N(t) dt$$

Differentialgleichung  
QM :  $\lambda$  : Zerfallswahrscheinlichkeit

Integration ergibt für die Anzahl der zur Zeit  $t$  noch vorhandenen Kerne

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Der Kehrwert der Zerfallskonstanten  $\lambda$  ist die mittlere Lebensdauer dieser Kerne

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

# Zerfallskonstante

Unter der Halbwertszeit versteht man die Zeit, die vergeht, bis nur noch die Hälfte der anfänglichen Zahl von Kernen vorhanden ist.  $N(T_{1/2}) = N_0/2$ .  $T_{1/2}$  ergibt sich aus der mittleren Lebensdauer zu  $T_{1/2} = \ln 2 \tau = 0.693 \tau$ .

Die Aktivität einer radioaktiven Probe folgt ebenfalls dem exponentiellen Zerfallsgesetz:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

### Weitere Definitionen

Einem zerfallenden Zustand wird die Energieunschärfe  $\Delta E = \hbar / \Delta t$  zugeordnet. Man definiert eine „Zerfallsbreite“  $\Gamma = \hbar / \tau = \hbar \lambda$ . Kann ein Kern auf verschiedenen Wegen zerfallen, so ergibt sich für die totale Zerfallswahrscheinlichkeit

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots \quad \text{und ebenso} \quad \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots$$

Diese Gesetze gelten sowohl für den radioaktiven Zerfall unter Teilchenemission als auch für den Zerfall angeregter Kernzustände unter Emission elektromagnetischer Strahlung.

# Zerfallsgesetz

## Differentialgleichung:

N: Anzahl Atome

$\lambda$  : Zerfallswahrscheinlichkeit

(Bestimmt durch Quantenmechanik)

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

## Zerfallsgesetz (Lösung der Diff. Gleichung) :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

$N_0$ : Anfangskonzentration

Mittlere Lebensdauer:  $t = 1/\lambda$

Halbwertszeit :  $t_{1/2} = \ln(2) / \lambda$

## Aktivität: dN/dt

Einheiten: 1 Becquerel = 1 Bq = 1 Zerfall/sec =  $0.27 \cdot 10^{-10}$  Curie (Ci)

1 Curie =  $3.7 \cdot 10^{10}$  Becquerel

Spezifische Aktivität: Zerfälle/Masse : Bq/g

Elze 72

# Zerfallsketten I

c) Zerfallsketten  $N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow N_3 \rightarrow \dots N_k$

Die zeitliche Änderung von  $N_i$  ist gegeben durch

$$\frac{dN_i}{dt} = -\lambda_i \cdot N_i + \lambda_{i-1} \cdot N_{i-1}$$

Dieses System von Differentialgleichungen wird durch folgenden Ansatz gelöst:

$$\begin{aligned} N_1 &= C_{11} e^{-\lambda_1 \cdot t} \\ N_2 &= C_{21} e^{-\lambda_1 \cdot t} + C_{22} e^{-\lambda_2 \cdot t} \\ N_3 &= C_{31} e^{-\lambda_1 \cdot t} + C_{32} e^{-\lambda_2 \cdot t} + C_{33} e^{-\lambda_3 \cdot t} \\ &\vdots \\ N_k &= C_{k1} e^{-\lambda_1 \cdot t} + \dots + C_{kk} e^{-\lambda_k \cdot t} \end{aligned}$$

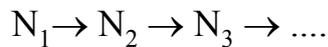
Die Koeffizienten  $C_{ij}$  ergeben sich aus der Rekursionsformel

$$C_{ij} = C_{i-1,j} \cdot \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_j} \quad \text{für } i \neq j$$

sowie aus den Randbedingungen für  $t = 0$

$$N_1(0) = C_{11}, \quad N_2(0) = C_{21} + C_{22}, \quad \text{usw.}$$

# Zerfallsketten II



System von linearen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} dN_1/dt &= -\lambda_1 N_1 \\ dN_2/dt &= \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \\ dN_3/dt &= \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3 \end{aligned}$$

Kann analytisch gelöst werden:

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } N_1 &= c_{11} e^{-\lambda_1 t} \\ N_2 &= c_{21} e^{-\lambda_1 t} + c_{22} e^{-\lambda_2 t} \\ N_3 &= c_{31} e^{-\lambda_1 t} + c_{32} e^{-\lambda_2 t} + c_{33} e^{-\lambda_3 t} \end{aligned}$$

$$c_{ij} = c_{i-1,j} \lambda_{i-1} / (\lambda_i - \lambda_j) \quad (i \neq j)$$

Elze 71

## Zerfall mit gleichzeitiger Produktion

Beispiele zum Zerfallsgesetz

a) Ein Radionuklid werde mit konstanter Produktionsrate  $q \text{ (s}^{-1}\text{)}$  erzeugt, wobei es gleichzeitig zerfällt. Die zeitliche Änderung von  $N$  ergibt sich zu

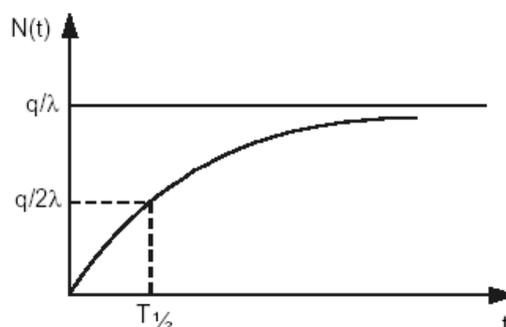
$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N + q$$

Durch Integration erhält man:

$$N(t) = \frac{q}{\lambda} + C \cdot e^{-\lambda t}$$

$$N(t) = \frac{q}{\lambda} \cdot (1 - e^{-\lambda t}), \quad \text{da } N(t=0) = 0$$

In der Sättigung zerfallen pro Zeiteinheit genau so viele Kerne wie neu gebildet werden. Es hat daher keinen Zweck, z.B. an einem Reaktor länger als etwa 3 Halbwertszeiten zu bestrahlen.



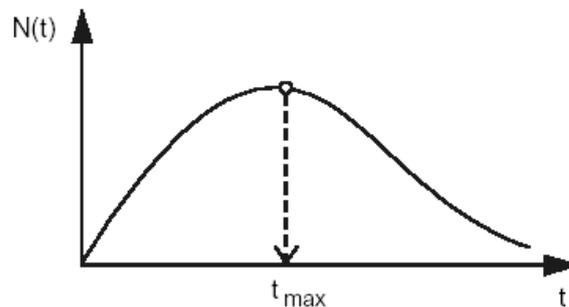
# Zerfallskette III

b) Ein mit der Rate  $\lambda_1$  zerfallendes Radionuklid werde durch den Zerfall eines Mutterkerns mit der Rate  $\lambda_2$  nachgebildet. Daher

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda_1 \cdot N_1(t) + \lambda_0 \cdot N_0(t) = -\lambda_1 \cdot N_1(t) + \lambda_0 \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda_0 t}$$

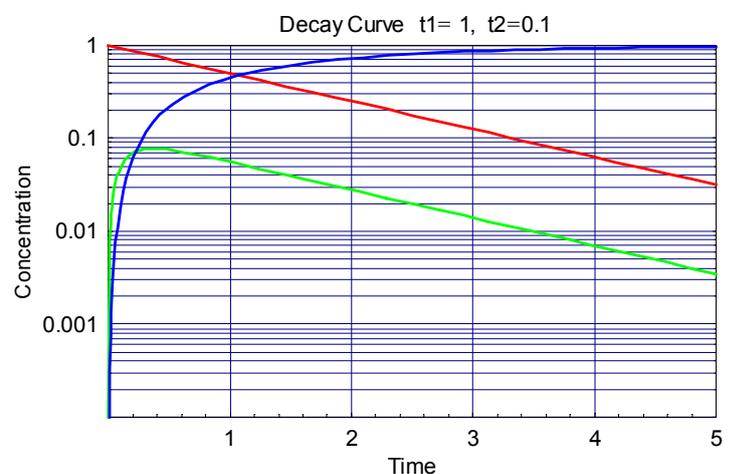
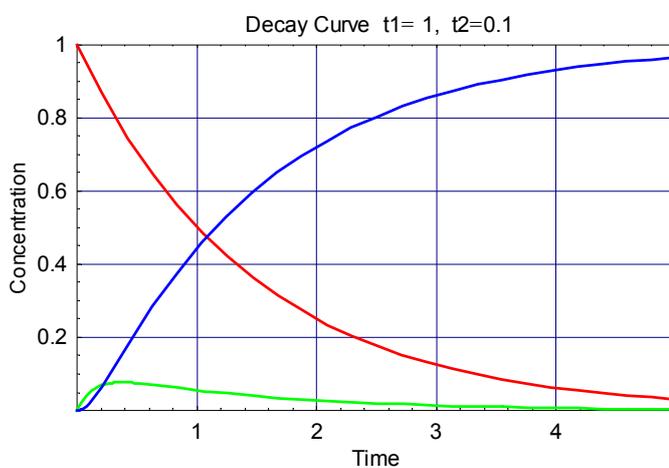
Diese Differentialgleichung wird gelöst durch  $N_1(t) = \frac{N_0 \cdot \lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0} \left[ e^{-\lambda_0 \cdot t} - e^{-\lambda_1 \cdot t} \right]$

Die Zeit bis zum Erreichen der maximalen Anzahl der Kerne  $N_1(t)$  ist  $t_{\max} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} \cdot \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$

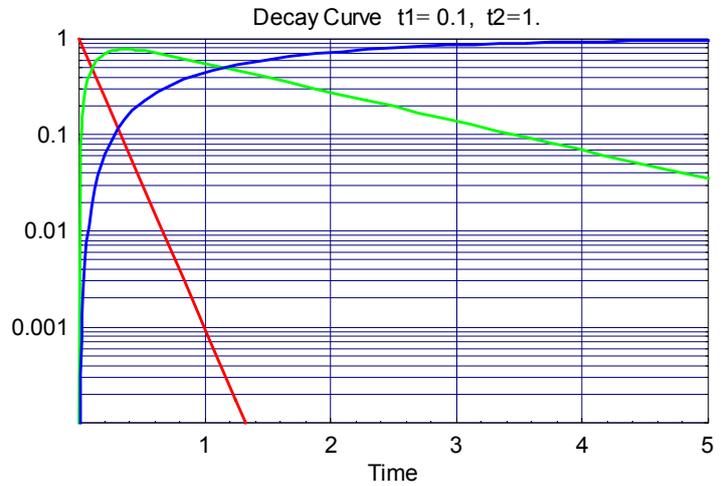
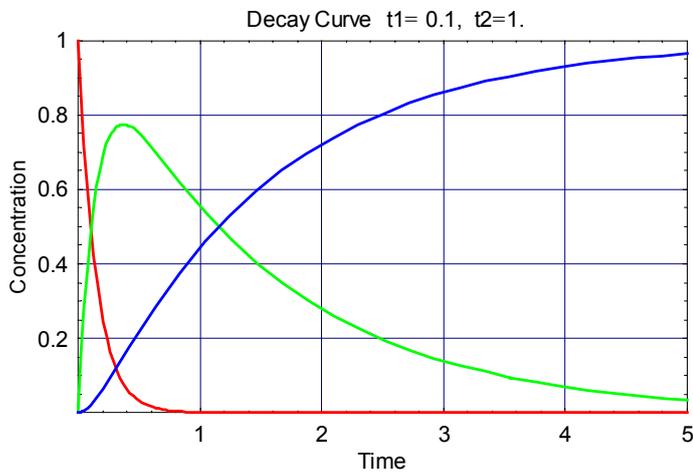


Dieses Beispiel zeigt, daß die Anzahl der radioaktiven Tochterkerne mit der Zeit sogar anwachsen kann.

