

Elastische Streuung hochenergetischer Elektronen

Die Energie der Elektronen wird so hoch gewählt, daß die de Broglie-Wellenlänge klein gegenüber den Kerndimensionen ist. Da die Wechselwirkung zwischen Elektronen und Kern rein elektromagnetisch ist, wird die Protonenverteilung des Kerns abgetastet.

Einige wichtige Formeln (Elektronen sind relativistisch zu behandeln):

$$\beta = \frac{v}{c}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$m = \gamma m_0 \quad \vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$$

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 (*) = T + m_0 c^2 = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + p^2 c^2}$$

$$\text{aus (*) folgt } \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{E} \right)^2}$$

Die deBroglie - Wellenlänge ist :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 c} \frac{1}{\beta} = \frac{h}{m_0 c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{h}{m_0 c} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{m_0 c^2}{E}\right)^2}}$$

kin. Energie $T = E - m_0 c^2$ (MeV) für Elektronen	λ (fm)
1	139
10	19
100	2
1000	0.2

Differentieller Wirkungsquerschnitt für elastische Elektronenstreuung

Die Rutherford-Streufomel gilt für die elastische Streuung spinloser Teilchen. Die elastische Streuung von Elektronen an einem spinlosen, punktförmigen Targetkern wird durch die Mott'sche Streufomel beschrieben.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \left(\frac{Z e^2}{2E} \right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (\text{Rückstoß vernachlässigt})$$

IKF-InterNet Bericht 2

KERNPHYSIK

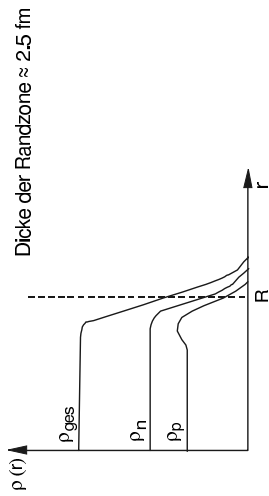
Vorlesung für Studenten
der Physik und anderer
Naturwissenschaften

Th. Elze
C. Freudenberger
A. Muthig

1.3 Methoden zur Bestimmung von Kernradien

Begriff des Kernradius

Kerne besitzen i.a. annähernd Kugelgestalt und sind relativ scharf begrenzt. Es ist daher sinnvoll, von einem Kernradius zu sprechen. Da Protonen und Neutronen im Kern nicht homogen verteilt sind und die Bindung endlich ist, erwartet man eine diffuse Randzone.



Einige Meßmethoden zur Bestimmung von Kernradien

Prinzip	Meßgröße
Coulombenergie des Korns	Coulombenergiedifferenz „analoger“ Zustände aus a) β -Zerfallsenergien, b) „Analog“-Resonanzen
Coulomb-Potential	a) Elektronenstreuung b) Röntgenübergänge in myonischen Atomen
Transmission geladener Teilchen durch den Coulombwall	a) Lebensdauern gegenüber dem Alpha-Zerfall b) Streu- und Reaktionsquerschnitte für „stark absorbierte“ Teilchen
Potential der Kernkräfte	Neutronenstreuung

Alle Meßmethoden liefern Kernradien $R = r_0 A^{1/3}$ mit $r_0 \approx 1,25 \text{ fm}$. Daraus läßt sich folgern, daß Kernmaterie eine konstante Dichte besitzt, die unabhängig von der Massenzahl A ist. Man findet $\rho \approx 2 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$.

Ersprechend kann die Separationsenergie für ein Proton, Alphateilchen, usw. definiert werden. Die Separationsenergie variiert systematisch mit dem „Gerade-Ungerade“-Charakter der Neutronen- bzw. Protonenzahl. Dies gibt einen Hinweis auf eine Paarungstendenz zwischen gleichartigen Nukleonen.

Paarungsenergie : $\delta_n(Z,A)=S_n(Z,A)-S_n(Z,A-1)$
 $=B(Z,A)+B(Z,A-2)-2B(Z,A-1)$

$N=A-Z$ gerade

Andere Definition : $\tilde{\delta}(Z,A)=\frac{1}{2}\{S_n(Z,A)-S_n(Z,A+1)\}$
 $=B(Z,A)-\frac{1}{2}\{B(Z,A+1)+B(Z,A-1)\}$

Man findet :

$\tilde{\delta}(Z,A)\approx 33 A^{-\frac{3}{4}}\text{ MeV}\approx 1\text{MeV}$

Zur Stabilität der Kerne

Z	N = A-Z	Zahl der stabilen Nuklide
ungerade	gerade	50
gerade	ungerade	55
ungerade	ungerade	4
gerade	gerade	165

KERNPHYSIK

Th. Elze, C. Freudenberger und A. Muthig

Institut für Kernphysik,
J. W. Goethe-Universität Frankfurt am Main
1999

Die vorliegende Dokumentation beruht auf einer Mitschrift der Vorlesung „Kernphysik“, die ich seit vielen Jahren für Studenten der Physik und anderer naturwissenschaftlicher Fachrichtungen an der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt gehalten habe. Der Inhalt der Vorlesung wurde im Rahmen einer Zusatzveranstaltung ergänzt und vertieft, wobei auch neuere Experimente der kernphysikalischen Grundlagenforschung behandelt wurden. Es ist beabsichtigt, diese Zusatzkapitel in einer zukünftigen Internet-Veröffentlichung zu dokumentieren.

Das vorliegende Skript kann ein Lehrbuch der Kernphysik oder eine Vorlesung nicht ersetzen. Es soll bestenfalls kernphysikalische Grundlagen zusammenfassen und somit bei der Wiederholung des Stoffes helfen oder zur Vorbereitung auf Prüfungen dienen.

Frankfurt am Main, 1999

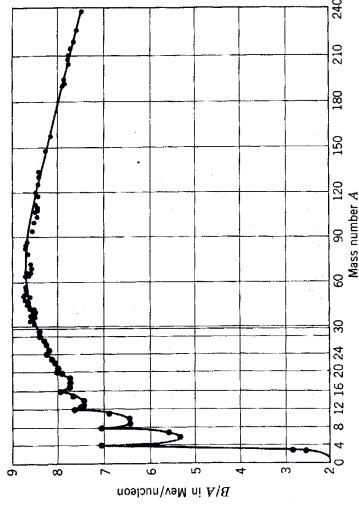
Thomas Elze

Das Manuskript wurde sorgfältig überprüft. Die Autoren übernehmen jedoch keine Verantwortung für verbleibende Fehler und bitten die Leser, Ungenauigkeiten oder Fehler den Autoren mitzuteilen.

e-mail: elze@ikf.uni-frankfurt.de; freudenberg@ikf.uni-frankfurt.de

Systematik der Bindungsenergien

aus [Eva55]



In der Abbildung ist die Bindungsenergie/Nukleon als Funktion der Nukleonenzahl aufgetragen. Die Figur zeigt dreierlei:

1. Die Bindungsenergie pro Nukleon B/A ist näherungsweise konstant. $B/A \approx 8 \text{ MeV}$. Hinweis auf „Sättigungscharakter“ der Kernkräfte; d.h. es besteht Analogie zur homöopolaren Atombindung (Austausch von Valenzelektronen). Yukawa forderte deshalb 1936 auch für die Kernbindung ein Austauschteilchen, das schließlich 1946 in Form des Pions entdeckt wurde.
2. Für sehr leichte und sehr schwere Kerne nimmt die Bindungsenergie ab. Es besteht die Möglichkeit, durch Spaltung schwerer Kerne oder Fusion leichter Kerne Energie zu gewinnen.
3. Bei bestimmten Nukleonenzahlen („magische“ Zahlen) wird ein anomales Verhalten (besonders große Bindungsenergie) beobachtet. Dies wird als Hinweis auf Schaleneffekte ähnlich denen in der Atomhülle gewertet.

Eine ausführliche Behandlung der Bindungsenergien folgt später.

Separationsenergie, Paarungsenergie

$S_n(Z,A)$ sei die Energie, die zur Ablösung eines Neutrons aus dem Kern (Z,A) benötigt wird. Dann gilt:

$$m(Z,A) \cdot c^2 = \{m(Z,A-1) + M_n\} \cdot c^2 - S_n(Z,A)$$

also

$$S_n(Z,A) = B(Z,A) - B(Z,A-1)$$

Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel:

Die Masse eines einfach geladenen Kohlenwasserstoffs beträgt

$$m(^{12}\text{C}_1\ ^1\text{H}_k)^+ = i\ m(^{12}\text{C}) + k\ m(^1\text{H}) - 1\ M_e$$

Die Bindungsenergien der Elektronen sind zu vernachlässigen.

Beispiel: Gemessen werde das Dublett $^{160}\text{Gd}^+ - (^{12}\text{C}_{12}\ ^1\text{H}_{16})^+$. Gesucht ist die Masse des ^{160}Gd -Atoms.

Man mit für die Massendifferenz

$$m(^{12}\text{C}_{12}\ ^1\text{H}_{16})^{+*} - m(^{160}\text{Gd}^{+*}) = 0.19805\ \text{u};$$

also ist die Masse von ^{160}Gd

$$m(^{160}\text{Gd}) = 12 \cdot 12 + 16 \cdot 1.007825 - 0.00055 - 0.19805 = 159.92660\ \text{u}.$$

Bestimmung von Massendifferenzen aus der Energieonung von Kernreaktionen

Wir betrachten die Kernreaktion $A + B \rightarrow C + D$. Die Ruhmassen der vier Teilchen seien M_A, M_B, M_C, M_D und deren kinetische Energien im Schwerpunktsystem T_A, T_B, T_C, T_D . Der Reaktions-Q-Wert (Energieonung) ist gegeben durch

$$Q = T_C + T_D - T_A - T_B = (M_A + M_B - M_C - M_D) \cdot c^2 = (\Delta_A + \Delta_B - \Delta_C - \Delta_D) \cdot c^2$$

wobei die Größen Δ_i die Massendefekte sind. Ist $Q > 0$, so wird Energie frei, die Reaktion ist exotherm, ist $Q < 0$, so wird Energie gebraucht, die Reaktion ist endotherm.

Beispiel: $^7\text{Li} + p \rightarrow ^7\text{Be} + n$

In Massendefekten ausgedrückt ergibt sich der Q-Wert zu

$$Q = (14908.6 + 7289.0 - 15770.3 - 8071.7)\ \text{keV} = -1644.2\ \text{keV}.$$

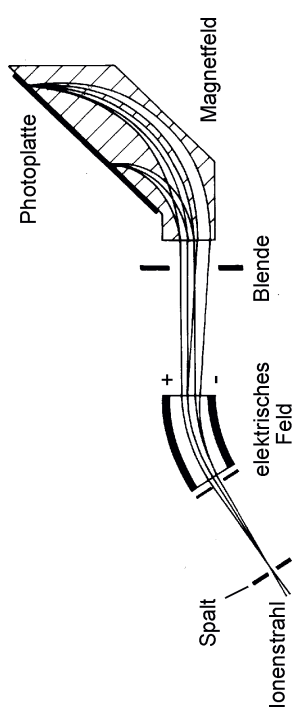
Es handelt sich um eine endotherme Reaktion. Die im Laborsystem notwendige kinetische Energie ergibt sich zu $T_{\text{Lab}} = -Q (M_1 + M_2) / M_2$, wobei M_1 die Masse des Projektils, M_2 die des Targetkerns ist. Solche „Schwellenenergien“ für endotherme Reaktionen lassen sich sehr genau bestimmen, so daß daraus Massendifferenzen mit großer Präzision ermittelt werden können.

Inhalt

1. Aufbau und statische Eigenschaften der Atomkerne	7
1.1 Das Atommodell von Rutherford und Bohr	7
1.2 Zusammensetzung und Masse der Atomkerne	14
1.3 Methoden zur Bestimmung von Kernradien	23
1.4 Spin, Parität, magnetische und elektrische Momente	34
2. Kräfte im Atomkern	47
2.1 Allgemeines über Kernmodelle und Kernpotentiale	47
2.2 Das Zweinukleonen-Problem	52
2.3 Bindungsenergien und das Tröpfchenmodell	64
3. Kernumwandlungen	69
3.1 Allgemeines zum radioaktiven Zerfall, Zerfallsgesetz	69
3.2 Alpha-Zerfall	75
3.3 Spontane Spaltung	78
3.4 Beta-Zerfall	80
3.5 Künstlich induzierte Kernumwandlungen	89
4. Kernspektroskopie und Kernmodelle	95
4.1 Allgemeines über Niveauschemata	95
4.2 Elektromagnetische Übergänge in Atomkernen	100
4.3 Das Schalenmodell	111
4.4 Das Kollektivmodell	118
4.5 Das Nilsson-Modell	126
5. Kernreaktionen	131
5.1 Reaktionskinematik und einfache Streutheorie	131
5.2 Reaktionsmechanismen	146
5.3 Compoundkern-Reaktionen	150
5.4 Direkte Kernreaktionen	154
5.5 Reaktionen zwischen schweren Kernen	157

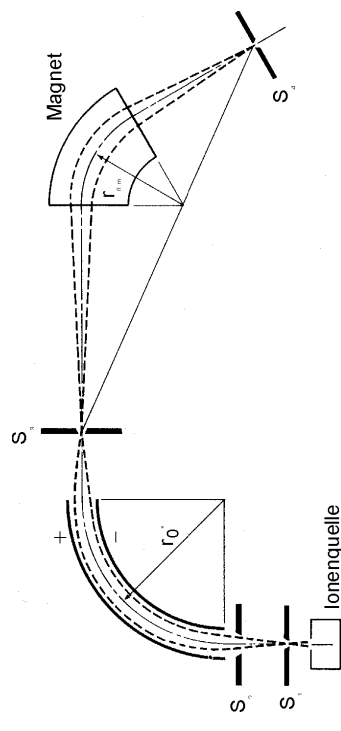
Massenspektrographen und Massenspektrometer

Die Kombination zweier Filter (magnetisches und elektrisches Feld) erlaubt eine Massenbestimmung.



aus [Beth96]

aus [Eng66]



Absolute Messungen von Atommassen erfordern die genaue Kenntnis von E , B , r_E und r_B . Die erreichbare Genauigkeit beträgt etwa $\Delta m/m \approx 10^{-4}$.

Relative Messungen sind genauer. Standard ist die Masse von ^{12}C . Da ^{12}C komplexe Moleküle bildet, sind Eichlinien im gesamten Massenbereich vorhanden. Bei relativen Messungen können Massen mit einer Genauigkeit von $\Delta m/m \approx 10^{-8}$ bestimmt werden.

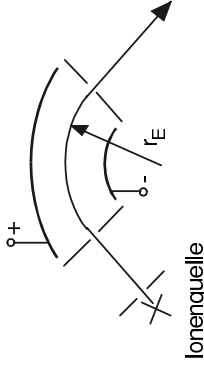
Nach Passieren des Filters haben alle Teilchen die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = q \cdot U = n \cdot e \cdot U = const.$$

Teilchen verschiedener Masse haben jedoch unterschiedliche Impulse.

$$p = \sqrt{2 \cdot m \cdot n \cdot e \cdot U}$$

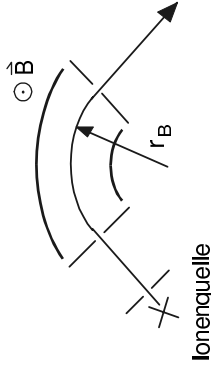
Zylinderkondensator als Energiefilter:



Bedingung für eine Kreisbahn: $\frac{m v^2}{r_E} = n \cdot e \cdot E = const.$

Ionen verschiedener Masse haben auch hier unterschiedliche Impulse $p = \sqrt{m \cdot r_E \cdot n \cdot e \cdot E}$

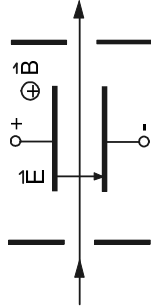
Impulsfilter (Magnetfeld):



Bedingung für eine Kreisbahn: $\frac{m v^2}{r_B} = n \cdot e \cdot v \cdot B = const.$

$$p = m \cdot v = r_B \cdot n \cdot e \cdot B = const.$$

Geschwindigkeitsfilter (Wien-Filter):



$$n \cdot e \cdot E = n \cdot e \cdot v \cdot B \Rightarrow v = \frac{E}{B}$$

Positive Ionen werden durch das E-Feld nach unten, durch das B-Feld nach oben abgelenkt. Bei Gleichheit der Kräfte findet keine Ablenkung statt, und die Ionen können das Filter passieren.

1. Aufbau und statische Eigenschaften der Atomkerne

1.1 Das Atommodell von Rutherford und Bohr

Zur Einordnung der Kernphysik:

Gebiet	typ. Dimension	typ. Energie	theor. Beschreibung
Weltraumphysik, Astronomie			alg. Relativitätstheorie
Makroskopische Physik			klass. Mechanik, Elektrodynamik
Atom- und Festkörperphysik	10 ⁻⁸ cm	1 eV	
Kernphysik	10 ⁻¹² cm	1 MeV	Quantenmechanik, Quantenelektrodynamik
Elementarteilchenphysik	<10 ⁻¹³ cm	>1 GeV	spez. Relativitätstheorie

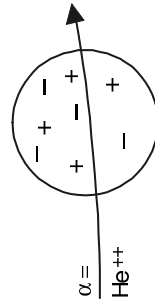
In der Kernphysik spielen relativistische Effekte keine große Rolle, da v/c < 0.1. Man kann daher mit nichtrelativistischen Formeln der Quantenmechanik rechnen.

Historische Entwicklung der Kernphysik

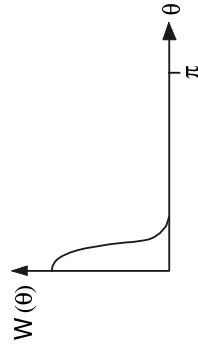
- 1895 Entdeckung der Röntgenstrahlen
- 1896 Entdeckung der Radioaktivität (Becquerel)
- 1897 Entdeckung des Elektrons (J. J. Thomson)
- 1898 Separation von Radium aus Erzen (Curie)
- Gesetz des radioaktiven Zerfalls (Rutherford, Soddy)
- Identifizierung der verschiedenen Strahlungsarten (Alpha-, Beta-, Gammastrahlung)
- 1911 Alpha-Streuexperimente (Rutherford) zeigen die Existenz eines Atomkerns (Beginn der Kernphysik)
- 1913 Systematik der Röntgenspektren (Moseley), Begriff der Ordnungszahl, Basis für das Periodensystem
- 1913 Erklärung des Wasserstoffspektrums (Bohr)
- 1919 Erste Kernumwandlung (Rutherford)
- ab 1925 Entwicklung der Quantenmechanik zur Beschreibung der Atomstruktur (u.a. De Broglie, Schrödinger, Heisenberg, Born)
- 1930 Erste Teilchenbeschleuniger (Cockroft, Walton, Lawrence)

- 1932 Entdeckung des Neutrons (Chadwick). Formulierung des bis heute geltenden Kernaufbaus aus Z Protonen und $N = A - Z$ Neutronen
- 1935 Beschreibung der Kernkräfte durch Mesonenaustausch (Yukawa)
- 1936 Entdeckung des Myons (Anderson und Neddermeyer)
- 1938 Kernspaltung (Hahn und Straßmann)
- 1939 Erste korrekte Interpretation des Mechanismus der Kernspaltung (Meitner und Frisch).
- Theoretische Behandlung mit Hilfe des Tröpfchenmodells (Bohr und Wheeler)
- ab 1940 Entdeckung der Transurane (Seaborg)
- 1942 Erste kontrollierte Kettenreaktion (Fermi)
- 1946 Entdeckung des Pions (Träger der anziehenden „Kernkraft“) (Powell)
- 1950 Viele kernphysikalische Untersuchungen mit Hilfe von Reaktoren und Teilchenbeschleunigeranlagen, Entwicklung verfeinerter Kernmodelle, verbesserte Beschreibung der Mechanismen bei Kernreaktionen
- 1956 Theorie des Beta-Zerfalls (Fermi)
- ab 1970 Kernphysik mit schweren Ionen. Besonders herausragend: Erzeugung neuer Elemente (zur Zeit (1998) bis $Z = 112$) bei der GSI in Darmstadt

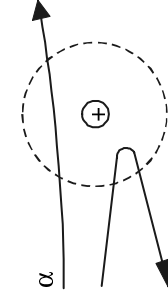
Entdeckung des Atomkerns durch Streuexperimente



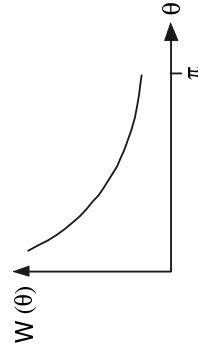
Thomson'sches Atommodell: Positive Ladungen sind gleichmäßig im Atom verteilt ($D \approx 10^{-8}$ cm)



Thomson'sches Atommodell: große Werte von θ sind beliebig unwahrscheinlich.



Rutherford'sches Modell: Positive Ladung ist im Kern konzentriert ($D \approx 10^{-12}$ cm)



Rutherford'sches Modell: große Werte von θ treten mit endlicher Wahrscheinlichkeit auf.

Hierbei ist $B(Z,A)$ die gesamte Bindungsenergie (Kern + Hülle), $B'(Z,A)$ die Kernbindungsenergie.

Aus diesen Gleichungen erhält man eine Beziehung zwischen Atom- und Kernmasse:

$$M(Z,A) = m(Z,A) - (Z M_e - B_e(Z)/c^2).$$

Die Bindungsenergie der Hülle ist näherungsweise gegeben durch

$$B_e(Z) = 15,73 Z^{7/3} \text{ eV}$$

und kann gegenüber dem Term $Z M_e$ vernachlässigt werden, so daß

$$B(Z,A) = B'(Z,A).$$

Eine weitere bequeme Größe ist der Massendefekt (-exzel) $\Delta(Z,A) = M(Z,A) - A$.

Experimentelle Bestimmung von Atom- und Kernmassen

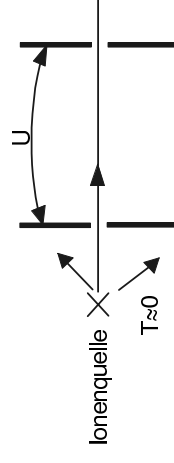
Atom- oder Kernmassen lassen sich mit einem Massenspektrometer oder Massenspektrographen (Ablenkung des Teilchens im elektrischen und magnetischen Feld) bestimmen. Eine andere Methode zur Massenbestimmung basiert auf der Energieerhaltung. Da die Differenz der Bindungsenergien vor und nach einer Kernreaktion in kinetische Energie umgewandelt wird, kann aus der Energietönung von Kernreaktionen die Masse eines der an der Reaktion beteiligten Teilchen bestimmt werden.

Grundlagen der Massenspektroskopie

Im folgenden werden einige Filter erläutert, aus denen Massenspektrometer oder Massenspektrographen aufgebaut werden können. Wichtige Filter sind:

1. Energiefilter,
2. Impulsfilter,
3. Geschwindigkeitsfilter.

Beschleunigungs-Energiefilter.



Atommassen und Bindungsenergien, Äquivalenz von Masse und Energie

Nach der speziellen Relativitätstheorie gilt:

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + T = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + p^2 c^2}$$

m_0 ist die Ruhemasse des betrachteten Teilchens

Für $T \ll m_0 c^2$ ($v \ll c$) gilt

$$E \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{p^2}{2 m_0^2 c^2} \right) = m_0 c^2 + \frac{p^2}{2 m_0}$$

Für $T \gg m_0 c^2$ ($v \approx c$) gilt

$$E \approx c \cdot p$$

Die Kinematik kernphysikalischer Prozesse zwischen Nukleonen oder Atomkernen läßt sich durch die nichtrelativistischen Beziehungen beschreiben. Elektronen sind dagegen i.a. stark relativistisch ($v \approx c$).

Masseneinheiten, Beziehungen zwischen Massen und Bindungsenergien

Gemessen und in Tabellen angegeben werden Atommassen ($M_{\text{Kern}} + M_{\text{Hülle}}$).

Für kernphysikalische Fragestellungen spielt $M_{\text{Hülle}}$ i.a. keine Rolle und kann vernachlässigt werden.

Standard: $1u = 1/12 m(^{12}\text{C}) = 1.66 \cdot 10^{-24} \text{ g} = 931.5 \text{ MeV}/c^2 = 1 \text{ atomare Masseneinheit}$

In dieser Einheit ist

$$M_p = 1.00727647 u = 938.2796 \text{ MeV}/c^2$$

$$M_n = 1.00866501 u = 939.5731 \text{ MeV}/c^2$$

$$M_e = 5.4858026 \cdot 10^{-4} u = 0.511003 \text{ MeV}/c^2$$

Genauere Massenbestimmungen zeigen, daß die Atom-(Kern-)massen kleiner sind als die Summe ihrer Bestandteile.

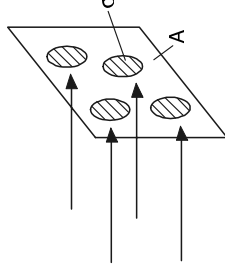
$$\text{Atommasse } m(Z, A) = Z M_p + Z M_e + (A-Z) M_n - B(Z, A)/c^2$$

$$= Z m_H + (A-Z) M_n - B(Z, A)/c^2$$

$$\text{Kernmasse } M(Z, A) = Z M_p + (A-Z) M_n - B(Z, A)/c^2$$

Begriff des Wirkungsquerschnitts

Die Wahrscheinlichkeit, daß in einem Streuexperiment zwischen zwei Kernen eine Wechselwirkung eintritt (Streuung oder auch komplexere Reaktion, wie z.B. Nukleonenaustausch), wird durch den Wirkungsquerschnitt angegeben (Analogie zur kinetischen Gastheorie).



Mit der Flächendichte der Streuzentren ω (cm^{-2}), der Teilchenstromdichte j ($\text{s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$) und dem Wirkungsquerschnitt σ (cm^2) ergibt sich die Zahl der Streuungen (Reaktionen) pro Sekunde zu $N = \omega \sigma A j$. Die Gesamtzahl der Streuzentren beträgt $Z = \omega A$, die Wahrscheinlichkeit für einen „Treffer“ $W = \omega \sigma$. Mit der Avogadro-Konstanten L , dem Atomgewicht M , der Dichte ρ und Dicke d des streuenden Materials läßt sich die Flächendichte der Streuzentren zu $\omega = \rho d L / M$ berechnen. Bei quantenmechanisch beschriebenen Prozessen ist die Vorstellung einer kleinen Streufläche nicht mehr gültig. Man definiert aber:

$$\sigma = N / (j \omega A) = \text{Zahl der Reaktionen pro sec} / (j \omega A)$$

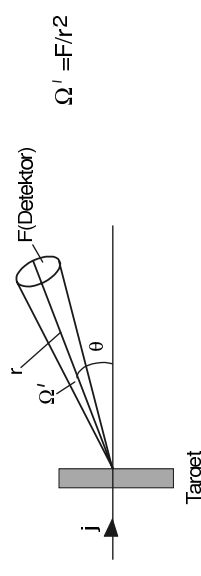
$$= \text{Zahl der Reaktionen je Streuzentrum und sec} / j$$

σ ist somit eine Größe, die eine gegebene Reaktion (Reaktionstyp, Energie, Stoßpartner) charakterisiert.

Differentieller Wirkungsquerschnitt

Der differentielle Wirkungsquerschnitt beschreibt die Winkelverteilung der Reaktionsprodukte.

Die Größe $d\sigma/d\Omega$ ist ein Maß dafür, daß gestreute Teilchen unter dem Winkel θ nachgewiesen werden, wobei Zylindersymmetrie bezüglich der Teilchenstrahlrichtung angenommen wird.



Die Zahl der pro sec im Detektor nachgewiesenen Teilchen beträgt

N = A j ω (dσdΩ)_{θ} Ω.

Der Wirkungsquerschnitt wird in der Kernphysik in barn (b) = 10^{-24} cm^2 angegeben, der differentielle Wirkungsquerschnitt in barn/Sterad (b/sr).

Integrierter Wirkungsquerschnitt

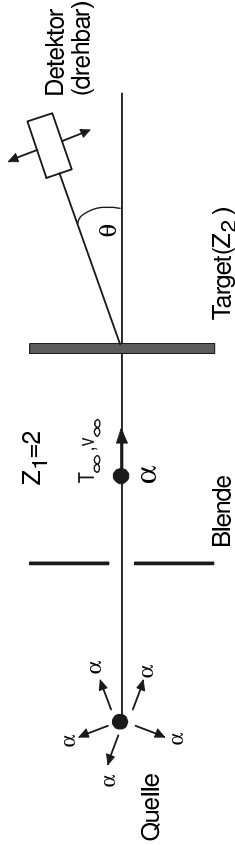
Die Gesamtzahl der unter beliebigen Winkeln gestreuten Teilchen ist proportional zum integrierten Wirkungsquerschnitt.

σ = ∫ (dσ / dΩ)_{θ} dΩ = ∫ (dσ / dΩ)_{θ} sinθ dθ dφ = 2π ∫ (dσ / dΩ)_{θ} sinθ dθ = ∫ (dσ / dθ) dθ

Rutherfordstreuung

Unter Rutherfordstreuung versteht man die elastische Streuung von α-Teilchen an Kernen.

Prinzip des Experiments:



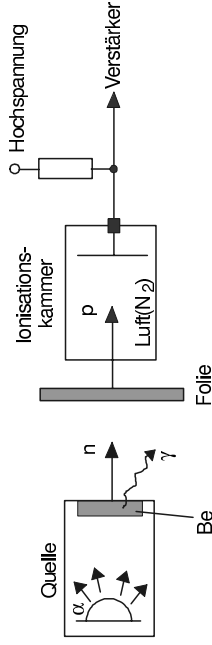
Ein Maß für die Gültigkeit der klassischen Beschreibung liefert der Sommerfeldparameter η = a / λ, wobei a die Hälfte der dichtesten Annäherung zwischen Projektil und Target im zentralen Stoß und λ = h / p die de Broglie-Wellenlänge ist. Ist η >> 1, so lässt sich der Streuvorgang klassisch beschreiben, d.h. die Projektillbewegung erfolgt entlang einer klassischen Trajektorie. Für η < 1 ist der Übergang in das Wellenbild notwendig.