Beispiel :  $t_1 > t_2$



## Beispiel: $t_2 > t_1$

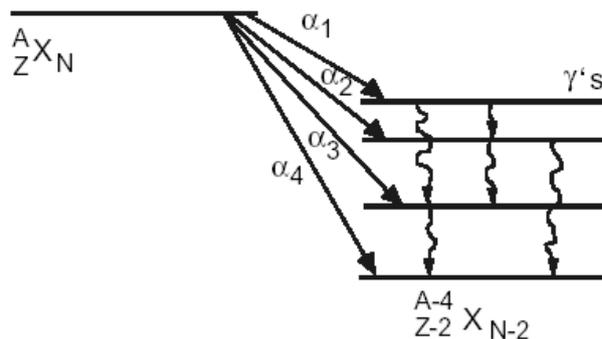


Elze 75

# Alpha-Zerfall

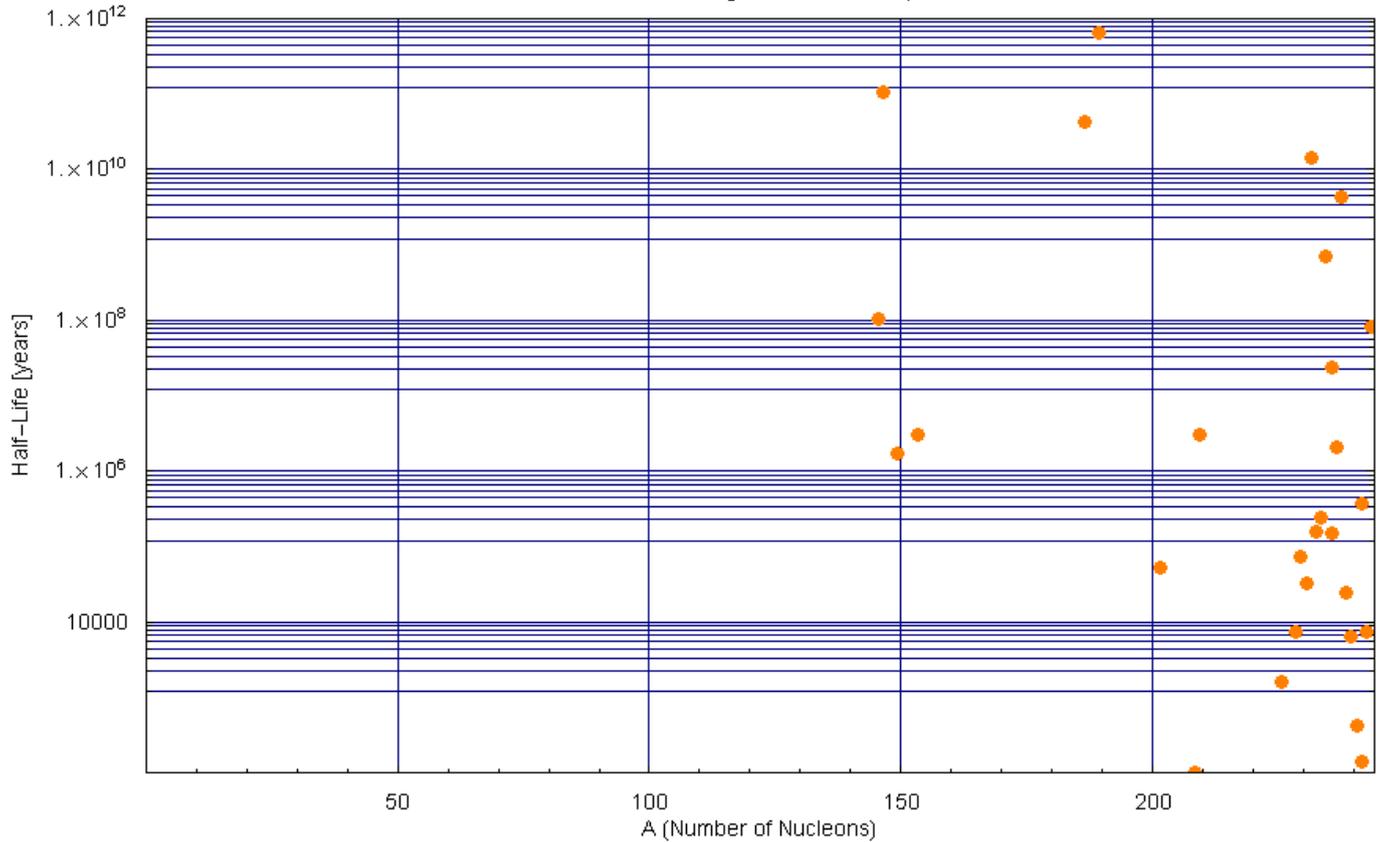
## 3.2 Der Alpha-Zerfall

Bis etwa 1930 wurde die Energie der  $\alpha$ -Strahlen durch ihre Reichweite in Luft bestimmt. Später erlaubten Magnetspektrographen detailliertere Untersuchungen der Spektren.  $\alpha$ -Strahlen haben diskrete Energien. Die Spektren bestehen zumeist aus mehreren Linien, die zu Zerfällen des Mutterkerns in angeregte Zustände des Tochterkerns gehören. Das Tröpfchenmodell gibt eine Stabilitätsgrenze gegenüber dem  $\alpha$ -Zerfall an.



# Langlebige $\alpha$ - Emitter

$\alpha$ -Emitter, Long-lived Radioisotopes



$\alpha$ - Emitter kommen nur bei schweren Massen vor  $A > 145$

Elze 73

## Natürliche $\alpha$ -Zerfallsketten

### Natürliche Radioaktivität

Bei der Synthese der Elemente (vor etwa  $15 \cdot 10^9$  Jahren) wurden viele radioaktive Elemente erzeugt. Nur wenige haben bis heute auf Grund ihrer langen Lebensdauer überlebt. Die schwersten davon sind  $^{232}\text{Th}$ ,  $^{235}\text{U}$  und  $^{238}\text{U}$ . Sie bilden den Ausgangspunkt von Zerfallsreihen. Es gibt insgesamt vier  $\alpha$ -Zerfallsreihen, die vom jeweiligen Mutterkern über mehrere Zwischenkerne zu einem stabilen Endkern führen.

Reihe	Mutterkern	$T_{1/2}$ (Jahre)	Endkern
Thorium	$^{232}\text{Th}$	$1.4 \cdot 10^{10}$	$^{208}\text{Pb}$
Neptunium *	$^{237}\text{Np}$	$2.1 \cdot 10^6$	$^{209}\text{Bi}$
Uran	$^{238}\text{U}$	$4.5 \cdot 10^9$	$^{206}\text{Pb}$
Actinium	$^{235}\text{U}$	$7.0 \cdot 10^8$	$^{207}\text{Pb}$

\* Die Neptunium-Reihe kommt in der Natur wegen der kurzen Lebensdauer von  $^{237}\text{Np}$  nicht vor. Neptunium wird jedoch künstlich hergestellt.

# Natürliche $\alpha$ -Zerfallsketten II

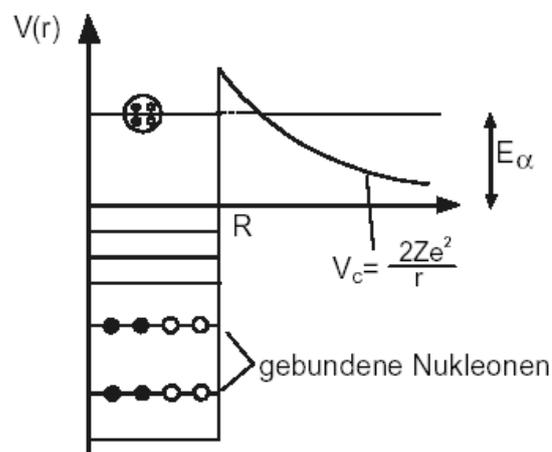
Da sich bei einem  $\alpha$ -Zerfall die Nukleonenzahl um 4 ändert, bei  $\beta$ -Zerfällen nicht, gibt es bei den schweren Elementen 4 relevante Zerfallsketten:

A	Reihe	Mutterkern	Endkern	$t_{1/2}$
4n	Thorium	$^{232}\text{Th}$	$^{208}\text{Pb}$	$1.40 \cdot 10^{10} \text{ a}$
4n+1	<i>Neptunium</i>	$^{237}\text{Np}$	$^{209}\text{Bi}$	$2.14 \cdot 10^6 \text{ a}^1$
4n+2	Uranium	$^{238}\text{U}$	$^{206}\text{Pb}$	$4.47 \cdot 10^9 \text{ a}$
4n+3	Aktinium	$^{235}\text{U}$	$^{207}\text{Pb}$	$7.04 \cdot 10^8 \text{ a}$

1) Kommt nicht vor in der Natur. Ist bereits zerfallen

Elze 75

## $\alpha$ -Zerfall durch Tunneleffekt I



# $\alpha$ -Zerfall durch Tunneleffekt II

Bildliche Vorstellung: Die komplexe Bewegung der Nukleonen im Kern führt häufig zur Bildung  $\alpha$ -ähnlicher Strukturen am Kernrand, wobei die Bindungsenergie des  $\alpha$ -Teilchens frei wird und dieses in einen energetisch höheren Zustand bringen kann. Aus diesem Zustand heraus kann es die Potentialbarriere durchtunneln.

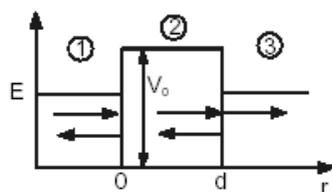
Die Zerfallswahrscheinlichkeit lässt sich schreiben als  $\lambda = \lambda_0 T$ , wobei  $\lambda_0$  die Wahrscheinlichkeit für die Bildung des  $\alpha$ -Teilchens ist und  $T$  die Transmission durch die Barriere. Die Transmission ist definiert als die Zahl der erfolgreichen Durchdringungsversuche durch den Potentialwall, dividiert durch die Gesamtzahl der Durchdringungsversuche. Bezeichnen wir mit  $j_e$  die auf die Barriere einfallende und mit  $j_a$  die an der anderen Seite der Barriere austretende Stromdichte, dann ergibt sich für die Transmission

$$T = \frac{j_a}{j_e} = \frac{|u_a|^2 \cdot v_a}{|u_e|^2 \cdot v_e} = \frac{|u_a|^2 \cdot k_a}{|u_e|^2 \cdot k_e}$$

Hierbei ist  $u(r) = r \psi(r)$  die Radial-Wellenfunktion.

Der Transmissionskoeffizient  $T$  lässt sich für eine Rechteckbarriere (eindimensional) wie folgt berechnen (Gamow, 1928). Wir lösen die Schrödingergleichung für die Bereiche 1, 2 und 3.

# $\alpha$ -Zerfall durch Tunneleffekt III



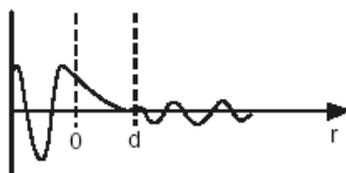
$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] \cdot u(r) = 0$$

Lösung: Bereich 1:  $u_1 = A_1 \cdot e^{ik_1 r} + B_1 \cdot e^{-ik_1 r}$   $k_1^2 = \frac{1}{\hbar^2} \cdot 2mE$

Bereich 2:  $u_2 = A_2 \cdot e^{ik_2 r} + B_2 \cdot e^{-ik_2 r}$   
 $= A_2 \cdot e^{-\kappa_2 r} + B_2 \cdot e^{\kappa_2 r}$   $k_2^2 = \frac{1}{\hbar^2} \cdot 2m(E - V_0) = -\kappa_2^2 < 0$

Bereich 3:  $u_3 = A_3 \cdot e^{ik_3 r}$   $k_3^2 = k_1^2$

Die Stetigkeitsbedingungen an den Stellen  $r = 0$  und  $r = d$  lauten:



$$u_1(0) = u_2(0) \quad u_1'(0) = u_2'(0)$$

$$u_2(d) = u_3(d) \quad u_2'(d) = u_3'(d)$$

Bei  $u_e$  ist nur der einlaufende Teil der Wellenfunktion anzusetzen. Somit ergibt sich für die Transmission

$$T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$$

# $\alpha$ -Zerfall durch Tunneleffekt IV

Unter Benutzung der Stetigkeitsbedingungen erhält man schließlich

$$T = \left\{ 1 + \frac{V_0^2}{V_0^2 - (2E - V_0)^2} \cdot \sinh^2(\kappa_2 d) \right\}^{-1}$$

Für den Grenzfall einer „dicken“ Barriere ( $d \gg \lambda_2 = \frac{1}{\kappa_2}$ ) erhält man

$$T \rightarrow 4 \cdot \frac{V_0^2 - (2E - V_0)^2}{V_0^2} \cdot e^{-2\kappa_2 d} \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \cdot \sqrt{2m(V_0 - E)} \cdot d\right]$$

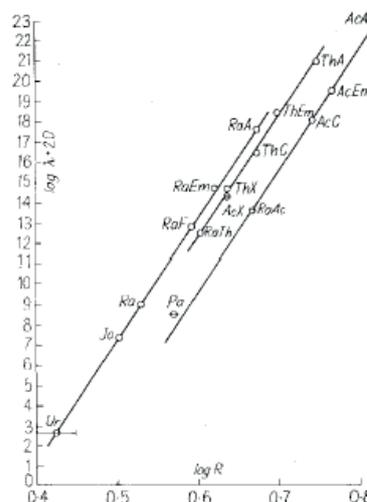
und für eine Barriere beliebiger Form

$$T \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_0^d \sqrt{2m(V(r) - E)} dr\right]$$

Die Lösung des dreidimensionalen Problems ergibt das gleiche Ergebnis.

## Halbwertszeiten für $\alpha$ -Zerfall

$\log \lambda = a + b \log R$  ( $R$  = Reichweite in Luft)



[Rut 30]

Die Häufigkeit der Vorbildung eines  $\alpha$ -Teilchens im Kern wird abgeschätzt zu etwa  $\lambda_0 \approx 10^{21} \text{ sec}^{-1}$ .

# $\alpha$ -Zerfall : Gamow-Faktor

$T \sim e^{-G}$       G: Gamow-Faktor

$$G = \frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m[V(x) - E]} \quad dx$$

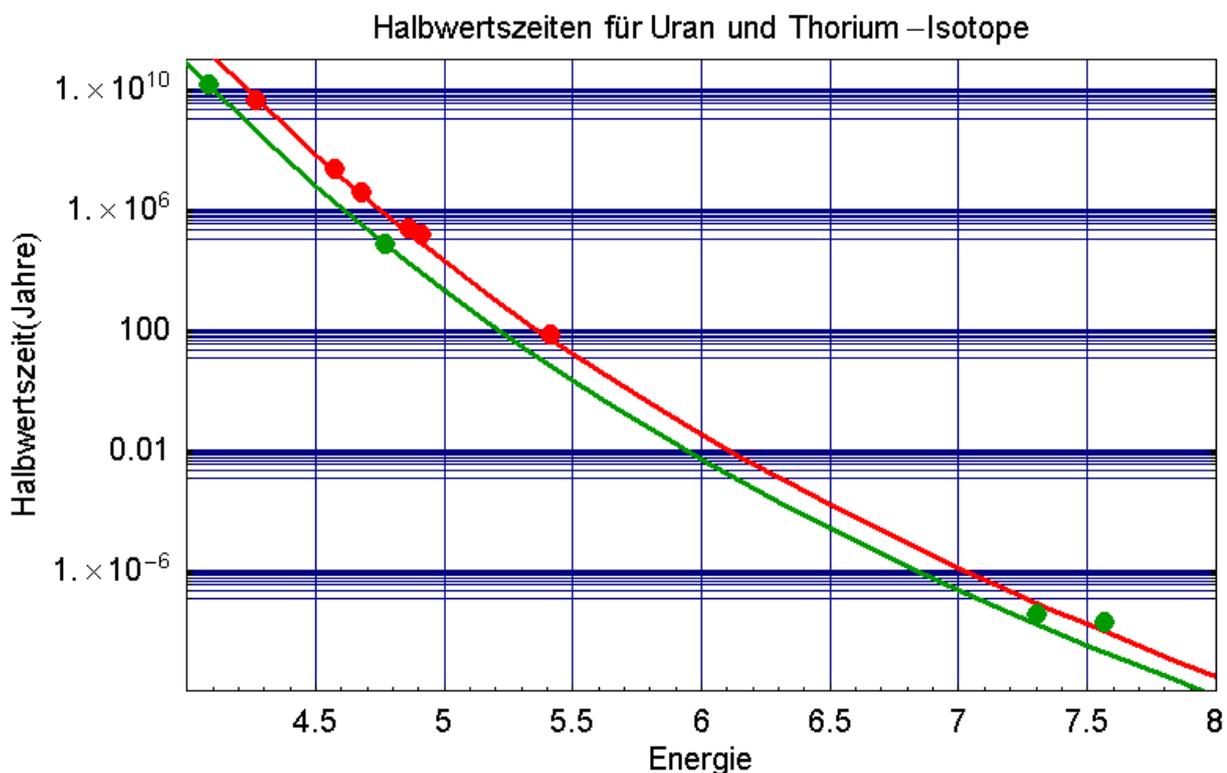
$$G = \frac{2}{\hbar} \int_{a=R}^b \sqrt{2m \left[ \frac{z_b z_t \alpha \hbar c}{r} - E \right]} \quad dr$$

$$G = \sqrt{\frac{8mc^2 z_b z_t \alpha b}{\hbar c}} \left( \arccos \sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}} \right)$$

Gute Näherungsformel:

$${}^{10} \lg t_{1/2} \cong 1.6 \left( \frac{Z}{\sqrt{E}} - Z^{2/3} \right) - 28.9 \quad \begin{array}{l} T_{1/2} \text{ in Jahren} \\ E \text{ in MeV} \end{array}$$

## Halbwertszeiten für Uran- und Thoriumisotope



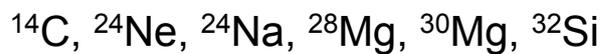
Durch eine Energieänderung von 4 auf 7.5 MeV ändert sich die Halbwertszeit um mehr als 16 Größenordnungen !

# Clusterzerfälle

Neben  $\alpha$ -Teilchen können in Zerfällen auch andere Kerne mit ( $40 > z > 4$ ) emittiert werden. Diese Zerfälle werden Clusterzerfälle genannt. Der Prozess kann analog zum  $\alpha$ -Zerfall (Tunneleffekt) erklärt werden. Die Wahrscheinlichkeit ( $\lambda_c$ ) ist aber sehr klein:

$$\lambda_c / \lambda_\alpha < 10^{-10}$$

Die emittierten Kerne haben immer einen Neutronenüberschuss und sind meist auch wieder radioaktiv z. B:



## Beispiele von Clusterzerfällen

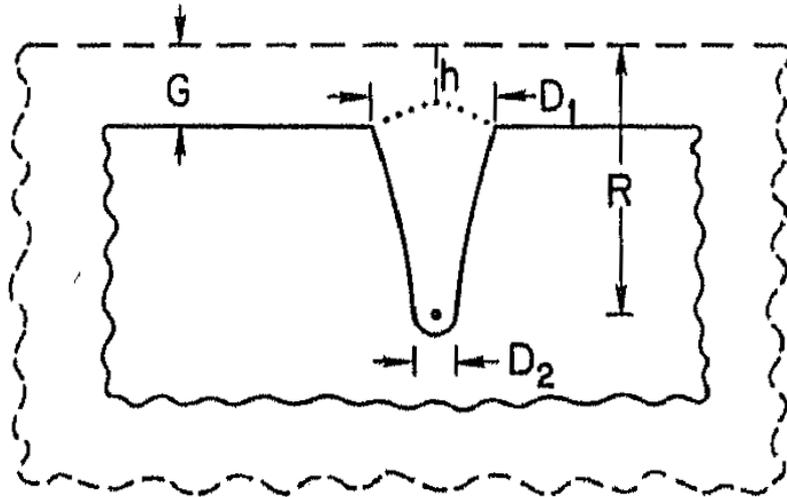
Zerfall	$\lambda_c / \lambda_\alpha$	Energie
$^{222}\text{Ra} \rightarrow ^{208}\text{Pb} + ^{14}\text{C}$	$(3.7 \pm 0.6) \times 10^{-10}$	31 MeV
$^{224}\text{Ra} \rightarrow ^{210}\text{Pb} + ^{14}\text{C}$	$(4.3 \pm 1.2) \times 10^{-11}$	29 MeV
$^{231}\text{Pa} \rightarrow ^{208}\text{Pb} + ^{23}\text{F}$	$1.8 \times 10^{-13}$	
$^{230}\text{U} \rightarrow ^{208}\text{Pb} + ^{22}\text{Ne}$	$(4.8 \pm 2.0) \times 10^{-14}$	
$^{232}\text{U} \rightarrow ^{208}\text{Pb} + ^{24}\text{Ne}$	$(2.0 \pm 0.5) \times 10^{-12}$	53 MeV
$^{238}\text{Pu} \rightarrow ^{204}\text{Hg} + ^{34}\text{Si}$	$\sim 5 \times 10^{-17}$	
$^{242}\text{Cm} \rightarrow ^{208}\text{Pb} + ^{34}\text{Si}$	$1.0 \times 10^{-16}$	80 MeV

Der Endkern liegt meist in der Nähe von abgeschlossenen Schalen  $Z = 82, N = 126$

# Messmethode

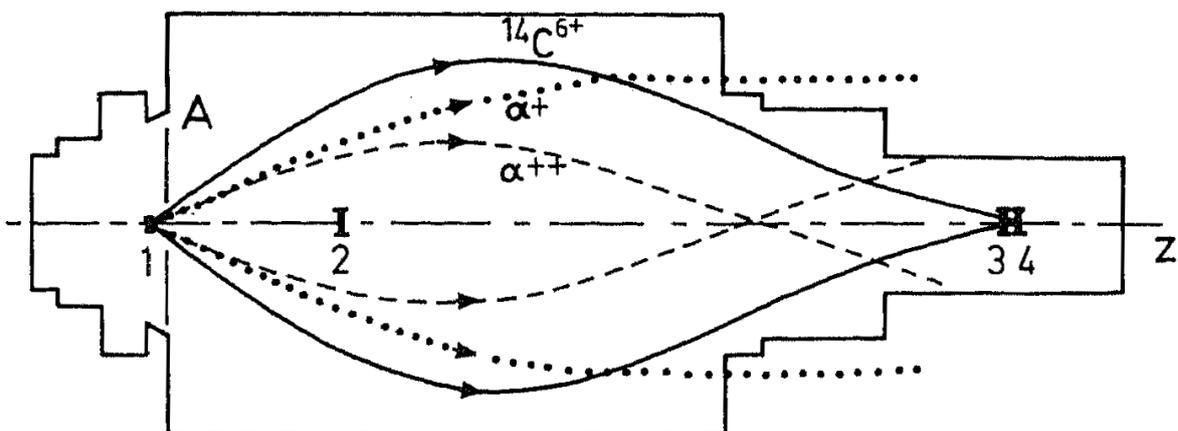
Spuren von Schwere Teilchen in einem Plastik- oder Glasdetektor mit bestimmter Ionisationsempfindlichkeit

→ „Belichtung“ → Chem. Ätzen → Auslesen des Films



# Messmethode

- 1. Spektrometer + Detektoren  
Empfindlichkeit  $\sim 10^{-11}$  rel. zu  $\alpha$



# Massenverteilung Cluster-Zerfälle

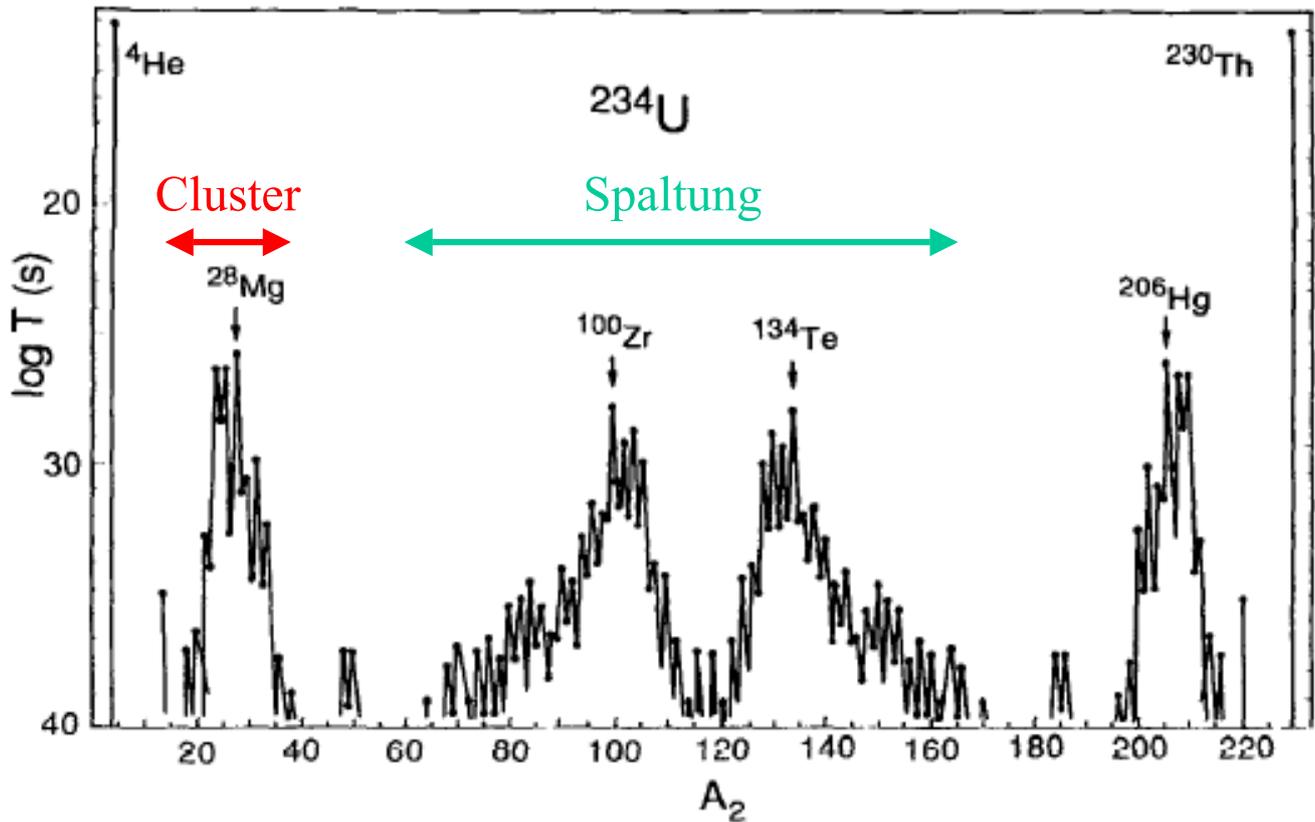


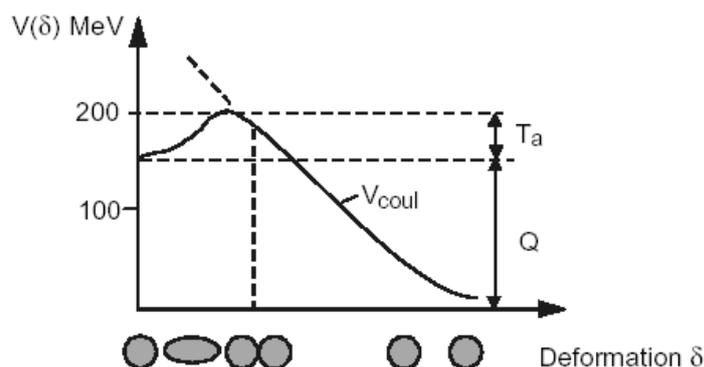
Figure 6 Partial half-lives for alpha decay, heavy-particle radioactivity, and cold fission of  $^{234}\text{U}$  (33).