Der Sommerfeldparameter ergibt sich zu

η = (Z1 · Z2 · e^2) / (ħ · V_∞) = (Z1 · Z2 · α) / (V_∞ / c)

wobei Z1 und Z2 die Ladungszahlen von Projektil und Target sind (s. unten). V_∞ ist die Projektillgeschwindigkeit weit entfernt vom Target und α ≈ 1/137 die Feinstrukturkonstante.

Experiment:



Ergebnis: Die Ionisation nimmt zu, wenn eine wasserstoffhaltige Folie (Protonen) zwischen Quelle und Ionisationskammer gebracht wird. Die Anwendung des Impulsatzes für zentrale Stöße zwischen Neutron und Proton (in der Folie) bzw. Neutron und Stickstoffkern (in der Ionisationskammer) ergab Masse und Geschwindigkeit der Neutronen.

Heisenberg folgerte daraus, daß der Kern aus Z Protonen und A-Z Neutronen, also insgesamt A Fermionen, besteht.

Wichtige Begriffe:

Isotope: Kerne mit gleichem Z, verschiedenem A

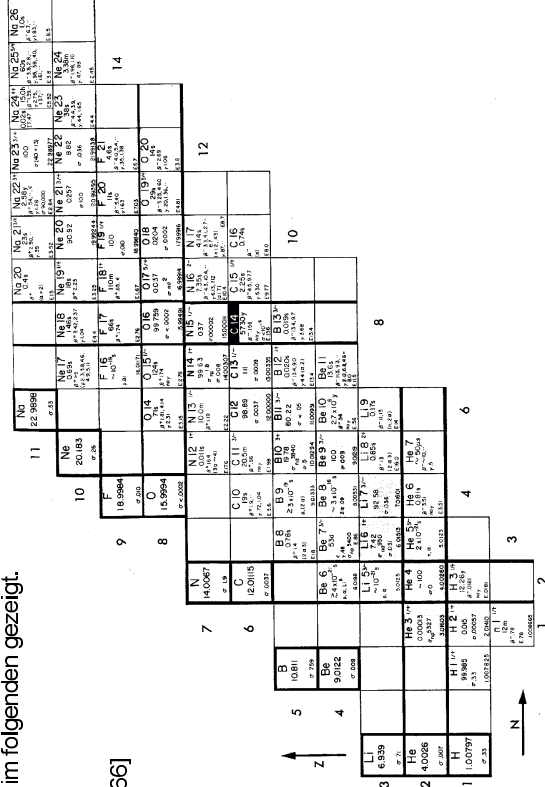
Isobare: Kerne mit gleichem A

Isotone: Kerne mit gleicher Neutronenzahl A-Z

Isomere: Kerne mit gleichem A und Z, metastabile Zustände

Alle beobachteten Kerne lassen sich in eine Nuklidkarte (N,Z-Ebene) eintragen. Ein Ausschnitt ist im folgenden gezeigt.

aus [Eng 66]



1.2 Zusammensetzung und Masse der Atomkerne

Um 1920 waren nur Alphateilchen, Protonen und Elektronen bekannt. Man nahm daher an, daß der Atomkern aus Protonen und Elektronen bestehe.

Experimentelle Tatsachen

1. Die Atomgewichte A der Elemente sind (mit Ausnahmen) ungefähr ganzzahlig.
2. Alpha-Streuexperimente ergaben, daß die Kernladung den Wert Ze besitzt, wobei die Ordnungszahl Z etwa der halben Massenzahl entspricht.
3. Beim radioaktiven Zerfall und ersten künstlichen Kernumwandlungen wurde die Emission von Alphateilchen, Protonen und Elektronen beobachtet.

Aus diesen Beobachtungen ergab sich die Folgerung, daß der Kern aus A Protonen und $(A-Z)$ Elektronen besteht.

Bei diesem Modell treten jedoch folgende Schwierigkeiten auf:

1. Drehimpulse der Kerne, Statistik:
Proton und Elektron haben Spin $1/2 \hbar$ (Fermionen). Der Kern wäre also aus $2A-Z$ Fermionen zusammengesetzt. Ist Z ungerade, ist auch die Fermionenanzahl ungerade und der Gesamtspin halbzahlig. Es gilt die Fermi-Statistik und das Pauliprinzip. Ist dagegen Z gerade, ist auch die Fermionenanzahl gerade, der Gesamtspin ist ganzzahlig, es gilt die Bose-Statistik.

Diese Aussagen stehen im Widerspruch zum Experiment: so hat z.B. der Stickstoffkern $Z = 7$ und Gesamtspin $I = 1 \hbar$.

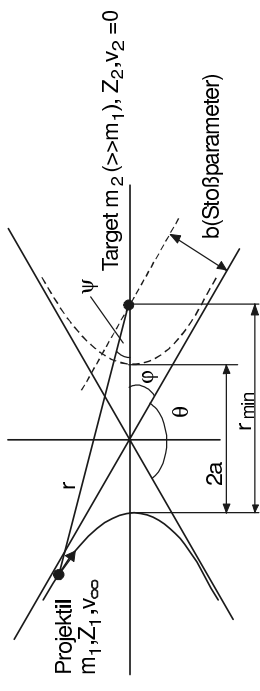
2. Magnetische Momente:

Das freie Elektron besitzt ein magnetisches Moment von 1 Bohr'schen Magneton. Die magnetischen Momente der Kerne betragen nur etwa $1/1000$ davon, d.h. im Kern dürften Elektronen weder Spin noch magnetisches Moment besitzen.

3. Der Kern ist zu klein, um Elektronen zu beherbergen. Wegen der Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar$ ($\Delta x = R$) und der damit verbundenen Energieunschärfe $\Delta E = c \cdot \Delta p$ erwartet man Elektronen mit einer Energie von bis zu etwa 100 MeV. Dies ist nicht vereinbar mit Meßdaten.

Die genannten Schwierigkeiten wurden durch die Entdeckung des Neutrons beseitigt (Chadwick, 1932).

Theoretische Behandlung der Rutherfordstreuung



Für eine Zentralkraft ($\sim 1/r^2$) ergeben sich Hyperbelbahnen bei Abstoßung zwischen Projektil und Target.

$$r = \frac{a \cdot (\varepsilon^2 - 1)}{\varepsilon \cdot \cos \psi - 1}$$

Man liest folgende Beziehungen ab: $2\varphi + \theta = \pi$

$$\cos \varphi = \sin \frac{\theta}{2} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \cos \psi = \cos \varphi = \frac{1}{\varepsilon}$$

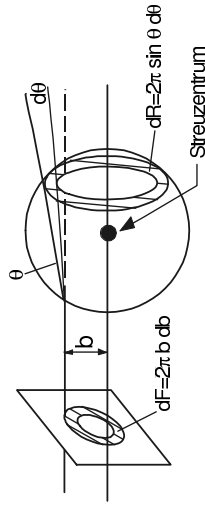
$$\varepsilon^2 - 1 = \cotg^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\cotg \frac{\theta}{2} = \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

Der Stoßparameter ergibt sich zu

$$b = a \cdot \cotg \frac{\theta}{2}$$

Differentieller Wirkungsquerschnitt für Rutherfordstreuung



Wegen $b = a \cotg(\theta/2)$ gehört zu jedem Stoßparameter b ein Streuwinkel θ .

Die Teilchenzahlerhaltung erfordert:

$$j2\pi b db = j \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\theta dR = j \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\theta 2\pi \sin\theta d\theta$$

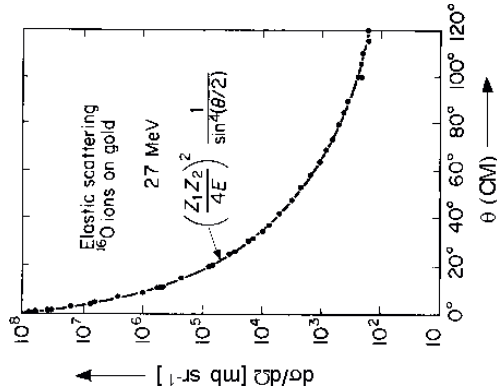
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\theta = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

Mit obigen Beziehungen ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt zu

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\theta = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4 T_{\infty}} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Diese Rutherford'sche Streuformel gilt, solange $m_2 \gg m_1$. Ist dies nicht erfüllt, gilt die Gleichung in Schwerpunktskoordinaten, wobei die kinetische Energie nun im Schwerpunktsystem gemessen wird.

$T = \frac{1}{2} \mu v_o^2$ mit der reduzierten Masse $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$ und der Relativgeschwindigkeit v_o .

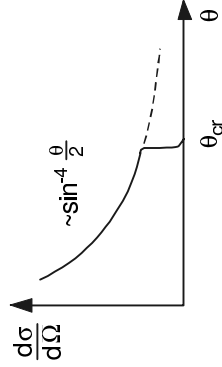


Abhängigkeit des Rutherford-wirkungsquerschnitts vom Streuwinkel im Schwerpunktsystem (aus [Mar70])

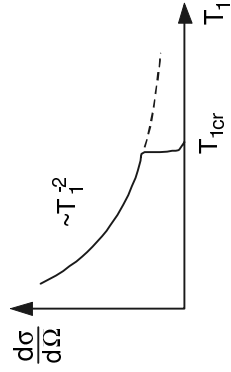
„Anomale“ Rutherfordstreuung

Durch Steigerung der Energie der Alpha-Teilchen kann die abstoßende Coulombkraft soweit überwunden werden, daß Oberflächenkontakt zwischen Projektil und Target eintritt (Einsetzen der anziehenden Kernkräfte). Man beobachtet Abweichungen vom Rutherford-Wirkungsquerschnitt.

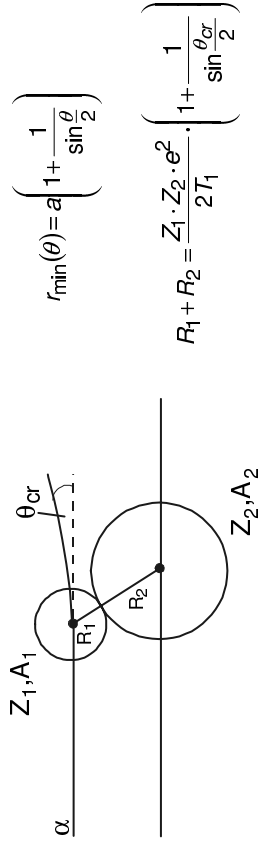
Wirkungsquerschnitt als Funktion des Streuwinkels



Wirkungsquerschnitt als Funktion der Projektilenergie



Deutung:



Aus beiden Messungen kann die Summe der Radien von Projektil und Target bestimmt werden (wichtige Methode zur Bestimmung von Kernradien).

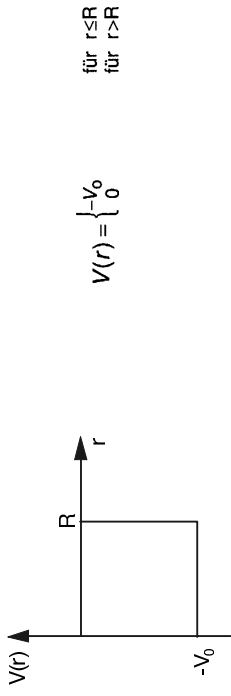
Systematische Messungen ergaben:

$R_{\alpha_2} + R_o = r_o A_2^{1/3} + b$ mit

$r_o = 1.414 \pm 0.04$ fm

$b = 2.19 \pm 0.20$ fm

Der Einfachheit halber wird ein Kastenpotential angenommen:



Mit diesem Potential wird die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + E - V(r) \right\} \Psi(\vec{r}) = 0$$

gelöst. Da das Problem kugelsymmetrisch ist, kann für die Wellenfunktion ein Produktsatz gemacht werden.

$$\Psi(\vec{r}) = R(r) \cdot Y(\theta, \varphi) = \frac{u(r)}{r} \cdot Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

Mit diesem Ansatz erhält man

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\sin^2 \theta \partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] \right\} \cdot \frac{u(r)}{r} \cdot Y_\ell^m = 0$$

Durch Separation der Variablen ergibt sich eine Gleichung für den Winkelanteil:

$$\left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \cdot Y_\ell^m(\theta, \varphi) = -\ell(\ell+1) \cdot Y_\ell^m(\theta, \varphi) \quad ; \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

Diese Gleichung hängt nicht von $V(r)$ ab. Sie ist daher nur einmal zu lösen; die Lösung ist dann für alle Fälle bekannt.

Für den Radialanteil erhält man nach kurzer Rechnung

$$\frac{d^2}{dr^2} u(r) + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] \cdot u(r) = 0$$

⇓
Zentrifugalpotential

Man beachte, daß $u(r) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow 0$, damit $\Psi(0)$ endlich bleibt ($\ell = 0$). Für $\ell > 0$ verschwindet $\Psi(r)$ bei $r = 0$ wegen des Zentrifugalpotentials automatisch, da Teilchen mit Drehimpuls sich nicht bei $r = 0$ aufhalten können; sie werden durch die Zentrifugalkraft nach außen getrieben).

Für die Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung gilt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \cdot |F(q)|^2 \quad F(q) = \text{Formfaktor}$$



$$\begin{aligned} \text{einlaufende Welle} &\propto e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ \text{auslaufende Welle} &\propto \frac{1}{r} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}} \\ \vec{q} = (\vec{k}' - \vec{k}) &= \frac{(\vec{p} - \vec{p}')}{\hbar} \end{aligned}$$

Der Formfaktor kann in Born'scher Näherung (Annahme ebener Wellen) berechnet werden. Das Ergebnis der etwas komplizierteren Rechnung lautet:

$$F(\vec{q}) = \frac{1}{Ze} \int \rho(\vec{r}') e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}'} d\tau'$$

wobei $\rho(r')$ die Ladungsverteilung im Targetkern und $F(q)$ die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung ist.

Für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung wird

$$F(q) = \frac{1}{Ze} \int \rho(r') \frac{\sin qr'}{qr'} 4\pi r'^2 dr'$$

Für eine homogene Ladungsverteilung mit Radius R erhält man

$$F(q) = \frac{3}{(qR)^3} \{ \sin qr - qr \cos(qr) \}$$

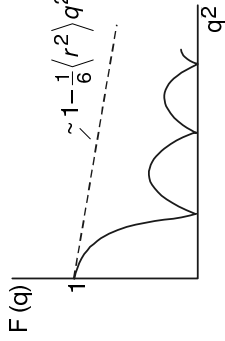
$F(q)$ verschwindet für $qR = \tan(qR)$. Somit ist an diesen Stellen auch der differentielle Streuwirkungsquerschnitt gleich Null.

Aus einer Messung des differentiellen Wirkungsquerschnitts kann $|F(q)|^2$ direkt ermittelt werden. Zur Bestimmung von $\rho(r)$ wird $F(q)$ für vorgegebene Ladungsverteilungen berechnet und der differentielle Wirkungsquerschnitt mit dem Experiment verglichen.