Elze 78

## Spontane Spaltung

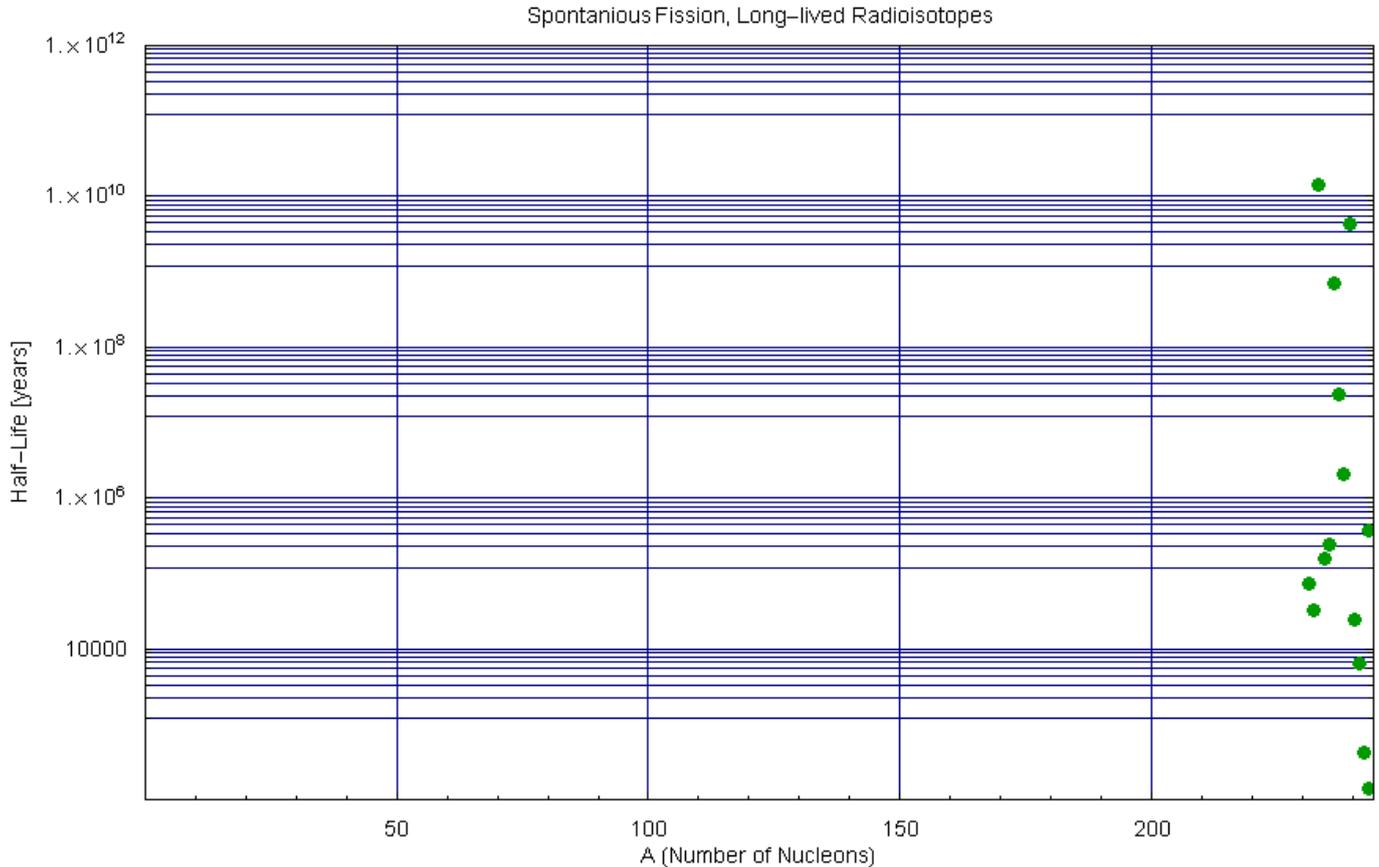
### 3.3 Spontane Kernspaltung

Neben dem  $\alpha$ -Zerfall wird bei den schwersten Kernen auch die spontane Spaltung in zwei Bruchstücke beobachtet. Die Halbwertszeiten gegenüber Spaltung reichen von Tagen bis zu über  $10^{21}$  Jahre. Die formale Beschreibung der Spaltung verläuft analog zum  $\alpha$ -Zerfall: Durchdringung einer Potentialbarriere, hier der Spaltbarriere. Der physikalische Vorgang ist jedoch gänzlich anders. Die Spaltung kommt durch eine Einschnürung der Kernoberfläche zustande (dynamische Instabilität). Die Spaltbarriere ist bestimmt durch eine delikates Gleichgewicht zwischen Oberflächen- und Coulombenergie.



Im Bild ist die potentielle Energie in Abhängigkeit von der Deformation des Kerns gezeigt. Für sehr kleine Werte der Aktivierungsenergie  $T_a$  kann Spontanspaltung eintreten (Durchtunneln der Barriere). Für größere Werte von  $T_a$  ist nur induzierte Spaltung möglich ( $T_a$  muß aufgebracht werden).

# Kerne die spontan spalten



Nur für Kerne mit Masse  $A > 230$  findet man spontane Spaltung

## Kernspaltung

Bei der Kernspaltung unterscheidet man zwischen:

- 1) Spontaner Spaltung ("Spontaneous Fission s.f.")
- 2) Induzierter Spaltung ("Induced Fission")

Spontane Spaltung kommt in der Natur bei Uran und Thorium vor und existiert parallel zum  $\alpha$ -Zerfall. Ein nur sehr kleiner Anteil zerfällt durch Spaltung:

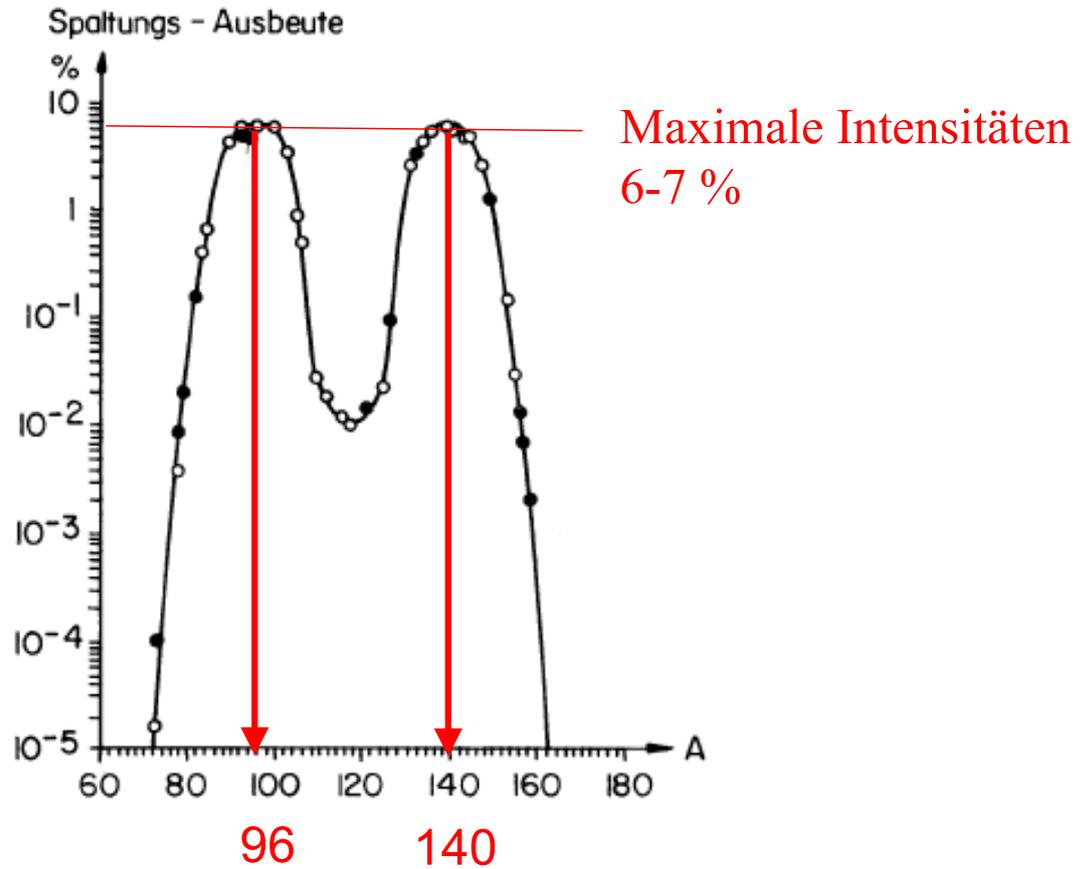
$${}^{232}\text{Th} : \lambda_{\text{sf}}/\lambda_{\alpha} = 1 \cdot 10^{-9}$$

$${}^{235}\text{U} : \lambda_{\text{sf}}/\lambda_{\alpha} = 7 \cdot 10^{-9}$$

$${}^{238}\text{U} : \lambda_{\text{sf}}/\lambda_{\alpha} = 5 \cdot 10^{-5}$$

Bei der induzierte Spaltung wird die Spaltung durch Neutronen induziert

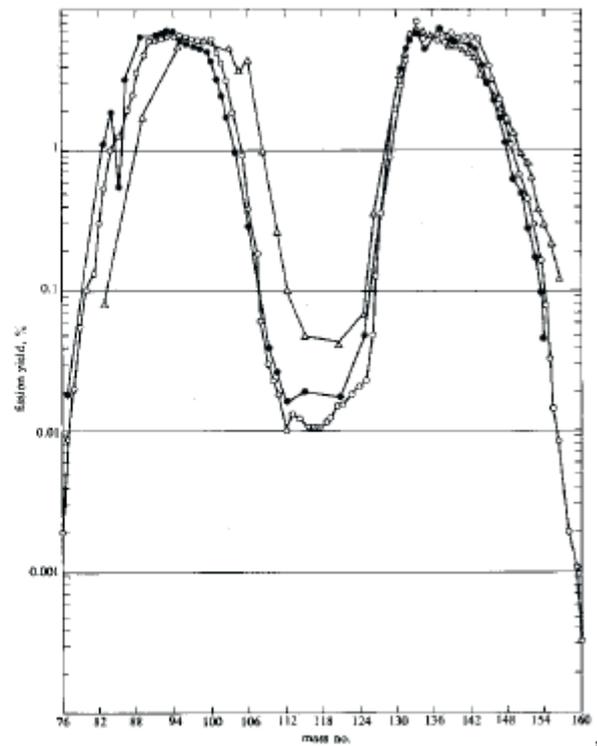
# Asymmetrische Massenverteilung



Elze 78

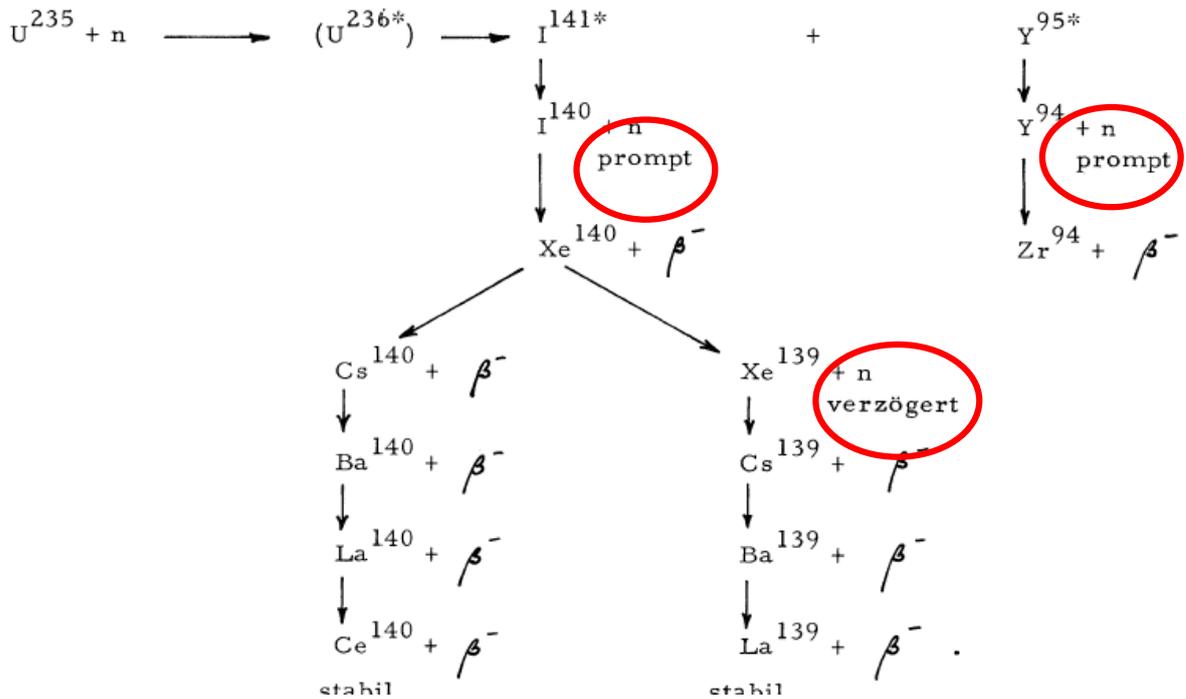
# Asymmetrische Massenverteilung

Massenverteilungen  
der Spaltprodukte nach der  
induzierten Spaltung  
von  $^{233}\text{U}$ ,  $^{235}\text{U}$  und  $^{239}\text{Pu}$



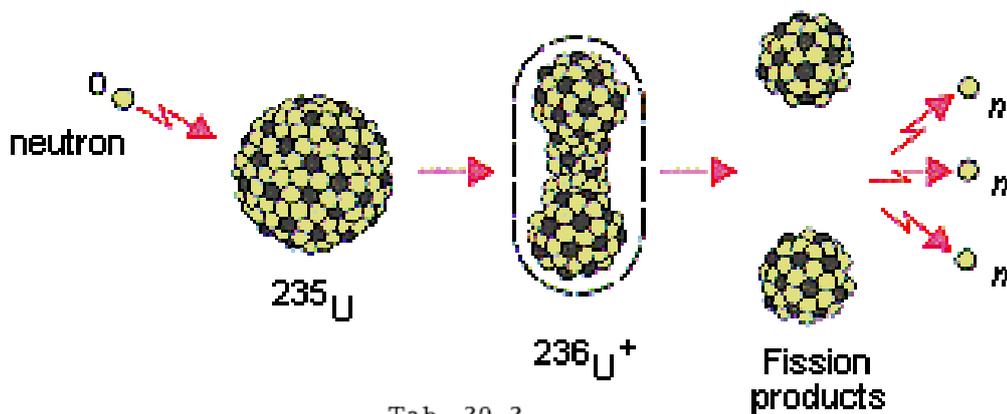
aus [Seg77]

# Beispiel einer Spaltung



Bei einer Spaltung entstehen 2-3 Neutronen, einzelne sind verzögert

# Induzierte Spaltung



Wirkungsquerschnitte	$\text{U}^{235}$	$\text{U}^{238}$	Natürliches U	$\text{Pu}^{239}$
Langsame Spaltung: $\sigma(n_{th}, f)$	549 b	0 b	3,9 b	664 b
Neutroneneinfang: $\sigma(n, \gamma)$	101	2,8	3,5	361
Streuung: $\sigma(n, n)$	8,2	8,2	8,2	-

# Energien bei der Spaltung von $^{235}\text{U}$

Kinetic energy of fission fragments	167 MeV
Prompt ( $< 10^{-6}$ s) gamma ray energy	8
Kinetic energy of fission neutrons	8
Gamma ray energy from fission products	7
Beta decay energy of fission products	7
Energy as antineutrinos ( $\bar{\nu}_e$ )	7
<hr/>	
TOTAL	204

The average energy distribution for the energy released per fission with a thermal neutron in uranium-235

## **Instantaneous Energy from Fission**

Kinetic Energy of Fission Products	167 MeV
Energy of Fission Neutrons	5 MeV
Instantaneous Gamma-ray Energy	5 MeV
Capture Gamma-ray Energy	10 MeV

---

Total Instantaneous Energy 187 MeV

## **Delayed Energy from Fission**

Beta Particles From Fission Products	7 MeV
Gamma-rays from Fission Products	6 MeV
Neutrinos	10 MeV

---

Total Delayed Energy 23 MeV

**TOTAL 220 MeV**

**Table 1. Distribution of Fission Energy in units of MeV**

Kinetic energy of fission fragments	165±5
Instantaneous gamma-ray energy	7±1
Kinetic energy of fission neutrons	5±0.5
Beta particles from fission products	7±1
Gamma rays from fission products	6±1
Neutrinos from fission products	10
Total energy per fission	200±6

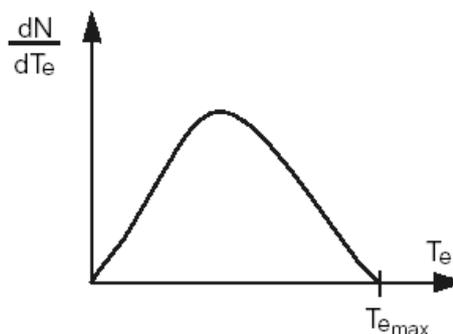
**Table 2** shows the comparison of fission energy, per mass, with the energy of TNT. Note that if one could have fissioned ALL of the uranium in the Hiroshima bomb, extrapolation from 56 grams/KT to over 50 kilograms would have resulted in a megaton explosion.

Elze 80

## β-Zerfälle

### 3.4 Der Beta-Zerfall

Im Gegensatz zum  $\alpha$ -Zerfall besitzen die beim  $\beta$ -Zerfall emittierten Elektronen oder Positronen ein kontinuierliches Energiespektrum. Dies hat zu Schwierigkeiten bei der Deutung geführt:



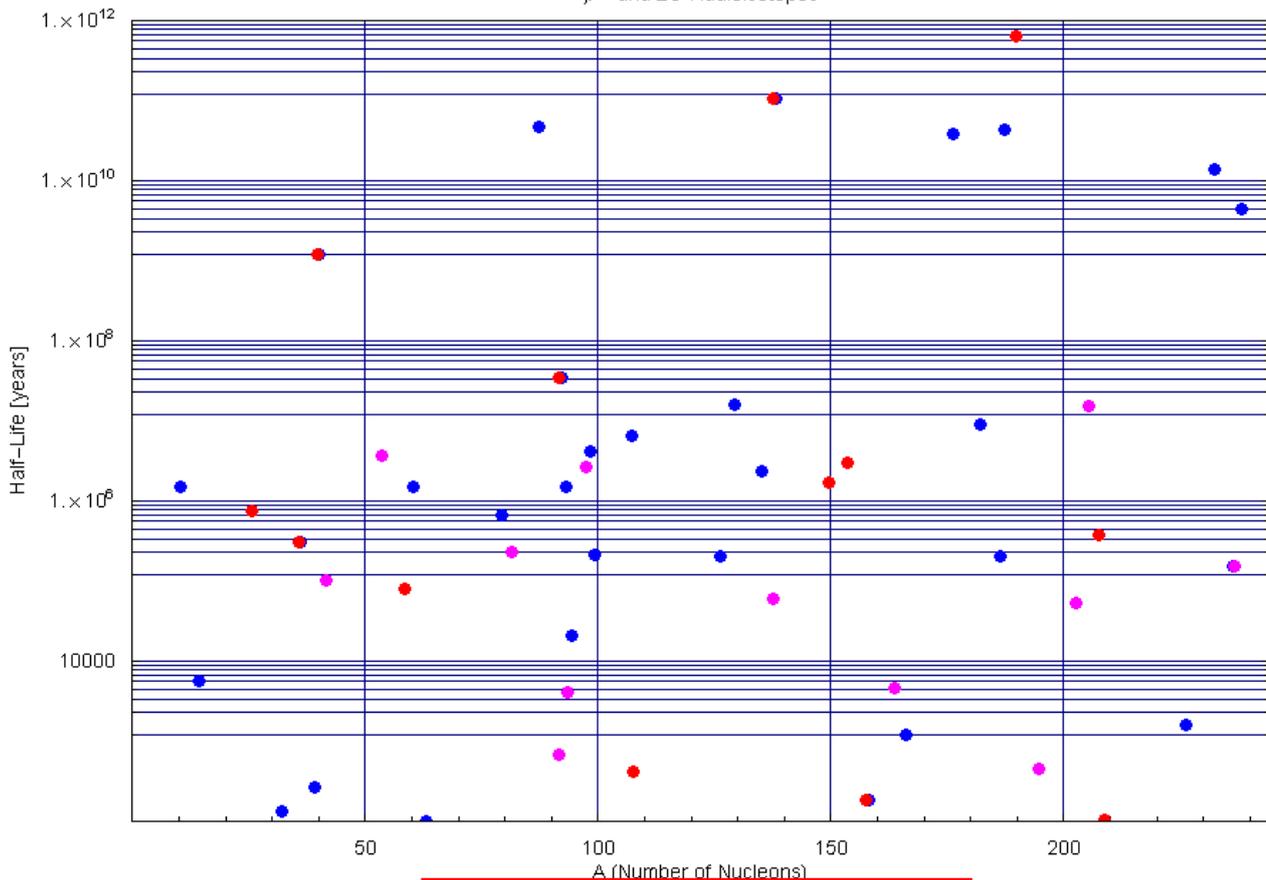
a) Energiebilanz: Mutter- und Tochterkern haben definierte Masse (=Energie). Daher sollte auch die Zerfallsstrahlung definierte Energie haben.

b) Drehimpulsbilanz: Mutter- und Tochterkern haben beide entweder ganz- oder halbzahligen Spin. Die emittierte Strahlung sollte daher stets ganzzahligen Spin oder bei  $l=0 \rightarrow l=0$ -Übergängen keinen Spin haben. Elektron und Positron haben aber den Spin  $1/2 \hbar$ .

Der Ausweg aus dieser Schwierigkeit wurde von Pauli 1936 durch die Neutrino-Hypothese aufgezeigt. Pauli forderte, daß neben der Emission von Elektron oder Positron eine weitere Strahlung auftritt, die Energie und Impuls besitzt, keine Ladung trägt, kein magnetisches Moment besitzt, Spin  $1/2 \hbar$  und Ruhemasse  $\approx 0$  hat. Diese Strahlung soll sich mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegen. Alle diese Eigenschaften wurden einem bis dahin unbekanntem Teilchen, dem Neutrino, zugeschrieben.

# Langlebige $\beta$ -Emitter

$\beta^+$  and EC Radioisotopes



Alle Massen sind möglich !

Elze 82

## Zerfallstypen von $\beta$ -Zerfällen

### Zerfallstypen und Energieverhältnisse

Innerhalb einer Isobarenreihe tritt immer dann ein  $\beta$ -Zerfall auf, wenn es einen Nachbar-kern geringerer Masse gibt.

Es gibt 3 Möglichkeiten:

#### 1. $\beta^-$ -Zerfall (Negatronenzерfall)

$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} + 0.78 \text{ MeV}$ . Der Zerfall des freien Neutrons erfolgt mit einer Halbwertszeit von  $T_{1/2} \approx 13 \text{ min}$ .

#### 2. $\beta^+$ -Zerfall (Positronenzерfall)

$p \rightarrow n + e^+ + \nu - 1.80 \text{ MeV}$ . Dieser Zerfall tritt nur bei gebundenen Protonen auf. Das freie Proton ist stabil.

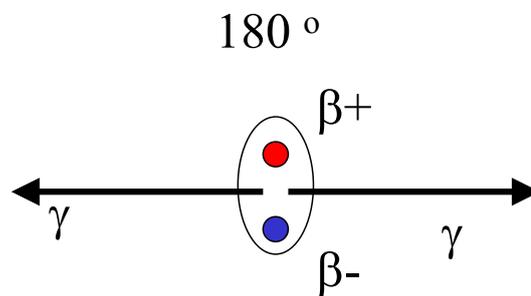
#### 3. Elektroneneinfang (zumeist K-Einfang)

$p + e^- \rightarrow n + \nu - 0.78 \text{ MeV}$ . Der Elektroneneinfang tritt häufig zusammen mit dem Positronenzерfall auf.