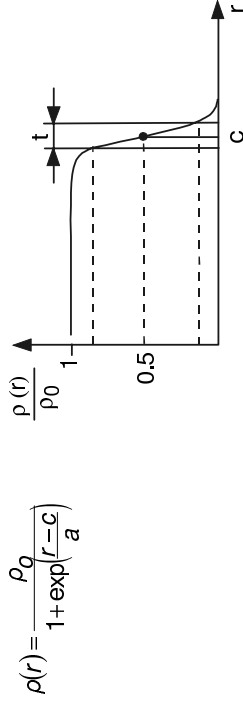
Verhalten für kleine Impulsüberträge q :

$$F(q) = \frac{1}{Ze} \int \rho(r) \left[1 - \frac{1}{6} (qr)^2 + \dots \right] 4\pi r^2 dr$$

$$= 1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle q^2 + \dots \quad \text{mit} \quad \langle r^2 \rangle = \frac{\int r^2 \rho(r) dr}{\int \rho(r) dr}$$



Die experimentellen Daten lassen sich sehr gut reproduzieren, wenn für die Ladungsverteilung eine Fermi-Verteilung angesetzt wird.



Hierbei ist die Oberflächendicke $t = 4.4 a$.

Eine große Anzahl von Messungen und systematische Untersuchungen der Kernladungsverteilungen wurden von Hofstadter und Mitarbeitern am Elektronen-Linearbeschleuniger in Stanford (USA) durchgeführt. Aus diesen Messungen ergab sich der „Halbdichterradius“ der Kernladungsverteilung zu $c = (1.07 \pm 0.2) A^{1/3}$ fm, die Oberflächendicke zu $t = (2.4 \pm 0.3)$ fm (unabhängig von A). Eine verfeinerte Anpassung an die experimentellen Daten liefert $c = 1.12 A^{1/3} - 0.94 A^{-1/3}$, was etwa proportional zu $A^{1/3}$ ist.

Anmerkung zu den Hofstadter-Experimenten

1. Hofstadter führte die Experimente im Energiebereich 100 ... 1000 MeV durch.
2. Zur Diskriminierung der elastisch gestreuten Elektronen gegen inelastisch gestreute bzw. in anderen Prozessen erzeugte Elektronen und Mesonen wurde ein Magnetspektrometer verwendet.

2. Kräfte im Atomkern

2.1 Allgemeines über Kernmodelle und Kernpotentiale

Wozu brauchen wir Kernmodelle? Eine exakte Theorie des Atomkerns gibt es bis heute nicht. Da die Kräfte im Atomkern sehr kompliziert sind und die Anzahl der Nukleonen weder sehr klein noch sehr groß ist, sucht man nach Modellvorstellungen, um gewisse Eigenschaften der Kerne zu beschreiben. Dadurch wird das Problem der Beschreibung des Atomkerns vereinfacht, jedoch mit dem Nachteil erkauft, daß ein bestimmtes Modell nur ganz bestimmte Eigenschaften beschreiben kann. Es gibt also kein Kernmodell, das alle Kerneigenschaften reproduzieren kann.

Es gibt zwei Klassen von Kernmodellen:

a) Manche Eigenschaften von Kernen ähneln denen von makroskopischer kondensierter Materie (z.B. konstante Dichte der Kernmaterie, geringe Kompressibilität, relativ scharfer Abfall der Dichte am Kernrand, annähernd konstante Bindungsenergie pro Nukleon). Zur Beschreibung dieser Eigenschaften sind Modelle geeignet, die von der Vorstellung einer Flüssigkeit ausgehen: Tröpfchenmodell, hydrodynamisches Modell. Angeregte Kernzustände werden als kollektive Strömungen von Kernmaterie interpretiert (z.B. Schwingungen und Rotationen: Kollektivmodell).

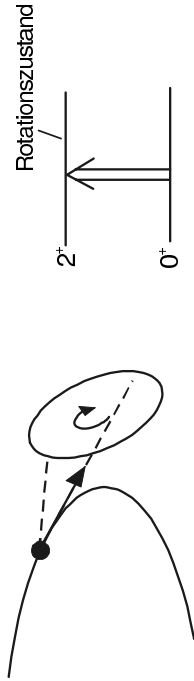
b) Andere Eigenschaften (z.B. Spin, Parität, magnetische Momente von Kernen mit ungerader Nukleonenzahl) sind besser zu verstehen, wenn man annimmt, daß sie von einem aktiven Nukleon verursacht werden, während alle übrigen Nukleonen keinen Beitrag liefern (Einteilchenmodelle, Schalenmodell). In diesen Modellen bewegt sich das einzelne Nukleon in einem mittleren anziehenden Potential, das von allen anderen Nukleonen hervorgerufen wird. Wechselwirkungen zwischen den Nukleonen werden vernachlässigt, bzw. als kleine Störung behandelt. Dies ist gerechtfertigt, da das Pauliprinzip gilt. Danach sind alle Zustände unterhalb einer maximalen Energie besetzt, so daß Energieänderungen als Folge von Stößen nicht stattfinden können.

Allgemeine Betrachtungen zur Bindung von Nukleonen im „Potentialtopf“

Zunächst sei angenommen, daß es nur eine Sorte von Nukleonen gibt. Der Spin (Pauliprinzip) und die Ladung (Coulomb-Abstoßung) seien zunächst vernachlässigt. Die Nukleonen bewegen sich in einem konstanten Potential der Tiefe V_0 mit Radius R . Klassisch gesehen bewegen sich die Nukleonen kräftefrei im Topf, an den „Wänden“ werden sie reflektiert.

Man berechnet nun, welche Zustände ein Nukleon im effektiven Potential einnehmen kann. Später wird das Problem auf alle Nukleonen unter Berücksichtigung des Pauliprinzips erweitert.

Messung von Quadrupolmomenten



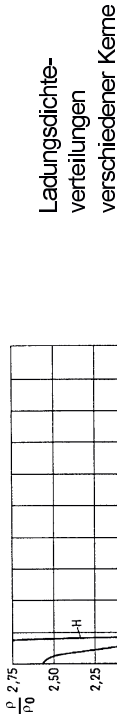
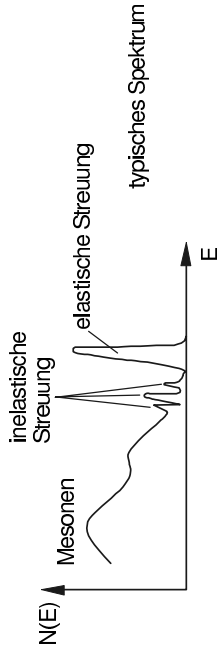
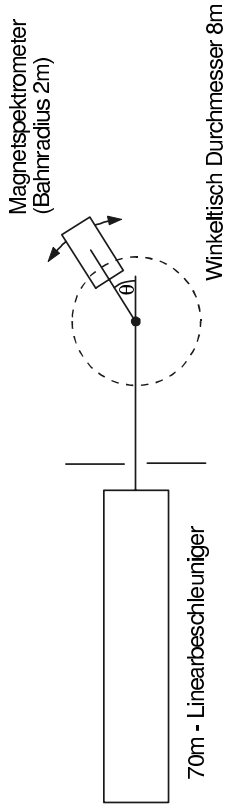
Wir betrachten die Wechselwirkung eines Projektils mit der Ladung Z_1e mit einem Targetkern mit der Ladung Z_2e . Bei hinreichend niedriger Energie tritt kein Oberflächenkontakt zwischen Projektil und Target ein. Die Wechselwirkung ist rein elektromagnetisch, und es gelten die Formeln der Rutherfordstreuung. Der Wirkungsquerschnitt für die inelastische Streuung lässt sich schreiben

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{inelast} = P \cdot \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford}$$

wobei die Anregungswahrscheinlichkeit $P \ll 1$.

Die Wahrscheinlichkeit P für die Anregung eines Rotationszustandes ist proportional zum Quadrat des inneren Quadrupolmoments des Kerns und dient zur Messung von Quadrupolmomenten.

Für ein starres Ellipsoid ist $P \sim |Q|^2$.



aus [Hof 57]

Kernradien aus der Coulombenergie-Differenz von Spiegelkernen

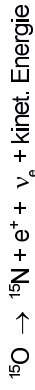
Es gibt eine Reihe isobarer Kerne, bei denen die Anzahl von Protonen und Neutronen gerade vertauscht ist, z.B.:

$A = 15$	^{15}N	$m = 14.99627 \text{ u}$
	^{15}O	$m = 14.99868 \text{ u}$

oder Isobare mit gleichem Protonen-Neutronen-Rumpf und jeweils einem zusätzlichen Proton oder Neutron.

z.B.: $A = 67$ $^{67}\text{Ga} - ^{67}\text{Zn}$ Rumpf = 30 Protonen + 36 Neutronen

Die in solchen Kernaaren beobachtete Massendifferenz wird auf den Unterschied in der Coulombenergie zurückgeführt, die im β -Zerfall gemessen werden kann, z.B.:



Für eine homogen geladene Kugel mit Radius R ist die Coulombenergie

$$\Delta E_{\text{Coul}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{q^2}{R}$$

und daher
$$\Delta E_{\text{Coul}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{R} \frac{Z^2 - (Z-1)^2}{2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{R_0} \cdot A^{2/3}$$

wobei Z die Ordnungszahl des Mutterkerns ist.

Die Energiebilanz läßt sich schreiben

$$M(^{15}\text{O})c^2 = M(^{15}\text{N})c^2 + m_e c^2 + m_\nu c^2 + T_{e^+} + T_\nu$$

$$m_{e^+} = m_{e^-} = m_0; \quad T_{e^+} + T_\nu = T_{\text{ges}} = T_{\text{max}}$$

$$\{ M(^{15}\text{O}) - M(^{15}\text{N}) \} c^2 = m_0 c^2 + T_{\text{max}}$$

$$\{ M(^{15}\text{O}) - M(^{15}\text{N}) \} c^2 = \{ M_p - M_n \} c^2 - \Delta B_{\text{Nukl}} + \Delta B_{\text{Coul}}$$

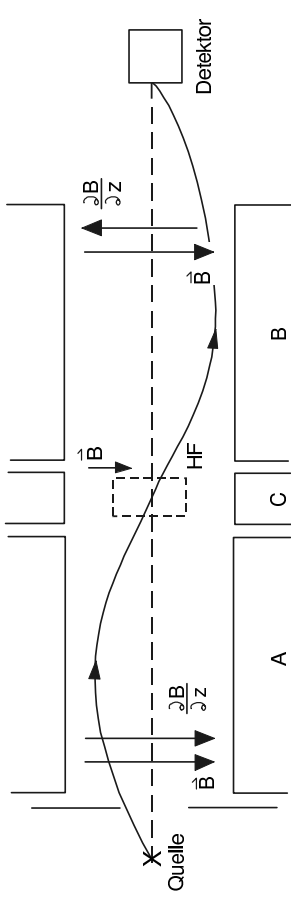
$$\Rightarrow T_{\text{max}} = (M_p - M_n) c^2 - m_0 c^2 - \Delta B_{\text{Nukl}} + \Delta B_{\text{Coul}}$$

$$T_{\text{max}} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{R_0} A^{2/3} = 1,80 \text{ MeV}$$

Hierbei wurde angenommen, daß der nukleare Beitrag zur Bindungsenergie in den Spiegelkernen gleich ist, d.h. $\Delta B_{\text{Nukl}} = 0$. Diese Annahme wird durch die experimentellen Ergebnisse bestätigt.

Messung magnetischer Momente

Atomstrahl- (Molekülstrahl-) methode nach Rabi (1938)



C homogenes Feld HF Hochfrequenzspule

In der Originalapparatur von Rabi waren die inhomogenen Magnetfelder A und B gleichgerichtet und gleich groß, jedoch mit entgegengesetztem Gradienten.

Im inhomogenen Magnetfeld erfährt ein Dipol eine Kraft $K = \mu_z \cdot \frac{\partial B}{\partial z}$

Die Energie des Dipols im homogenen Magnetfeld C ist $E = \mu \cdot B \cdot \frac{m}{I}$

Durch ein hochfrequentes Feld im Bereich C kann sich die Orientierung des Dipols ändern. Ändert sich m um eine Einheit, ist damit eine Energieänderung

$$\Delta E = \frac{\mu \cdot B}{I} = \hbar \cdot \omega$$

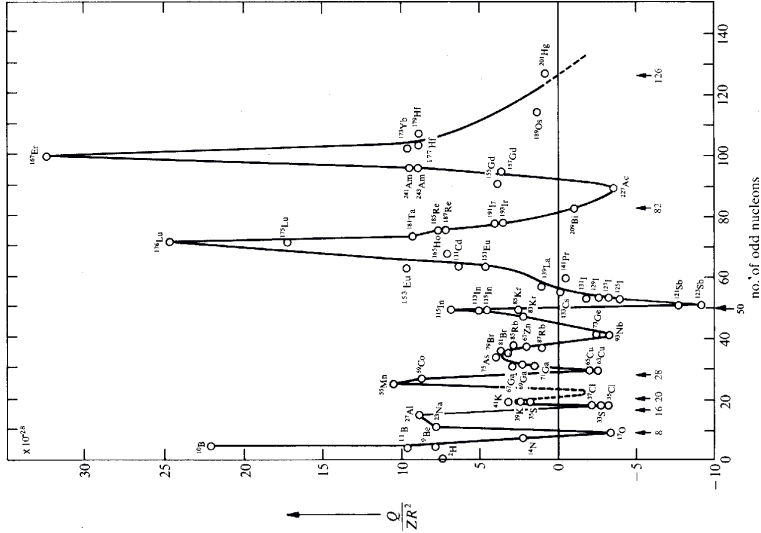
verbunden (ω = Larmorfrequenz). Durch Messung von ω kann somit μ bestimmt werden.

.Spezialfälle:

$$K = 0: \quad Q = -\frac{I}{2I+3} \cdot Q$$

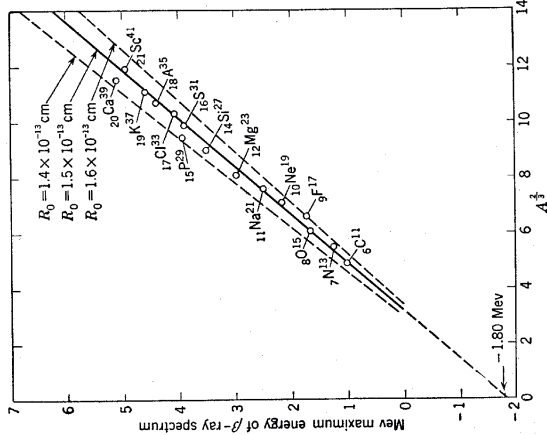
$$K = I: \quad Q = \frac{I(2I-1)}{(I+1)(2I+3)} \cdot Q$$

Man beachte, daß für Kerne mit $K = I = 0$ sowie $K = I = 1/2$ das Quadrupolmoment im Laborsystem verschwindet. Darüber hinaus gilt, daß alle statischen elektrischen Multipolmomente für ungerade Werte von λ verschwinden und alle statischen magnetischen für gerade Werte von λ .

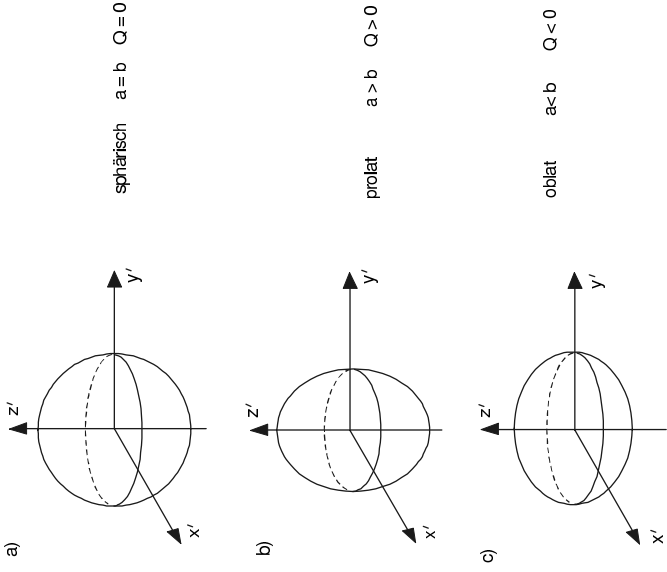


aus [Seg77]

Quadrupolmomente von Kernen in Abhängigkeit von der Zahl des letzten unpaarigen Nukleons.



Spezialfälle:



Übergang zur Quantenmechanik

Die Integrale sind als Operatoren aufzufassen, und das Quadrupolmoment ist als Erwartungswert zu berechnen.

Definition des Operators $e \cdot \hat{Q} = \int \rho(\vec{r}') \cdot r'^2 (3 \cos^2 \theta' - 1) d\tau'$

Man erhält das Quadrupolmoment im körperfesten System als

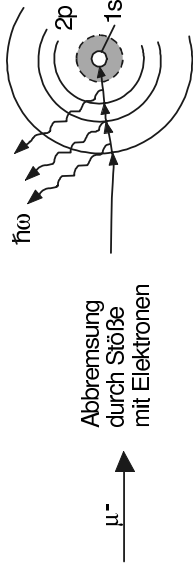
$$Q' = \langle \hat{Q} \rangle = \langle \Psi | \hat{Q} | \Psi \rangle = \int \Psi^* \hat{Q} \Psi d\tau'$$

$$eQ' = \langle \Psi | \int \rho(\vec{r}') r'^2 (3 \cos^2 \theta' - 1) d\tau' | \Psi \rangle$$

Das im Labor gemessene Quadrupolmoment erhält man durch eine Transformation des Operators vom körperfesten System in das Laborsystem. Man erhält für die maximale Komponente in Richtung des Gesamtdrehimpulses, die als „spektroskopisches“ Quadrupolmoment bezeichnet wird. Zur Definition der Quantenzahl K s. S. 124.

$$Q = \langle \Psi_{I,m=I} | \hat{Q}^{Lab} | \Psi_{I,m=I} \rangle = \frac{3K^2 - I(I+1)}{(I+1)(2I+3)} Q'$$

Am Synchrozyklotron des CERN (Genf) wurde eine Reihe von Experimenten durchgeführt, um Kernradien auf diese Weise zu bestimmen. Die Myonen wurden dabei auf folgende Weise erzeugt: Protonen wurden auf 385 MeV beschleunigt und auf ein erstes Target geschossen. Nach Durchgang durch dieses Target erhielt man u.a. geladene Pionen, die anschließend in Myonen und Neutrinos zerfielen. Mit Hilfe eines Magneten wurden die negativen Myonen ausgefiltert und auf das eigentliche Target gelenkt. Nach Abbremsung durch Stöße mit den Elektronen des Targets werden die Myonen in äußere Schalen der Targetatome eingefangen und gelangen schließlich in die 1s-Bahn unter Emission von Röntgenstrahlung.



Die Energie eines Elektrons im Bohr'schen Atommodell ist

$$E = T + V = T - B = -\frac{1}{2} B = -\frac{Z^2 e^2 m_e}{2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{(Z\alpha)^2 m_e c^2}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Damit berechnet sich die Übergangsenergie für einen punktförmigen Kern zu

$$\Delta E_{e^-} = \frac{(Z\alpha)^2 m_e c^2}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{n^2} \right\} \quad (\text{Lyman - Serie})$$

Für myonische Atome ist $\Delta E_{\mu^-} = 207 \cdot \Delta E_{e^-}$

Die Übergangsenergie des μ^- -Atoms muß quantenmechanisch unter Berücksichtigung der Myon-Wellenfunktionen berechnet werden. In diese Rechnungen geht der Kernradius empfindlich ein. Man erhält eine Verschiebung der Röntgenenergien gegenüber dem Punktkern.

Beispiele

Element	Z	Theorie (Punktkern) E(2p - 1s) (MeV)	Experiment E (MeV)
Al	13	0.48	0.35
Cu	29	1.83	1.55
Pb	82	16.41	6.02

Monopolmoment ($\lambda = 0$) (eine Komponente: Skalar)

$$M_{00} = \frac{Q}{\sqrt{4 \cdot \pi}}$$

Dipolmoment ($\lambda = 1$) (drei Komponenten: Vektor)

$$M_{1\mu} = \int r' \rho(r') \cdot Y_{1\mu}(\theta', \varphi') d\tau'$$

In kartesischen Koordinaten lautet das Dipolmoment

$$\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d\tau'$$

oder komponentenweise

$$p_x = \int x' \rho(\vec{r}') d\tau$$

$$p_y = \int y' \rho(\vec{r}') d\tau$$

$$p_z = \int z' \rho(\vec{r}') d\tau$$

Quadrupolmoment ($\lambda = 2$) (sechs Komponenten: Tensor)

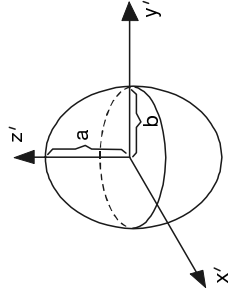
Hier sind nur 5 Komponenten ersichtlich:

$$M_{2\mu} = \int r'^2 \rho(\vec{r}') \cdot Y_{2\mu}(\theta', \varphi') d\tau'$$

In kartesischen Koordinaten erhält man für die Komponenten des Quadrupoltensors

$$Q_{ik} = \int \rho(\vec{r}') \cdot \{3x_i' x_k' - r'^2 \delta_{ij}\} d\tau' \quad i, j = 1, 2, 3$$

Für eine axialsymmetrisch deformierte Ladungsverteilung (gut erfüllt für die meisten Kerne) werden alle $Q_{ik} = 0$ für $i \neq k$. Weiterhin gilt $Q_{xx} = Q_{yy} = -Q_{zz}/2$. Das Quadrupolmoment ist in diesem Fall durch eine einzige Größe gegeben:



$$Q = Q_{zz} = \int \rho(\vec{r}') \cdot \{3z'^2 - r'^2\} d\tau'$$

Für ein homogen geladenes Rotationsellipsoid mit der Gesamtladung Ze erhält man:

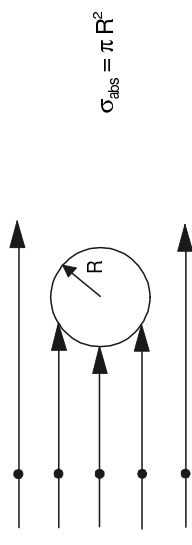
$$Q = \frac{2}{5} \cdot Z \cdot e \cdot (a^2 - b^2)$$

“Nukleare“ Methoden zur Bestimmung von Kernradien

Streuung schneller Neutronen

Neutronen treten mit einem Targetkern nur über die kurzreichweitigen Kernkräfte in Wechselwirkung. Streuexperimente geben daher Auskunft über den Radius der Kernmassenverteilung.

Der klassische Wirkungsquerschnitt für die Absorption schneller Neutronen ergibt sich zu:

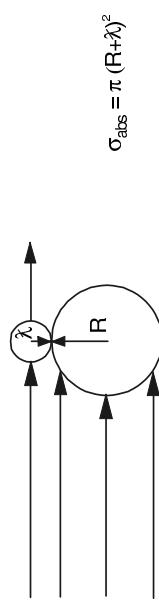


Dabei wurde angenommen:

- 1) Die Neutronen seien punktförmig.
- 2) Der Targetkern sei „schwarz“, d.h. ein Neutron wird absorbiert, wenn es den Targetkern trifft, und es tritt keine Wechselwirkung ein, wenn der Targetkern verfehlt wird.

Den wellenmechanischen Wirkungsquerschnitt für die Absorption erhält man aus der folgenden Überlegung:

Wegen der Unschärferelation wird dem Neutron eine Ortsunschärfe in der Größenordnung der de Broglie-Wellenlänge zugeschrieben, so daß der Absorptionsquerschnitt vergrößert wird.

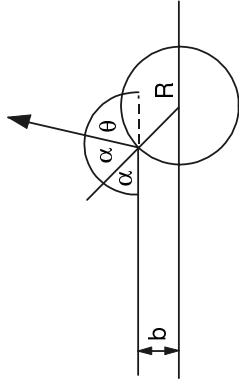


Totaler Wirkungsquerschnitt

Es gilt allgemein, daß neben der Absorption auch immer Streuung stattfindet (Analogie zur Optik).

Der Wirkungsquerschnitt für Streuung an einer harten Kugel kann folgendermaßen berechnet werden. Dazu nehmen wir ein kugelförmiges Streupotential an.

$$V(r) = \begin{cases} \infty & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$



Esgilt :

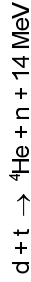
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta = \frac{b}{\sin\theta} \cdot \left|\frac{db}{d\theta}\right|$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\theta = \frac{R^2}{4} \Rightarrow \sigma_{Streu} = \pi R^2$$

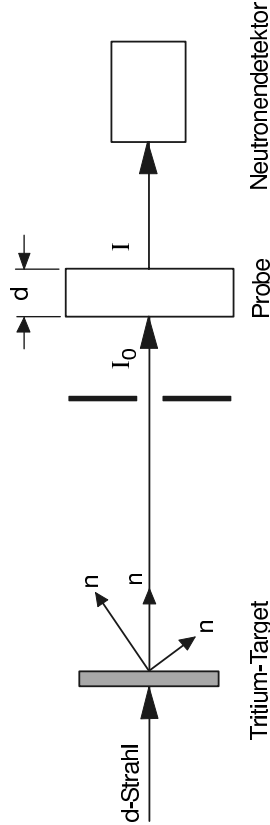
$$\sigma_{tot} = \sigma_{Absorption} + \sigma_{Streu} = 2\pi R^2$$

Experimente

Die ersten Experimente waren möglich, nachdem mit Teilchenbeschleunigern schnelle, monoenergetische Neutronen über Kernreaktionen erzeugt werden konnten, z.B. über die Reaktion



Das Prinzip des Experimentaufbaus:



Absorption und Streuung in der Probe führen dazu, daß der Neutronendetektor einen geschwächten Neutronenfluß registriert. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Streuscheibchen getroffen wird, ist

$$W = \omega \cdot \sigma \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{\rho \cdot L}{M} \cdot d \quad [\omega] = \text{cm}^{-2}$$

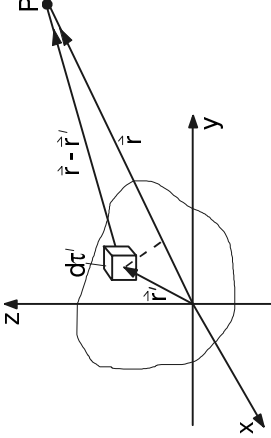
$$I = I_0 \cdot e^{-\mu d}$$

$$\mu = \frac{\rho \cdot L}{M} \cdot \sigma_{tot}$$

Elektrisches Quadrupolmoment

Bisher wurde angenommen, die Kerne seien kugelsymmetrisch. Jetzt sollen auch Abweichungen von der Kugelgestalt zugelassen werden.

Das Potential einer beliebigen Ladungsverteilung im Punkt P ist $V(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$



Mit den Standardformeln

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{r'^{\lambda}}{r^{\lambda+1}} \cdot P_{\lambda}(\cos\alpha), \quad \alpha \text{ ist der Winkel zwischen } \vec{r} \text{ und } \vec{r}'$$

und

$$P_{\lambda}(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2\lambda+1} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \cdot Y_{\lambda\mu}^*(\theta', \varphi')$$

läßt sich das Potential schreiben

$$V(\vec{r}) = \sum_{\lambda\mu} \frac{4\pi}{2\lambda+1} \cdot \frac{1}{r^{\lambda+1}} \cdot Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \cdot \int r'^{\lambda} \cdot \rho(\vec{r}') \cdot Y_{\lambda\mu}^*(\theta', \varphi') d\tau'$$

Die Ausdrücke $M^{\lambda}_{\lambda\mu} = \int r'^{\lambda} \cdot \rho(\vec{r}') \cdot Y_{\lambda\mu}^*(\theta', \varphi') d\tau'$ oder

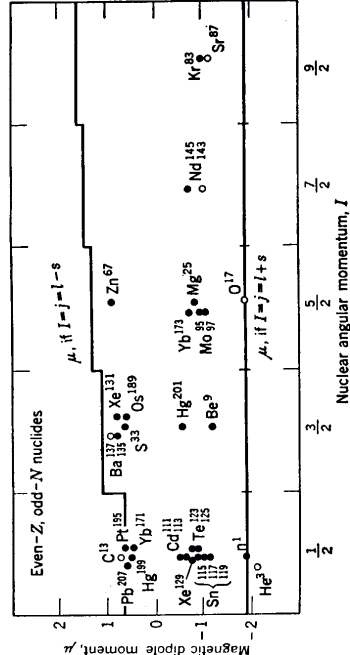
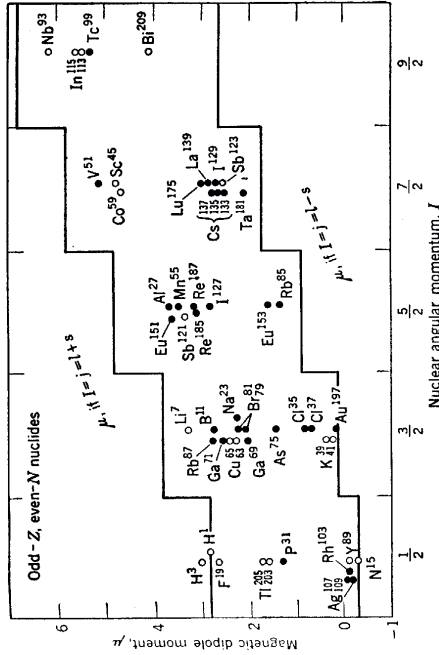
$$M_{\lambda\mu} = \int r'^{\lambda} \cdot \rho(\vec{r}') \cdot Y_{\lambda\mu}(\theta', \varphi') d\tau'$$

sind die Multipolmomente der Ladungsverteilung.

Für die Kopplung von Spin und Bahndrehimpuls gibt es zwei Möglichkeiten:
 $j = \ell \pm 1/2$. Der g-Faktor läßt sich dann schreiben als

$$g = g_\ell \pm \frac{(g_s - g_\ell)}{2\ell + 1} \quad \text{für } j = \ell \pm \frac{1}{2}$$

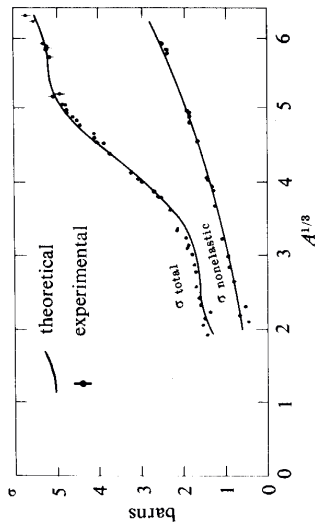
Für Protonen und Neutronen erhält man jeweils 2 Linien, auf denen μ liegen sollte. Diese Erwartung ist jedoch nur für wenige Kerne erfüllt, was wegen des einfachen Modells nicht verwunderlich ist. Besonders für Kerne zwischen Schalenabschlüssen (vgl. Schalenmodell, weiter unten) muß das Modell verfeinert werden, da einerseits Nukleonen außerhalb eines Schalenabschlusses auf kompliziertere Weise koppeln können, andererseits diese Kerne deformiert sein können. Eine permanente Deformation liefert einen zusätzlichen Beitrag zum magnetischen Moment.