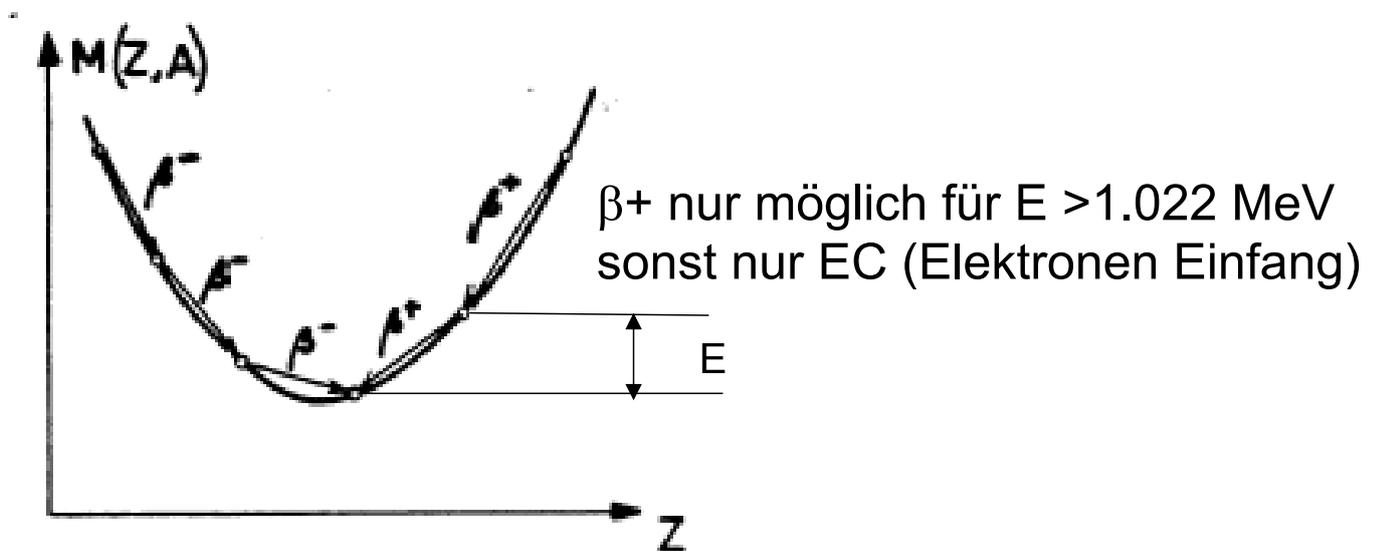
# Positronen

$\beta^-$ :	Elektron
$\beta^+$ :	Positron
$\beta^+$ :	Antiteilchen von Elektronen
Masse:	$M^- = M^+ = 511 \text{ keV}/c^2$
Ladung:	$q^- = -q^+$
Spin:	$1/2$

Wenn ein Positron auf ein Elektron trifft verschwindet das Positron und Elektron. Es entstehen 2  $\gamma$ -Quanten mit je einer Energie von 511 keV (Annihilation)



## $\beta^+$ -Zerfälle und Elektroneneinfang



# Fermitheorie des $\beta$ -Zerfalls

## Fermi-Theorie des „erlaubten“ $\beta$ -Zerfalls

Beim  $\beta$ -Zerfall sind Halbwertszeit und Energieverteilung der emittierten Elektronen oder Positronen direkt meßbar. Daher wird versucht, zunächst diese Größen theoretisch zu reproduzieren. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron (Positron) mit dem Impuls  $p$  emittiert wird. Bei gegebener Zerfallsenergie ist die Neutrinoenergie durch die Elektronen- (Positronen-) Energie festgelegt.

Mittels einer zeitabhängigen quantenmechanischen Störungsrechnung ergibt sich für die Zerfallswahrscheinlichkeit (goldene Regel):

$$\lambda_{\beta} = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \left| \langle f | \hat{H}_{\beta} | i \rangle \right|^2 \cdot \frac{dn}{dE_{\beta}}$$

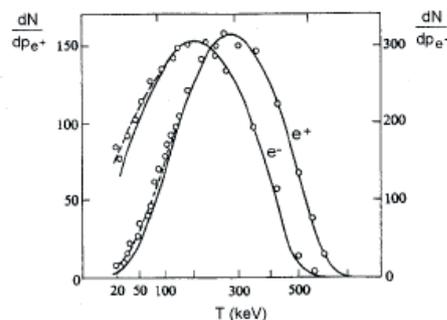
Hierbei ist  $\langle f | \hat{H}_{\beta} | i \rangle = \int \Psi_f^* \cdot \hat{H}_{\beta} \cdot \Psi_i \, d\tau = H_{fi}$  das Matrixelement des Operators, der den Anfangszustand  $|i\rangle$  in den Endzustand  $|f\rangle$  überführt, und  $dn/dE_{\beta}$  die Dichte der erreichbaren Endzustände.

# Fermitheorie des $\beta$ -Zerfalls

Eine genauere Betrachtung zeigt, daß die Elektronenwellenfunktion  $\Psi_e$  durch das Coulombfeld des Kerns modifiziert wird. Wir ersetzen  $|\Psi_e|^2$  durch  $F(Z, T_e) |\Psi_e|^2$ , wobei der Korrekturfaktor (Fermi-Funktion) die Verzerrung der ebenen Wellen im Coulombfeld des Kerns berücksichtigt. Wir erhalten somit für die Anzahl der im Impulsintervall  $dp_e$  emittierten Elektronen

$$\frac{dN}{dp_e} \propto F(Z, T_e) \cdot p_e^2 \cdot (E_{\beta} - T_e)^2$$

Die Form des  $\beta$ -Spektrums zeigt den Einfluß des Coulomb-Feldes.



aus [Seg77]

# Fermitheorie des $\beta$ -Zerfalls

## Integrale Zerfallswahrscheinlichkeit: $ft$ -Wert

Wir schreiben den Ausdruck für  $\lambda_\beta$  so um, daß  $p_e$  in Einheiten von  $m_e c$  und die Energien in Einheiten von  $m_e c^2$  angegeben werden. Die Zerfallswahrscheinlichkeit ergibt sich dann zu

$$\lambda_\beta = g^2 \cdot |M_{fi}|^2 \frac{m_e^5 \cdot c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \int_0^{p_{e\max}} F(Z, T_e) \frac{p_e^2}{m_e^2 \cdot c^2} \frac{(E_\beta - T_e)^2}{m_e^2 \cdot c^4} \frac{dp_e}{m_e \cdot c}$$

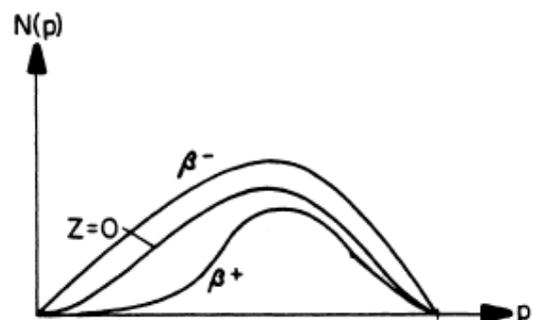
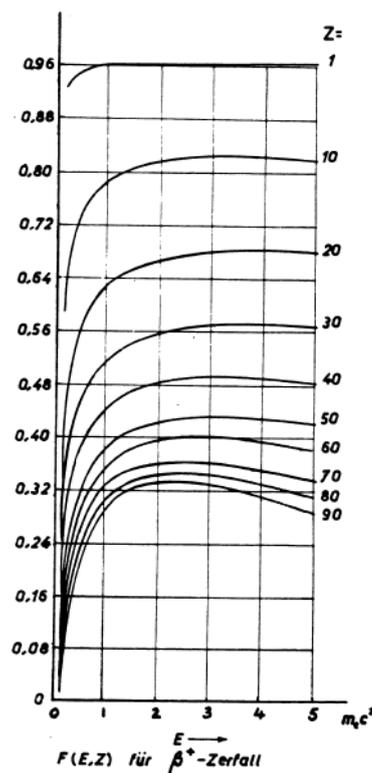
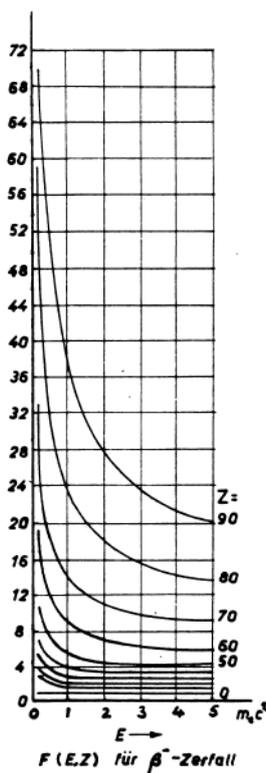
$f(Z, \frac{E_\beta}{m_e c^2}) \leftarrow$  tabelliert

Das Integral wird abgekürzt geschrieben als  $f(Z, E_\beta/m_e c^2)$ . Werte dieser Funktion finden sich in Tabellen.

Somit ist

$$\lambda_\beta = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \text{const} \cdot |M_{fi}|^2 \cdot f$$

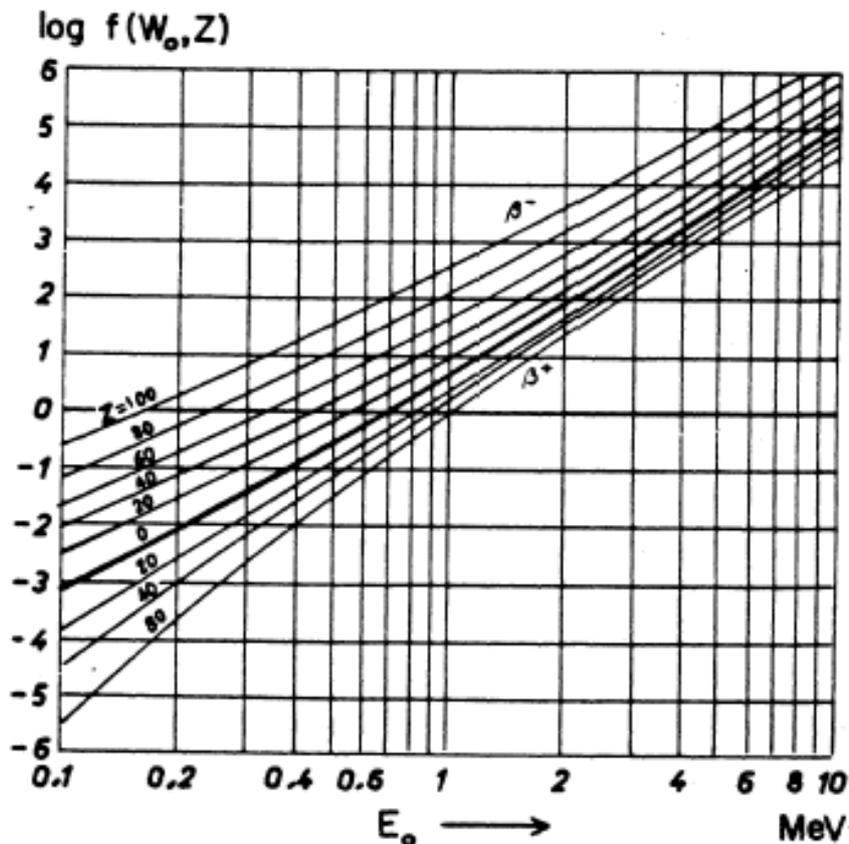
## Fermifunktion $F(z, T_e)$



# Integrierte Fermifunktion $f(z, E_\beta)$

$$\lambda \sim f(z, E) \sim E^5$$

$$T_{1/2} \sim E^{-5}$$



Elze 87

## Einteilung der $\beta$ -Zerfälle

oder der sog.  $ft$ -Wert  $f \cdot T_{1/2} = \frac{\text{const}}{|M_{fi}|^2}$

Der  $ft$ -Wert ist also ein Maß für das Kernmatrixelement.

Dies gilt zunächst nur für den erlaubten  $\beta$ -Zerfall. Berechnet man  $ft$ -Werte allgemein nach dieser Vorschrift, so lassen sich die  $\beta$ -Zerfälle in Gruppen einteilen:

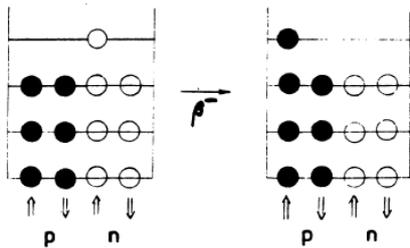
1.  $\log ft = 2.9 - 3.7$  „übererlaubte“ Zerfälle,  $|M_{fi}|^2 \approx 1$
2.  $\log ft = 4.4 - 6$  „erlaubte“ Zerfälle,  $|M_{fi}|^2 < 1$
3.  $\log ft > 6$  „verbotene“ Zerfälle,  $|M_{fi}|^2 \ll 1$ .

Bei den übererlaubten Zerfällen herrscht „vollständiger Überlapp“ der Kernwellenfunktionen (Spiegelkerne, analoge Kerne), d.h. die Nukleononkonfiguration ist im Endzustand die gleiche wie im Anfangszustand. Es wandelt sich lediglich ein Neutron in ein Proton um, oder umgekehrt. Daher ist auch der Zerfall des freien Neutrons „übererlaubt“.

### Auswahlregeln für erlaubte $\beta$ -Zerfälle:

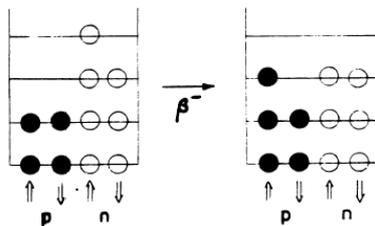
- a) Spin-Singulett; Fermi-Übergang;  $\Delta I = 0$ ,  $\pi_i = \pi_f$ ,
- b) Spin-Triplett; Gamow-Teller-Übergang;  $\Delta I = 0, 1$  (jedoch nicht  $0 \rightarrow 0$ ),  $\pi_i = \pi_f$ .

Sofern es die Auswahlregeln zulassen, setzt sich das Kernmatrixelement bei erlaubten Übergängen aus einem Fermi- und einem Gamow-Teller-Anteil zusammen.



Übererlaubte Übergänge

$$\Delta l = 0, 1$$



Erlaubte Übergänge

$$\Delta l \geq 0, 1$$

Elze 87

## "Verbotene" $\beta$ -Übergänge

### Verbotene Übergänge

Verbotene Übergänge sind solche, bei denen Elektron und Neutrino mit Bahndrehimpuls  $\ell \neq 0$  emittiert werden. Mit zunehmendem  $\ell$  wird die Elektronen- und Neutrinowellenfunktion am Ursprung stark unterdrückt, und die Zerfallswahrscheinlichkeit nimmt stark ab.

Es ergeben sich folgende Auswahlregeln:  $\Delta l = \ell + 1 = n + 1$  ( $n$  = Verboteneitsgrad)

$$\pi_i \cdot \pi_f = (-1)^\ell$$

$$\Delta l = 1, 2, 3, 4$$

# Elektroneneinfang (EC)

Der Elektroneneinfang lässt sich als ein zur  $\beta^+$ -Emission analoger Prozess beschreiben:



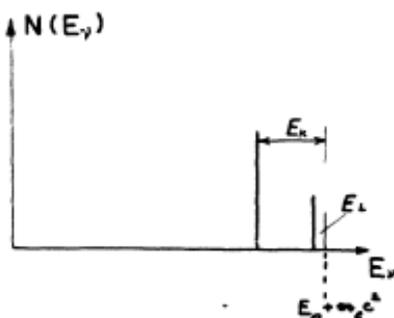
Die emittierten Neutrinos sind hierbei monochromatisch; ihre Energie ist

$$E_\nu = E_0 - E_B \quad (10.58)$$

wobei  $E_0$  die aus der Massendifferenz der Kerne verfügbare Zerfallsenergie und  $E_B$  die Bindungsenergie des Elektrons in seiner betreffenden Schale vor dem Einfang ist.

## Elektroneneinfang

Neutrino Energiespektrum:  
monoenergetisch



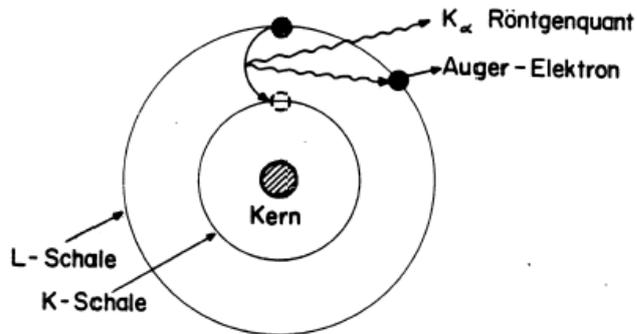
Eine Berechnung des  $\beta$ -Spektrums ist beim reinen Elektroneneinfang gegenstandslos. Die Zerfallskonstante bzw. die Lebensdauer lässt sich jedoch in der gleichen Weise wie bei den anderen

$\beta$ -Zerfällen berechnen:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{if}|^2 \frac{d\omega}{dE_\nu}$$

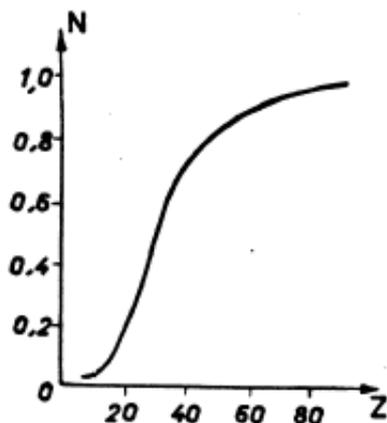
# Nachweis des Elektroneneinfangs (EC)

Beim Elektroneneinfang (EC) entsteht eine Elektronenlücke in einer inneren Schale des neu entstandenen Atoms. Dieses angeregte Atom zerfällt dann unter Emission von **charakteristischer Röntgenstrahlung** oder durch Emission von Auger-Elektronen.



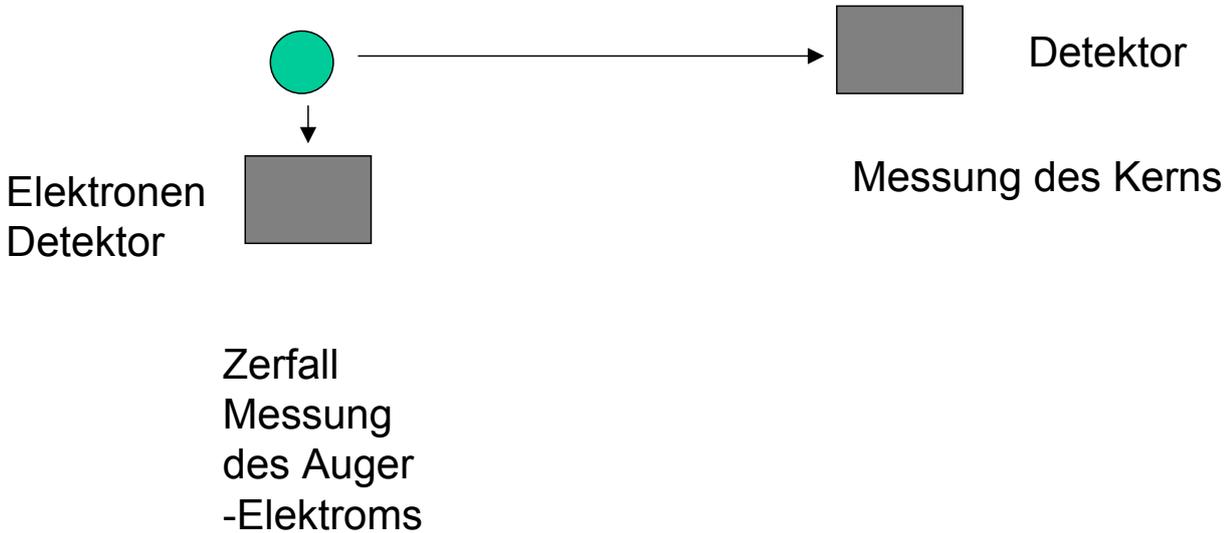
Beim Augereffekt wird die frei werdene Energie nicht mit einem Photon abgestrahlt sondern einem äusseren Elektron übertragen, das dann emittiert wird.

Die Anzahl der emittierten Photonen  $N_{\gamma}$  pro Lücke in der K-Schale (K FLUORESCENCE YIELD) ist in seiner empirischen Abhängigkeit von  $Z$  in Fig. 3.10 wiedergegeben.



# Indirekter Nachweis des Neutrinos beim EC

Beim EC wird die Zerfallsenergie primär dem Neutrino übertragen. Wegen der Impulserhaltung, erhält der Kern eine kleine Rückstossenergie. Diese Energie kann durch eine Flugzeitmessung nachgewiesen werden. Als Startsignal dient das beim Zerfall emittierte Augerelektron

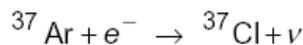


Elze 87

## Indirekter Nachweis des Neutrinos

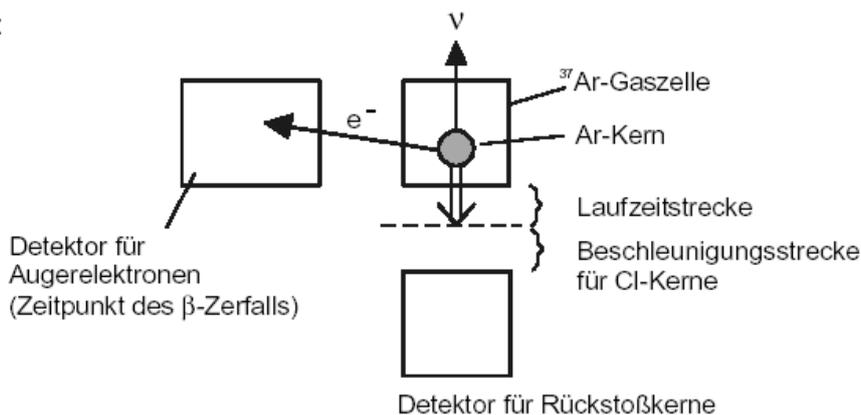
### Indirekter Nachweis durch Rückstoßmessungen:

Da Neutrinos Energie und Impuls tragen, können sie auf Atomkerne einen Rückstoß ausüben. Zum Neutrinonachweis ist die Elektroneneinfang-Reaktion geeignet



Da das Elektron im Atom verbleibt, übt es keinen Rückstoß aus, so daß der viel kleinere Neutrinorückstoß gemessen werden kann. Da ein Elektron definierter Energie eingefangen wird, hat auch das Neutrino eine feste Energie.

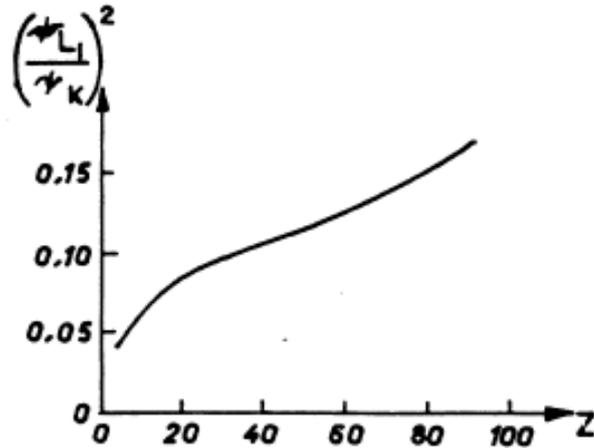
Experiment:



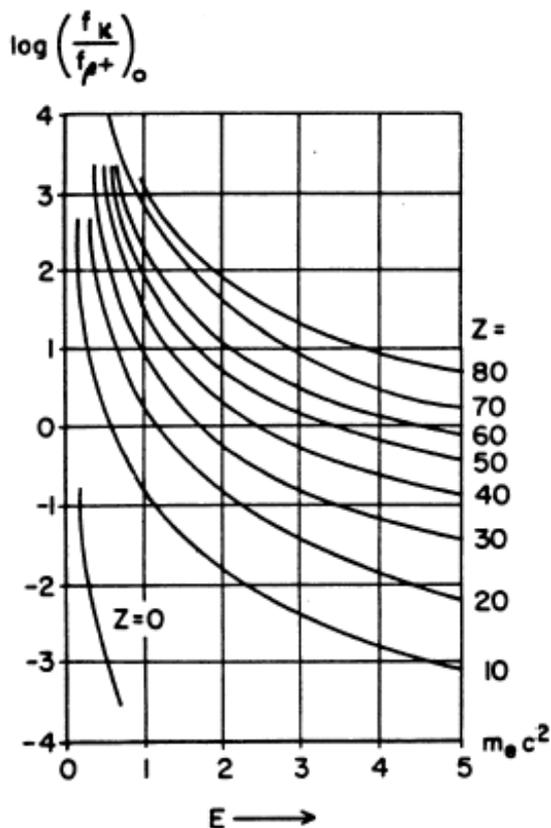
Zur Festlegung des „Startpunkts“ des Zerfalls wird die Emission eines Augerelektrons benutzt.

# Verhältnis von l zu k-Elektronen beim Elektroneneinfang

Ca. 5 bis 15 % der Elektronen kommen aus der l-Schale



# Verhältnis von EC zu $\beta^+$

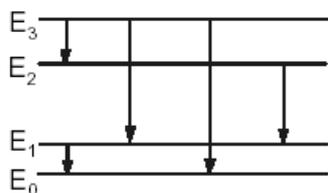


Bei kleinen Energien  
ist EC dominant !