Schmidt - Linien und experimentelle magnetische Momente aus [Eva55]

Aus dem Experiment wird das Verhältnis I/I_0 bestimmt und mit obigen Formeln der Radius R berechnet. Dieser Radius ist ein effektiver Radius, der von der Reichweite der Neutron-Kern-Wechselwirkung abhängt.

Wirkungsquerschnitte für die Wechselwirkung von 14,4 MeV-Neutronen mit verschiedenen Kernen.



aus [Fer58]

“Optisches“ Modell der Nukleonenstreuung

In Wirklichkeit werden Neutronen nicht total absorbiert, da Kernmaterie für Neutronen teilweise transparent ist. In Analogie zur Optik wird ein komplexes Potential eingeführt, dessen Imaginärteil für die Absorption verantwortlich ist. Ein vielfach benutzter Ansatz lautet

$$U(r) = -V f(r) - iW g(r) + U_{Coul}(r)$$

$$f(r) = \left\{ 1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right) \right\}^{-1}$$

Woods – Saxon – Potential

$$g(r) = \left\{ 1 + \exp\left(\frac{r-R'}{a'}\right) \right\}^{-1}$$

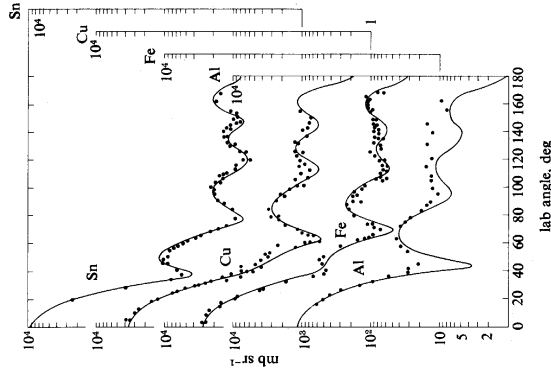
“Volumen“-Absorption

oder

$$g(r) = 4 \cdot \exp\left(\frac{r-R'}{a'}\right) \cdot \left\{ 1 + \exp\left(\frac{r-R'}{a'}\right) \right\}^{-2}$$

“Oberflächen“-Absorption

Die Parameter V, W, R, R', a, a' werden durch Anpassung an experimentelle Daten erhalten.



Differentielle Wirkungsquerschnitte für die elastische Streuung von 14.4-MeV Neutronen an verschiedenen Kernen.

aus [Fer58]

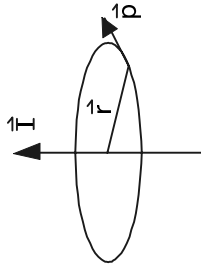
1.4 Spin, Parität, magnetische und elektrische Momente

Neben der Energie sind Drehimpuls, Parität, magnetisches Dipolmoment und elektrisches Quadrupolmoment Eigenschaften eines Atomkerns. Die Gesamtheit dieser Größen beschreibt einen Kernzustand. Drehimpuls (Spin) und Parität können nur diskrete Werte annehmen (Quantenzahlen); Energie, magnetische und elektrische Momente können beliebige Werte annehmen.

Drehimpuls

Experimente ergeben, daß viele Kerne (auch im Grundzustand) einen von Null verschiedenen Drehimpuls besitzen.

klassisch:



$$\vec{I} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Erhaltungssatz: Der Drehimpuls eines abgeschlossenen Systems ist konstant.

Nukleonen:

Erwartung: Experiment:

Proton: $g_l = 1$ $g_s = 2$ $g_l = 1$ $g_s = 5.5855$

Neutron: $g_l = 0$ $g_s = 0$ $g_l = 0$ $g_s = -3.8263$

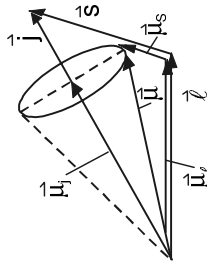
anomales magnetisches Moment der Nukleonen

Aus den anomalen magnetischen Spinnmomenten läßt sich folgern, daß Proton und Neutron keine Elementarteilchen sind, sondern sich virtuell umwandeln, z.B.: $n \leftrightarrow p + \pi^-$. Es gibt noch keine befriedigende Erklärung der Spinnmomente mit Hilfe des Mesonenfeldes.

Für gg-Kerne erwartet man, daß das gesamte magnetische Moment verschwindet, da die Spins paarweise antiparallel eingestellt sind (Paarung). Diese Erwartung wird durch das Experiment bestätigt.

In ug- und gu-Kernen sollte das magnetische Moment durch das unpaarige Nukleon bestimmt werden. Diese Erwartung wurde 1937 durch Schmidt und Schüller in ausführlichen Meßreihen untersucht (optische Hyperfeinstrukturaufspaltung).

Für einen ug- oder gu-Kern ergibt sich folgendes Kopplungsschema:



$$\vec{\mu} = g_l \cdot \vec{l} + g_s \cdot \vec{s}$$

$$\vec{\mu} = g \cdot \vec{j}$$

Nur die Projektion von μ auf j ist meßbar. Man berechnet

$$\mu_j = \frac{(g_l \vec{l} + g_s \vec{s}) \cdot \vec{j}}{|\vec{j}|} \cdot \frac{|\vec{j}|}{|\vec{j}|}$$

wobei der g-Faktor
$$g = \frac{g_l \left[j(j+1) + \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right] + g_s \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) + \frac{3}{4} \right]}{2 j(j+1)}$$

Als Ergebnis läßt sich festhalten, daß das gyromagnetische Verhältnis genau so groß ist wie für einen Kreisstrom.

$$\text{Für ein Proton ergibt sich} \quad \mu = \frac{e}{2m_p} \hbar \quad , \quad I = s = \frac{1}{2} \hbar$$

Übergang zur quantenmechanischen Beschreibung

Änderungen: 1. Der Drehimpuls wird quantisiert, die Einheit ist $\hbar$,
2. Das gyromagnetische Verhältnis kann vom klassischen Wert abweichen.

Für das magnetische Moment wird daher angesetzt:

$$\vec{\mu} = g \mu_N \cdot \left(\frac{\vec{I}}{\hbar} \right)$$

$$\gamma \cdot \hbar \Rightarrow a) \mu_B = \frac{e\hbar}{2mc} = 5,788 \cdot 10^{-15} \frac{\text{MeV}}{\text{Gauss}} \quad (\text{Bohrsches Magneton})$$

$$b) \mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 3,152 \cdot 10^{-18} \frac{\text{MeV}}{\text{Gauss}} \quad (\text{Kernmagneton})$$

Definition des magnetischen Moments: $\vec{\mu} = g \cdot \vec{I}; \quad \mu = \max(\mu_Z)$

Quantenmechanisch ist μ als Erwartungswert zu berechnen

$$\mu = \langle \mu_Z \rangle_{I,m=I} = \int \Psi_{I,m=I}^* \cdot \hat{\mu}_Z \cdot \Psi_{I,m=I} \, d\tau$$

Experimentelle Ergebnisse:

Für Elektronen der Hülle erhält man:

$$\text{Bahnbewegung} \quad g_e = 1 \quad (\text{wie klassisch})$$

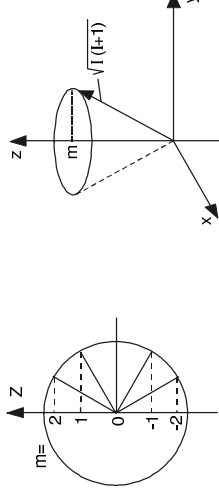
$$\text{Spin} \quad g_s = 2,00232 \quad (\text{anomal})$$

Die Abweichung des Spinnmoments vom Wert 2,00000 wird durch die Quantenelektrodynamik erklärt.

quantenmechanisch:

Erhaltungsgrößen sind nur der Betrag des Drehimpulses und die Projektion auf eine „Quantisierungsachse“. Die Erwartungswerte der Operatoren $\hat{I}^2$ und $\hat{I}_z$ sind gleichzeitig meßbar.

$$\begin{aligned} \langle \hat{I}^2 \rangle &= I(I+1) \hbar^2 \\ \langle \hat{I}_z \rangle &= m \hbar; \quad m_0 = -I, -I+1, \dots, I-1, I; \quad (2I+1 \text{ Werte}) \end{aligned}$$



Daß neben Betrag und z-Komponente des Drehimpulses die x- und y-Komponenten nicht gleichzeitig gemessen werden können, veranschaulicht man sich so, daß der Drehimpulsvektor um die z-Achse eine Präzession ausführt.

Den Betrag des Kerndrehimpulses schreibt man üblicherweise als dimensionslose Zahl I , die gleich dem Maximum der z-Komponente I_z ist, also $I = \text{Max}(I_z) / \hbar$.

Der Gesamtdrehimpuls eines Kems setzt sich aus den Bahndrehimpuls und den Eigendrehimpuls (Spins) aller Nukleonen zusammen.

$$\vec{I} = \sum_i (\vec{\ell}_i + \vec{s}_i); \quad I_z = \sum_i (\ell_{zi} + s_{zi})$$

$\vec{\ell}$ ist der Bahndrehimpuls
 $\vec{s}$ entspricht dem "Drall"

Zur Bildung der Vektorsumme gibt es zwei verschiedene Kopplungsmöglichkeiten:

1.) LS-Kopplung (Russel-Saunders-Kopplung)

$$\vec{I} = \vec{L} + \vec{S} \equiv \sum_i \vec{\ell}_i + \sum_i \vec{s}_i$$

2.) jj-Kopplung

$$\vec{I} = \sum_i \vec{j}_i \quad \text{mit} \quad \vec{j}_i = \vec{\ell}_i + \vec{s}_i$$

Ohne zusätzliche Annahmen werden in Kernen mit großen Nukleonenzahlen hohe Drehimpulse erwartet. Dagegen ist der experimentelle Befund:

- gg-Kerne: $I = 0$ (ohne Ausnahme!)
- ug-, gu-Kerne: I halbzahlig, relativ klein ($I < 9/2$)
- uu-Kerne: I ganzzahlig ($I \neq 0, I < 6$).

Aus diesem Ergebnis läßt sich folgern:

- gg-Kerne: Die Drehimpulse der Nukleonen stellen sich paarweise antiparallel ein, so daß $I = 0$.
- ug-, gu-Kerne: Der Kern besteht aus einem gg-Rumpf plus einem unpaarigen Nukleon. Der Gesamtdrehimpuls ist durch den Drehimpuls des unpaarigen Nukleons gegeben (Hinweis auf „Einteilchenstruktur“ der Kerne, Grundlage des Schalenmodells, das weiter unten behandelt wird).
- uu-Kerne: Der Kern besteht aus einem gg-Rumpf und je einem unpaarigen Proton und Neutron. Der Gesamtdrehimpuls ist durch die Vektorsumme der Drehimpulse der unpaarigen Nukleonen gegeben.

Parität

Die Parität hat kein klassisches Analogon. Sie beschreibt die Symmetrie (Spiegelungsverhalten) der Wellenfunktion am Ursprung.

Paritätsoperation:

$$\hat{P} \Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r}) = \pi \Psi(\vec{r})$$

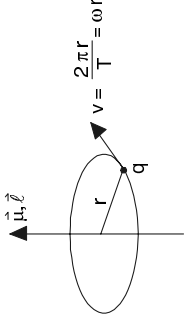
Die Parität kann nur die Werte $\pi = \pm 1$ annehmen.

Bei Prozessen, die der starken oder elektromagnetischen Wechselwirkung unterliegen, bleibt die Parität erhalten. π ist eine „gute“ Quantenzahl. Dagegen wird bei der schwachen Wechselwirkung (β -Zerfall) die Paritätserhaltung verletzt (näheres hierzu später).

Magnetisches Dipolmoment

Die im Kern sich bewegenden Protonen bilden Kreisströme, die Magnetfelder zur Folge haben. Man erwartet daher, daß Kerne ein magnetisches Moment besitzen.

Klassische Vorbetrachtung



Bahndrehimpuls $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$; $|\vec{l}| = m \omega r^2 (*)$

Das magnetische Dipolmoment ist gegeben durch $\mu = F \cdot i = \pi r^2 i$

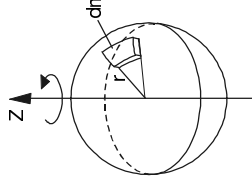
Somit $\mu = \frac{\omega r^2 q}{2c} (**)$ mit $i = \frac{q}{c} v = \frac{q \omega}{c 2\pi}$

Aus (*) und (**) folgt: $\mu = \frac{q}{2mc} \cdot \ell = \gamma \cdot \ell$ $\gamma = \frac{q}{2mc}$ ist das gyromagnetische Verhältnis

Wir betrachten jetzt eine rotierende Ladungsverteilung (Annahme: Kugel mit homogener Ladungs- und Massenverteilung)

Der Drehimpuls (Spin) der Kugel ist gegeben durch

$$I = \int \omega r^2 dm = \int \omega r^2 \rho_m dV, \quad \rho_m = \text{Massendichte}$$



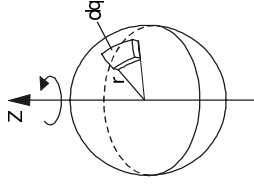
$$I = \omega \rho_m \int r^2 r d\phi dr dz \quad \text{in Zylinderkoordinaten}$$

$$I = \dots = \frac{2}{5} \omega M R^2,$$

M = Gesamtmasse,
 R = Radius der Kugel

Magnetisches Moment

$$\mu = \int \frac{\omega r^2}{2c} dq = \int \frac{\omega r^2}{2c} \rho_e dV, \quad \rho_e = \text{Ladungsdichte}$$



Integration in Zylinderkoordinaten

$$\mu = \frac{1}{5} \frac{\omega}{c} Q R^2, \quad \text{also}$$

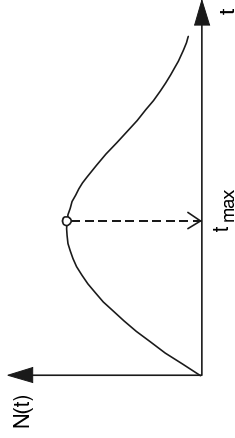
$$\vec{\mu} = \frac{Q}{2Mc} \cdot \vec{I} = \gamma \cdot \vec{I}$$

- b) Ein mit der Rate λ_1 zerfallendes Radionuklid werde durch den Zerfall eines Mutterkerns mit der Rate λ_2 nachgebildet. Daher

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda_1 \cdot N_1(t) + \lambda_2 \cdot N_0(t) = -\lambda_1 \cdot N_1(t) + \lambda_2 \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda_2 t}$$

Diese Differentialgleichung wird gelöst durch $N_1(t) = \frac{N_0 \cdot \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} [e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}]$

Die Zeit bis zum Erreichen der maximalen Anzahl der Kerne $N_1(t)$ ist $t_{\max} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$



Dieses Beispiel zeigt, daß die Anzahl der radioaktiven Tochterkerne mit der Zeit sogar anwachsen kann.