# Elekromagnetische Übergänge

## 4.2 Elektromagnetische Übergänge in Atomkernen

a) Emission von Gammastrahlung bei Übergängen zwischen diskreten, gebundenen Zuständen:

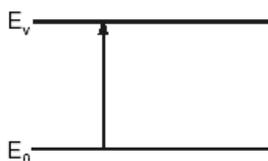


$$E_\gamma^{em} = \Delta E - \frac{p_\gamma^2}{2M} = \Delta E \cdot \left\{ 1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2} \right\}$$

Rückstoß auf den Kern

$$\Delta E = E_m - E_n$$

Der Umkehrprozeß heißt Resonanzabsorption und findet nur vom Grundzustand aus statt.



$$E_\gamma^{abs} = \Delta E + \frac{p_\gamma^2}{2M} = \Delta E \cdot \left\{ 1 + \frac{\Delta E}{2Mc^2} \right\}$$

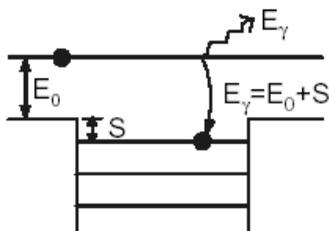
Rückstoß auf den Kern

Die Emissionslinie und die Absorptionslinie sind gegeneinander verschoben und deutlich voneinander getrennt, wenn die doppelte Rückstoßenergie größer als die Linienbreite ist, also

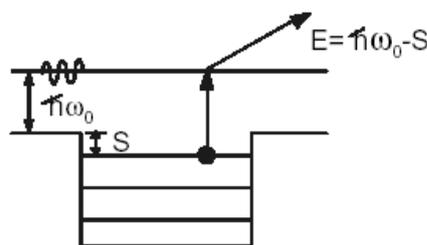
$$\frac{(\Delta E)^2}{Mc^2} > \Gamma$$

b) Emission von Gammastrahlung beim Einfang eines Teilchens (Strahlungseinfang):

Der Umkehrprozeß zum Strahlungseinfang ist der Kernphotoeffekt, d.h. die Emission eines Teilchens als Folge der Absorption eines Photons.



Strahlungseinfang



Kernphotoeffekt

# Innere Konversion

c) Innere Konversion:

Bei der inneren Konversion handelt es sich um einen konkurrierenden Prozeß zur Emission eines Gammaquants. Hierbei wird die freiwerdende Anregungsenergie des Kerns auf ein Hüllenelektron übertragen.

Die kinetische Energie der Elektronen ist diskret und besitzt je nach Schale einen unterschiedlichen Wert.

$$T_{e^-} = \Delta E_{Kern} - B_{e^-} \quad (B_{e^-} = B_K, B_L, \dots)$$

Man definiert für jede Schale einen Konversionskoeffizienten

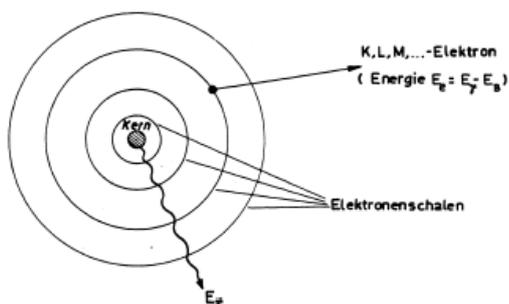
$$\alpha_K = \frac{N_{e^-K}}{N_\gamma} \quad \alpha_L = \frac{N_{e^-L}}{N_\gamma} \quad \dots$$

Wenn die freiwerdende Anregungsenergie des Kerns größer als  $2m_0c^2$  ist, kann ein Elektron-Positron-Paar emittiert werden. Diesen Prozeß bezeichnet man als innere Paar-Konversion. Die Summe der kinetischen Energien von Elektron und Positron ist

$$T_{e^-} + T_{e^+} = \Delta E_{Kern} - 1.022 \text{ MeV}$$

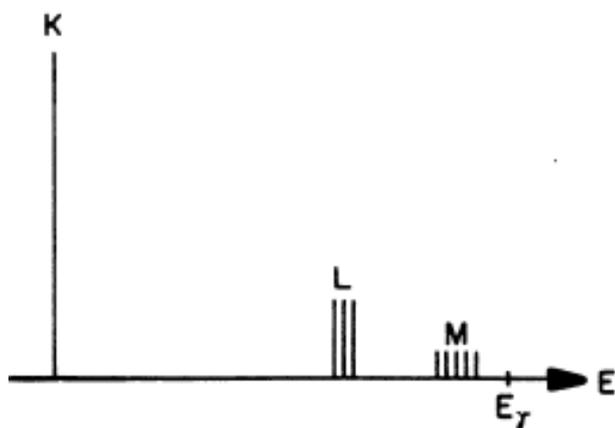
Die Energiespektren von Elektron und Positron sind kontinuierlich.

# Innere Konversion



Die Energie der Konversionselektronen ist

$$E_e = E_\gamma - E_B$$



Die innere Konversion lässt einen freien Platz in der Elektronenhülle zurück; das Atom wird also die charakteristischen Röntgenlinien oder Auger-Elektronen emittieren. Auger-Elektronen unterscheiden sich von Konversionselektronen dadurch, dass ihre Energie aus Übergängen in der Hülle anstatt im Kern stammt.

# Konversionskoeffizienten

Wenn ein angeregter Kern bei einem gegebenen Übergang eine Anzahl  $N_K$  Konversionselektronen aus der K-Schale und  $N_T$  Photonen emittiert, dann wird das Verhältnis

$$\alpha_K \equiv \frac{N_K}{N_T} \quad (12.2)$$

als der PARTIELLE KONVERSIONSKOEFFIZIENT für die K-SCHALE, oder kürzer, als der K-KONVERSIONSKOEFFIZIENT bezeichnet; er bezieht sich auf beide K-Elektronen. Entsprechend ist für die L-Schale  $\alpha_L = \frac{N_L}{N_T}$  etc.

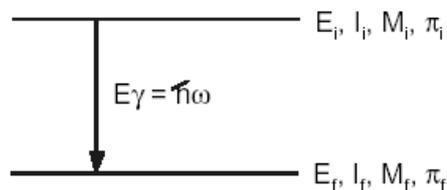
Elze 102

## von $\gamma$ -Strahlung: Erhaltungssätze I

### Emission elektromagnetischer Strahlung

Wir betrachten den Übergang eines Atomkerns aus einem höher angeregten Zustand in einen niedrigeren:

Übergang



Die Energieerhaltung erfordert  $E_i = E_f + E_\gamma$  (Der Rückstoß auf den Kern ist vernachlässigt).

Die Drehimpuls- und Paritätserhaltung erfordert

$$\begin{aligned} l_i &= l_f + \ell_\gamma & \rightarrow & \quad |l_i - l_f| \leq \ell \leq l_i + l_f \\ M_i &= M_f + M_\gamma \\ \pi_i &= \pi_f \cdot \pi_\gamma \end{aligned}$$

# Emission von $\gamma$ -Strahlung :Erhaltungssätze II

Da Anfangs- und Endzustand definierten Drehimpuls und Parität besitzen, muß auch das Gammaquant Drehimpuls und Parität tragen. Die Größe  $\ell$  ist der Drehimpuls des  $\gamma$ -Quants (Drehimpuls des Strahlungsfeldes);  $\ell$  darf nicht mit dem Bahndrehimpuls eines emittierten Teilchens verwechselt werden. Aus den Erhaltungssätzen folgt, daß das elektromagnetische Feld als Überlagerung von Termen dargestellt werden kann, die durch diskrete Drehimpulse gekennzeichnet sind. Es liegt daher nahe, das Strahlungsfeld nach Multipolen zu entwickeln.

Multipolordnung  $2^\ell$  ( $\ell=1$ : Dipol;  $\ell=2$ : Quadrupol; ...)

Die Parität der elektromagnetischen Strahlung ist

$$\begin{aligned}\pi(E\ell) &= (-)^\ell \quad \text{für einen elektrischen } 2^\ell\text{-Pol} \\ \pi(M\ell) &= (-)^{\ell+1} \quad \text{für einen magnetischen } 2^\ell\text{-Pol}\end{aligned}$$

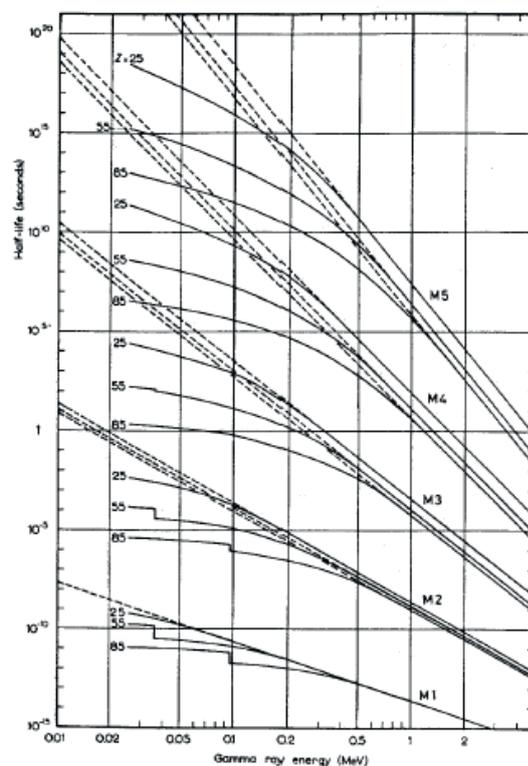
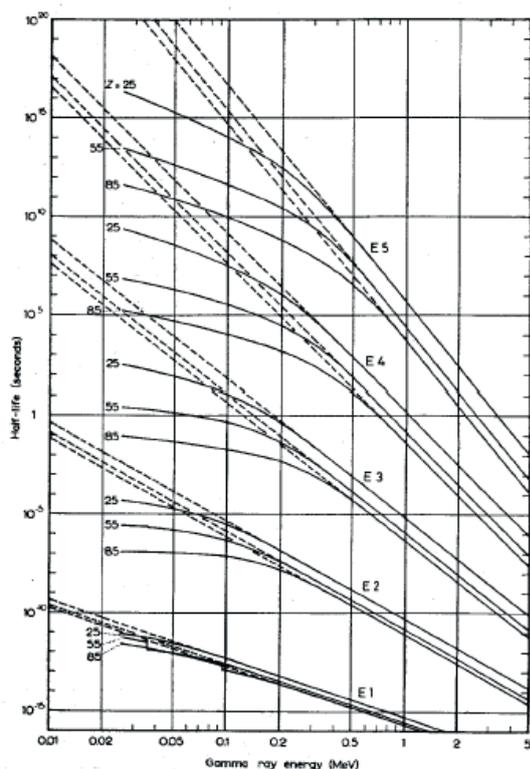
## Übergangswahrscheinlichkeiten für $\gamma$ -Strahlung (Formeln)

Die reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit ist i.a. sehr schwierig zu berechnen. Für ein einzelnes Proton außerhalb eines Kernrumpfes aus abgepaarten Nukleonen hat Weißkopf unter vereinfachenden Annahmen über die Wellenfunktionen eine Abschätzung der Übergangswahrscheinlichkeiten für elektrische und magnetische Übergänge gegeben (Weißkopf-Einteilchen-Abschätzung)

$$T_W(E\ell) = \frac{2(\ell+1)}{\ell[(2\ell+1)!!]^2} \cdot \left(\frac{3}{\ell+3}\right)^2 \cdot \frac{e^2 k}{\hbar} \cdot (kR)^{2\ell}$$

$$T_W(M\ell) = T_W(E\ell) \cdot 10 \cdot \left(\frac{\hbar^2}{m_p c R}\right)^2$$

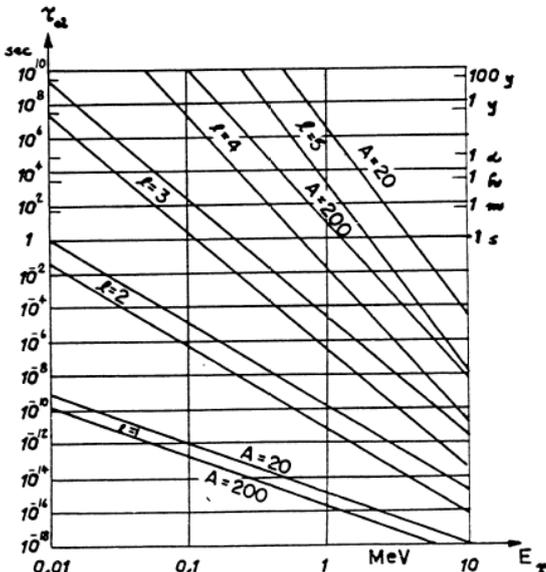
# Übergangswahrscheinlichkeiten für $\gamma$ -Strahlung (graphisch)



## Lebensdauer von angeregten Zuständen (Elektrische Übergänge)

$E_{\gamma}$	$\tau_{el}$ (sec) für				
	E1	E2	E3	E4	E5
0,1 MeV	$10^{-13}$	$10^{-6}$	$10^2$	$10^9$	gross
1 MeV	$10^{-15}$	$10^{-10}$	$10^{-5}$	1	$10^5$
10 MeV	$10^{-18}$	$10^{-15}$	$10^{-12}$	$10^{-9}$	$10^{-6}$

# Lebensdauer von angeregten Zuständen (Elektrische Übergänge)



# Isomere

Isomers, Long-lived Radioisotopes