- c) Zerfallsketten $N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow N_3 \rightarrow \dots N_k$

Die zeitliche Änderung von N_i ist gegeben durch

$$\frac{dN_i}{dt} = -\lambda_i \cdot N_i + \lambda_{i-1} \cdot N_{i-1}$$

Dieses System von Differentialgleichungen wird durch folgenden Ansatz gelöst:

$$\begin{aligned} N_1 &= C_{11} e^{-\lambda_1 t} \\ N_2 &= C_{21} e^{-\lambda_1 t} + C_{22} e^{-\lambda_2 t} \\ N_3 &= C_{31} e^{-\lambda_1 t} + C_{32} e^{-\lambda_2 t} + C_{33} e^{-\lambda_3 t} \\ &\vdots \\ N_k &= C_{k1} e^{-\lambda_1 t} + \dots + C_{kk} e^{-\lambda_k t} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten C_{ij} ergeben sich aus der Rekursionsformel

$$C_{ij} = C_{i-1,j} \cdot \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j - \lambda_j} \quad \text{für } i \neq j$$

sowie aus den Randbedingungen für $t = 0$

$$N_1(0) = C_{11}, \quad N_2(0) = C_{21} + C_{22}, \quad \text{usw.}$$

Spezialfall $\ell = 0$:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) u(r) = 0$$

$$\text{a) } r \leq R \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + k^2 u = 0 \quad \text{mit } k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0)$$

$$u = A \cdot \sin(kr)$$

$$\text{b) } r > R \quad \frac{d^2 u}{dr^2} - \kappa^2 u = 0 \quad \text{mit } \kappa^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} E$$

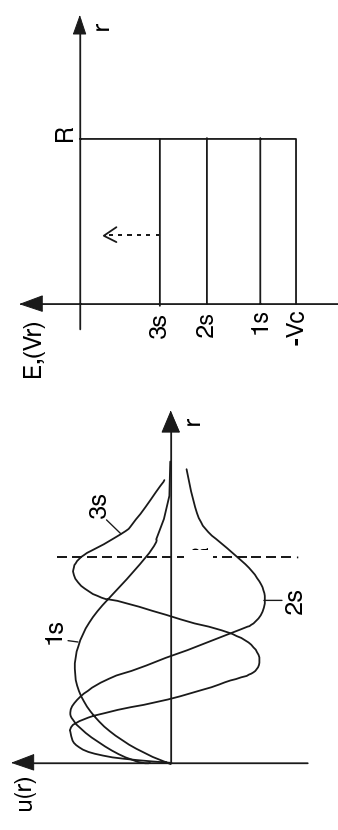
$$u = B \cdot e^{-\kappa r}$$

Die Randbedingungen (Stetigkeit von Funktionswert und Ableitung an der Stelle $r = R$) erfordern

$$A \cdot \sin(k \cdot R) = B e^{-\kappa \cdot R}$$

$$k \cdot A \cdot \cos(k \cdot R) = -\kappa \cdot B \cdot e^{-\kappa \cdot R}$$

Es gibt nur dann Lösungen für A und B , wenn $\cotg kR = -\kappa/k$, d.h. für diskrete Werte von E .



Für beliebige Werte von ℓ gilt:

1. Für jeden ℓ -Wert existiert eine Serie diskreter Energiezustände. Die dazugehörigen Radialwellenfunktionen unterscheiden sich in der Anzahl der Nullstellen (Knoten).
2. Jeder Zustand ist $(2\ell+1)$ -fach entartet.
3. Mit zunehmendem ℓ verschiebt sich der tiefste Zustand nach oben.
4. Der höchste besetzte Zustand liegt um die Separationsenergie unterhalb $E = 0$.

Der Kern als Fermigas

Grundlage des Fermigas-Modells:

- Annahme eines Rechteckpotentials.
- Es bestehe keine Wechselwirkung zwischen den Nukleonen.

Im Inneren des Potentialtopfes ist $\text{grad } V = 0$, d.h. die Nukleonen bewegen sich wie freie Teilchen. Der Zustand eines Nukleons ist durch seinen Ort und Impuls bestimmt. Wegen der Unschärferelation sind diese Größen verbunden mit einer Orts- und Impulsunschärfe. Das Phasenraumvolumen ist gegeben durch

$$\Delta x \Delta y \Delta z \cdot \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \approx h^3 \quad (\text{Phasenraum})$$

Die Ortsunschärfe ist hier bestimmt durch das Kernvolumen

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = \tau = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \cdot A$$

Die Impulsunschärfe ist gegeben durch die Dicke der Schale auf der „Impulsugel“

$$\Delta p = 4\pi p^2 dp$$

Jeder Zustand nimmt im Phasenraum das Volumen h^3 ein. Die Anzahl der Zustände auf der Impulskugelschale ist daher gegeben durch

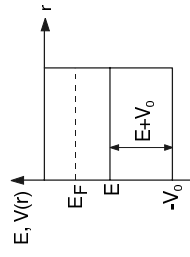
$$dn = \frac{\tau \cdot 4\pi \cdot p^2}{h^3} dp \quad \text{Zustandsdichte "freier" Teilchen}$$

Dieses Ergebnis ist auch herleitbar durch Abzählen der Zustände, die durch Lösung der Schrödingergleichung erhalten werden (vgl. z.B. [May84]). Jeder Zustand kann unter Berücksichtigung des Pauli-Prinzips durch 4 Teilchen besetzt werden: 2 Protonen und 2 Neutronen mit jeweils $m = \pm 1/2 \hbar$.

Man erhält daher für die Anzahl der Teilchen $\frac{dN}{dp} = 4 \cdot \frac{\tau \cdot 4\pi \cdot p^2}{h^3} = \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{\tau \cdot p^2}{\hbar^3}$

Der Übergang von der Impuls- zur Energieskala ergibt mit

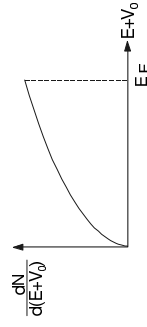
$$p^2 = 2m(E + V_0)$$



$$2p dp = 2m d(E + V_0)$$

$$dp = \sqrt{\frac{m}{2(E + V_0)}} d(E + V_0)$$

die Anzahl der Teilchen im Energieintervall $(E + V_0)$



$$\frac{dN}{d(E + V_0)} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \cdot \frac{m^2}{\hbar^3} \cdot \tau \cdot \sqrt{E + V_0}$$

Unter der Halbwertszeit versteht man die Zeit, die vergeht, bis nur noch die Hälfte der anfänglichen Zahl von Kernen vorhanden ist. $N(T_{1/2}) = N_0/2$. $T_{1/2}$ ergibt sich aus der mittleren Lebensdauer zu $T_{1/2} = \ln 2 \cdot \tau = 0.693 \tau$.

Die Aktivität einer radioaktiven Probe folgt ebenfalls dem exponentiellen Zerfallsgesetz:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N = -\lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Weitere Definitionen

Einem zerfallenden Zustand wird die Energieunschärfe $\Delta E = \hbar / \Delta t$ zugeordnet. Man definiert eine „Zerfallsbreite“ $\Gamma = \hbar / \tau = \hbar \lambda$. Kann ein Kern auf verschiedenen Wegen zerfallen, so ergibt sich für die totale Zerfallswahrscheinlichkeit

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots \text{ und ebenso } \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots$$

Diese Gesetze gelten sowohl für den radioaktiven Zerfall unter Teilchenemission als auch für den Zerfall angeregter Kernzustände unter Emission elektromagnetischer Strahlung.

Beispiele zum Zerfallsgesetz

- Ein Radionuklid werde mit konstanter Produktionsrate $q \text{ (s}^{-1}\text{)}$ erzeugt, wobei es gleichzeitig zerfällt. Die zeitliche Änderung von N ergibt sich zu

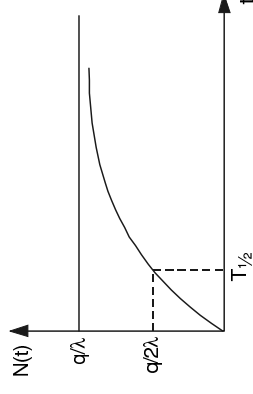
$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N + q$$

Durch Integration erhält man:

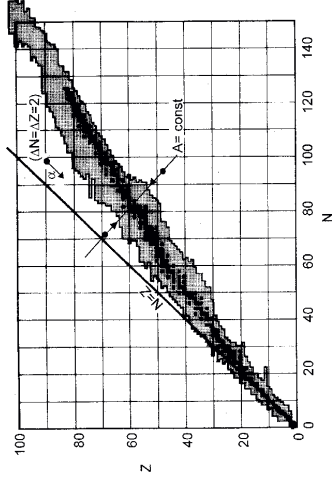
$$N(t) = \frac{q}{\lambda} + C \cdot e^{-\lambda t}$$

$$N(t) = \frac{q}{\lambda} \cdot (1 - e^{-\lambda t}), \text{ da } N(t=0) = 0$$

In der Sättigung zerfallen pro Zeiteinheit genau so viele Kerne wie neu gebildet werden. Es hat daher keinen Zweck, z.B. an einem Reaktor länger als etwa 3 Halbwertszeiten zu bestrahlen.



Im N-Z-Diagramm:



Verschiedene Zerfallstypen treten häufig gemischt auf (z.B. Sequenzen von α - und β -Zerfällen). β^+ -Zerfälle kommen in der Natur nicht vor, sondern nur nach vorangegangenen künstlichen Kernumwandlungen.

Kenngößen eines Radionuklids

1. Zerfallstyp (Art der emittierten Strahlung),
2. Zerfallsenergie (Energie der Strahlung),
3. Halbwertszeit (Intensität der Strahlung bei gegebener Substanzmenge).

Eigenschaften des radioaktiven Zerfalls

Der Zerfall erfolgt statistisch. Der Zeitpunkt des Zerfalls eines willkürlich herausgegriffenen Kerns ist nicht vorhersagbar. Es gibt nur Wahrscheinlichkeitsaussagen. Es gibt eine Zerfallskonstante, die ein Maß für die Wahrscheinlichkeit eines Zerfalls ist. Die Zerfallskonstante ist unabhängig von der Vorgeschichte sowie äußeren Bedingungen, wie Druck, Temperatur usw. Bei extrem hohen Drucken wurde jedoch eine geringe Änderung der Zerfallskonstanten beim β -Zerfall beobachtet.

Zerfallsgesetz

Zur Zeit $t = 0$ werde eine große Zahl N_0 radioaktiver Kerne isoliert. Die Abnahme dN der Teilchenzahl läßt sich schreiben als

$$dN = -\lambda \cdot N(t) dt$$

Integration ergibt für die Anzahl der zur Zeit t noch vorhandenen Kerne

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Der Kehrwert der Zerfallskonstanten λ ist die mittlere Lebensdauer dieser Kerne

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Im Grundzustand des Kerns sind alle Zustände von unten her bis zu einer maximalen Energie E_F (Fermi-Energie) besetzt.

Man erhält also für die Fermi-Energie:

$$\int_0^A dN = A = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{m^2}{\hbar^3} \tau \cdot \int_0^{E_F} \sqrt{E+V_0} d(E+V_0)$$

$$\rightarrow \frac{A}{\tau} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi^2} \frac{m^2}{\hbar^3} \cdot E_F^{\frac{3}{2}} \quad \mapsto \quad E_F = \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m r_0^2}$$

Dieses Ergebnis ist insoweit bemerkenswert, als die Fermi-Energie direkt aus dem Radius-Parameter r_0 folgt, der für alle Kerne nahezu konstant ist. Somit ist E_F für alle Kerne etwa gleich.

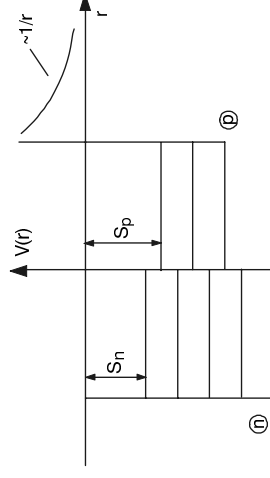
Einsetzen des experimentellen Wertes $r_0 = 1.2$ fm ergibt $E_F \approx 30$ MeV. Mit einer mittleren Separationsenergie von ≈ 8 MeV ergibt sich für die Potentialtiefe der Wert $V_0 \approx 40$ MeV, der gut mit experimentellen Ergebnissen übereinstimmt.

Die mittlere kinetische Energie der Nukleonen im Kern ist

$$\langle E+V_0 \rangle = \frac{1}{A} \cdot \int_0^A (E+V_0) dN = \frac{\int_0^{E_F} (E+V_0)^{\frac{3}{2}} d(E+V_0)}{\int_0^{E_F} (E+V_0)^{\frac{1}{2}} d(E+V_0)} = \frac{3}{5} E_F \approx 18 \text{ MeV}$$

Verallgemeinerung durch Unterscheidung von Neutronen und Protonen

Die Protonen sind wegen der Coulombabstoßung schwächer gebunden als die Neutronen. Man erhält folgende Potentiale:



Schlußbemerkung zum Fermigasmodell

Im Grundzustand verhält sich die Kernmaterie wie ein „entartetes“ Fermigas bei der absoluten Temperatur $T = 0$ (ähnlich Elektronen in Metallen). Angeregte Kernzustände entstehen dadurch, daß Nukleonen in höhere unbesetzte Zustände gebracht werden. Mit zunehmender Anzahl der angehobenen Nukleonen wächst die Anregungsenergie („Kern-temperatur“), und die Eigenschaften der Kernmaterie nähern sich denen von makroskopischer, kondensierter Materie.

2.2 Das Zweinukleonen-Problem

Aussagen über Einzelheiten der Wechselwirkung zwischen Nukleonen lassen sich erhalten aus

- den Eigenschaften gebundener Zustände ($E < 0$),
- den Wirkungsquerschnitten und Winkelverteilungen bei Streuprozessen ($E > 0$).

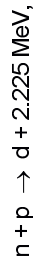
Das System aus 2 Nukleonen ist das einfachste System. Streuvorgänge im pp- und np-System sind experimentell direkt beobachtbar, dagegen ist die nn-Streuung nicht direkt zugänglich. Gebunden existiert nur das np-System (Deuteron). Paare gleicher Nukleonen (Di-Neutron, Di-Proton) bilden keine gebundenen Zustände.

Eigenschaften des Deuterons

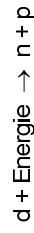
Masse: 2.0141 u (massenspektroskopisch bestimmt)

Bindungsenergie: $B_d = (m_p + m_n - m_d) c^2 = 2.225 \text{ MeV}$

Die Bindungsenergie kann beim Einfang von Neutronen in Wasserstoff als Energie der emittierten Gammastrahlung direkt gemessen werden.



oder als Energie, die zur Photospaltung des Deuterons erforderlich ist.

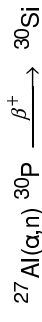


Spin und Parität: $I^\pi = 1^+$

Kapitel 3. Kernumwandlungen

3.1 Allgemeines zum radioaktiven Zerfall; Zerfallsgesetz

Neben stabilen Kernen gibt es „natürlich radioaktive“ Kerne, die sich spontan unter Emission eines Teilchens umwandeln (α -Zerfall, β -Zerfall), oder in zwei Bruchstücke spalten. Für Anwendungen ist die künstliche Radioaktivität als Folge vorangegangener künstlicher Kernumwandlungen besonders wichtig. Von Joliot und Curie wurde 1934 die erste künstliche Kernumwandlung entdeckt:



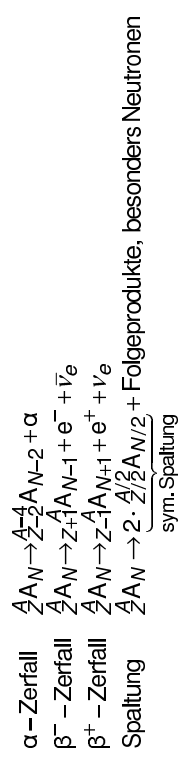
Der Q-Wert dieser (α, n)-Reaktion beträgt -2.64 MeV. Daher sind α -Teilchen aus einer natürlich radioaktiven Quelle (typische Energie etwa 6 MeV) in der Lage, die Kernumwandlung auszulösen.

Die Entdeckung der Radioaktivität war entscheidend für die Entwicklung der Kernphysik. Einerseits wurden α -Teilchen als Sonden zur Untersuchung des Atomkerns in Streuexperimenten verwendet, andererseits ergab eine Spektroskopie der beim Zerfall angeregter Zustände des Tochterkerns emittierten Gammastrahlung Aufschluß über die Struktur der angeregten Zustände (Energie, Spin, Parität, Wellenfunktion, elektrische und magnetische Momente usw).

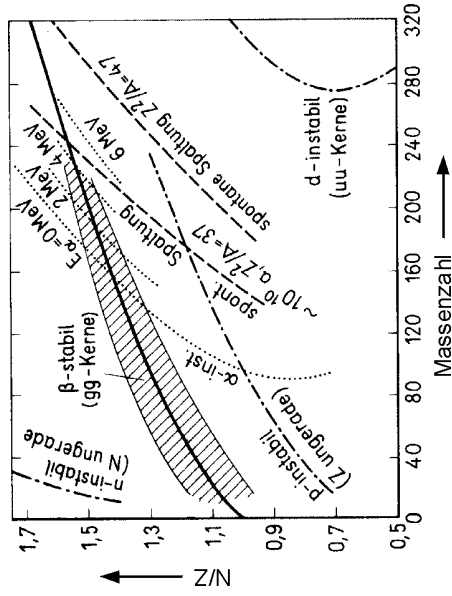
Klassifizierung der beobachteten Strahlungen

Meßgröße	α -Strahlung	β -Strahlung	γ -Strahlung
Typ.Reichweite in Luft	einige cm; scharf begrenzt	einige m; diffus	typ. 100 m; diffus
Ablenkung im Magnetfeld	ja; schwach	ja; stark (+, -)	nein
Natur der Strahlung	^4He -Kerne	Elektronen, Positronen	el.-magnet. Strahlung

Zerfallstypen



Im folgenden Bild sind verschiedene Stabilitätsgrenzen zusammengefaßt.



Die v. Weizsäcker'sche Massenformel (in Verbindung mit Schaleneffekten) wurde auch dazu verwendet, um abzuschätzen, ob man vielleicht „superschwere“ Elemente durch geeignete Kernreaktionen herstellen kann. Dabei handelt es sich um Elemente mit $Z = 114$ oder 164 , von denen man erwartet, daß sie gegenüber Spaltung oder α -Zerfall eine meßbare Lebensdauer haben. Experimente am Schwerionenbeschleuniger UNILAC der Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI) in Darmstadt blieben lange Zeit erfolglos. Bis zum Jahr 1997 ist es jedoch gelungen, Elemente mit Ordnungszahlen von bis zu $Z = 112$ zu erzeugen.

Die Spinquantenzahl läßt sich aus der Hyperfeinstrukturaufspaltung optischer Übergänge bestimmen. Die Parität ist nicht direkt meßbar, aber indirekt aus Kernreaktionen bestimmbar, für die Paritätserhaltung gilt. Alle Daten aus Kernreaktionen deuten auf positive Parität der Deuteronwellenfunktion hin. Daraus läßt sich folgern, daß die Grundzustandswellenfunktion durch den Bahndrehimpuls $L = 0$ charakterisiert ist. Die Einstellung der Spins von Proton und Neutron ist daher parallel ($S = 1$). Das Deuteron hat keinen weiteren gebundenen Zustand, die Kernkraft ist daher spinabhängig.

Magnetisches Dipolmoment: $\mu_d = 0,857393 \mu_K$

Das magnetische Moment wird aus der Larmorfrequenz bestimmt. Da $L = 0$, sollte die Summe der magnetischen Momente von Proton und Neutron gleich dem Deuteronmoment sein. Dies ist recht gut erfüllt.

$$\mu_p + \mu_n = 0,87975 \mu_K$$

Elektrisches Quadrupolmoment: $Q_d = 2,86 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2$

Das Quadrupolmoment ergibt sich aus der Hyperfeinstruktur optischer Linien. Das Quadrupolmoment ist im Vergleich zur Ausdehnung des Deuterons sehr klein, d.h. das Deuteron weicht nur sehr geringfügig von der Kugelgestalt ab. Dennoch ist die Annahme einer nichtzentralen Kraft zusätzlich zum dominierenden Zentralpotential notwendig, um das Quadrupolmoment zu erklären. Die Grundzustandswellenfunktion besitzt daher neben der $L = 0$ -Komponente auch eine geringe $L = 2$ -Beimischung.

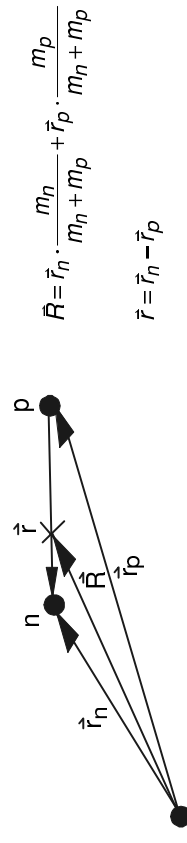
Einfache Beschreibung des Deuterons

Separation von Schwerpunkts- und Relativbewegung

Die folgende Schrödingergleichung ist zu lösen:

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2m_n} \Delta_n + \frac{\hbar^2}{2m_p} \Delta_p + (E - V(|\vec{r}_n - \vec{r}_p|)) \right\} \cdot \Phi(\vec{r}_n, \vec{r}_p) = 0$$

Dieses Zweikörperproblem kann durch Einführung von Schwerpunkts- und Relativkoordinaten in zwei ungekoppelte Einkörperprobleme zerlegt werden.



Koordinatentransformation ergibt (vgl. z.B. [But64]):

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2M} \Delta_R + \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r + (E - V(r)) \right\} \Phi(\vec{R}, \vec{r}) = 0$$

mit

$$M = m_n + m_p$$

$$\mu = \frac{m_n \cdot m_p}{m_n + m_p}$$

Zur Lösung machen wir einen Separationsansatz

$$\Phi(\vec{R}, \vec{r}) = \chi(\vec{R}) \cdot \Psi(\vec{r}); \quad E = E_R + E_r$$

Man erhält:

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2M} \Delta + E_R \right\} \chi(\vec{R}) = 0$$

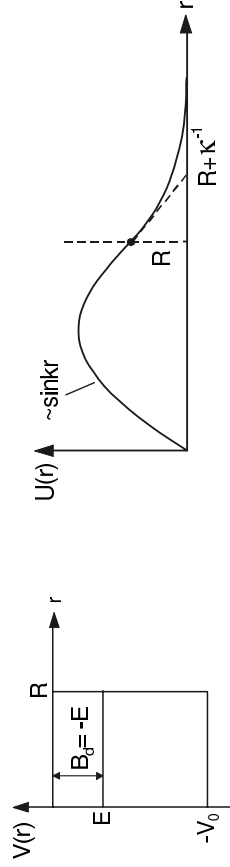
Schwerpunktsbewegung

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + (E_r - V(r)) \right\} \Psi(\vec{r}) = 0$$

Relativbewegung

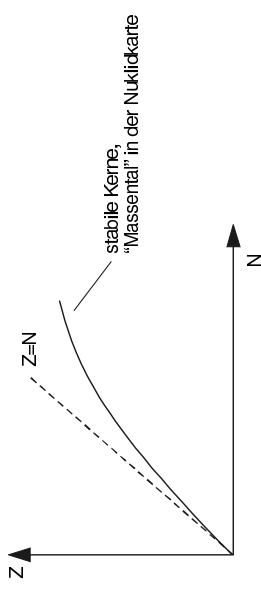
Die Schwerpunktsbewegung ist nicht relevant; die Relativbewegung ist so zu behandeln wie die Bewegung eines Teilchens mit der reduzierten Masse μ im sphärisch-symmetrischen Potential.

Bewegung mit $\ell = 0$ im Kastenpotential



Für kleine A-Werte ergibt sich: $Z_0 = A/2$,

für größere A-Werte, z.B. für $A = 150$: $Z_0 = 62$, oder für $A = 238$: $Z_0 = 93$



c) Stabilität gegenüber α -Zerfall

Beim α -Zerfall findet folgender Vorgang statt:

$${}^A_Z X_N \rightarrow \alpha + {}^{A-4}_{Z-2} X_{N-2} + \text{kinetische Energie}$$

Damit der α -Zerfall energetisch möglich ist, muß:

$$T_\alpha = [m(Z, A) - m(Z-2, A-4) - m_\alpha] \cdot c^2 \geq 0$$

$$T_\alpha = \left[2 \frac{\partial m}{\partial Z} \right]_{A=\text{const.}} - 4 \left[\frac{\partial m}{\partial A} \right]_{Z=\text{const.}} \cdot c^2$$

d) Stabilität gegenüber Spaltung

$$\text{Vorgang: } {}^A_Z X_N \rightarrow 2 {}^{\frac{A}{2}}_{\frac{Z}{2}} X_{\frac{N}{2}} + T \quad (\text{symmetrische Spaltung})$$

$$\text{also: } T = [m(Z, A) - 2 m(\frac{Z}{2}, \frac{A}{2})] c^2$$

Diese Beziehung wird allerdings durch Schaleneffekte stark modifiziert.

Die Konstanten werden in einer Ausgleichsrechnung durch Anpassung der berechneten an die experimentellen Massen ermittelt. Man erhält:

$$\begin{aligned} a_V &= 15.85 \text{ MeV}/c^2 & \text{Die Konstanten verändern sich leicht} \\ a_S &= 18.34 \text{ MeV}/c^2 & \text{in Abhängigkeit von neueren} \\ a_C &= 0.71 \text{ MeV}/c^2 & \text{Massenbestimmungen} \\ a_A &= 92.86 \text{ MeV}/c^2 \\ a_P &= 11.46 \text{ MeV}/c^2 \end{aligned}$$

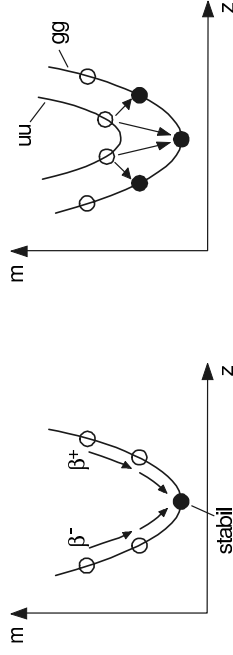
Die Massenformel gibt die Massen aller Kerne mit beachtlicher Präzision (bis auf etwa 1 % genau) wieder. Die besonders hohen Bindungsenergien mancher Kerne mit sog. „magischen“ Nukleonenzahlen“ (Schaleneffekte) werden dagegen nicht wiedergegeben.

Aussagen über die Stabilität von Atomkernen

a) Variation der Masse in einer Isobarenreihe ($A = \text{const.}$)

Die Massenformel für isobare Kerne hat folgende Gestalt:

$$m(Z, A) = c_1 Z + c_2 Z^2 \quad (\text{Parabel})$$



mehrere stabile gg-Kerne sind möglich,
im hier gezeigten Fall kein stabiler uu-Kern

b) Protonenzahl des stabilsten Kerns in einer Isobarenreihe

Die Bedingung für Stabilität in einer Isobarenreihe läßt sich schreiben:

$$\left. \frac{\partial m(Z, A)}{\partial Z} \right|_{A=\text{const.}} = 0$$

Daraus folgt für die Ordnungszahl Z_0 des stabilsten Kerns

$$Z_0 = \frac{A(m_N - m_H + a_A)}{2(a_C A^{2/3} + a_A)} = \frac{A}{1,98 + 0,015 A^{2/3}}$$

Lösung im Inneren

$$u = A \sin(k R)$$

$$k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 - B_d)$$

Lösung im Äußeren

$$u = B e^{-\kappa r}$$

$$\kappa^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} B_d$$

Aufgrund der Randbedingungen gilt

$$\text{ctg}(kR) = -\frac{\kappa}{k} = -\sqrt{\frac{B_d}{V_0 - B_d}}$$

Die Tiefe des Potentials läßt sich für den Fall $V_0 \gg B_d$ abschätzen

$$\kappa^2 \approx \frac{2\mu}{\hbar^2} V_0 \rightarrow (kR)^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} V_0 R^2$$

Da $\text{ctg}(kR) \approx 0$, folgt

$$kR \approx \frac{\pi}{2} \rightarrow V_0 R^2 \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{4} \approx 100 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^2$$

Man sieht, daß nur das Produkt von V_0 und R^2 bestimmbar ist.

Eine genauere Rechnung ergibt

$R \text{ (fm)}$	$V_0 \text{ (MeV)}$
1.0	120
1.5	59
2.0	36
2.5	25
∞	2.8

Zur getrennten Bestimmung von V_0 und R sind Streuexperimente notwendig. Daraus erhält man $R \approx 1.5 \text{ fm}$, $V_0 \approx 50 \text{ MeV}$.

Der Wert des „Deuteronradius“ ist wesentlich größer als die Reichweite der bindenden Kernkräfte. Das bedeutet, daß sich Proton und Neutron für einen beträchtlichen Teil der Zeit in einem Abstand voneinander befinden, der größer als die Reichweite der Bindung ist. Damit ist die lockere Bindung des Deuterons erklärt. Die Annahme eines realistischen Potentials als des Kastenpotentials ändert an dieser Aussage prinzipiell nichts.

Nukleon-Nukleon-Streuung

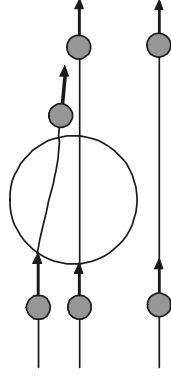
Aussagen über Kräfte (Potential) zwischen den Nukleonen sind auch aus den in Streuexperimenten gemessenen Wirkungsquerschnitten und Winkelverteilungen zu erhalten.

Ein klassisches Analogon (Ablenkung einer Kugel beim Durchqueren einer Potentialmulde) kann die Ablenkung eines Nukleons beim Durchqueren des Kernpotentials erklären:

Klassisches Analogon:

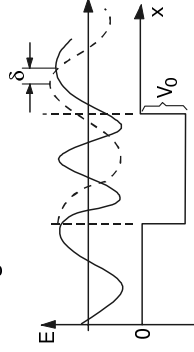


Aufsicht:



Die Überlagerung der Intensitäten ist abhängig von der Form des Potentials. Dieses Bild stellt die Grundlage der Partialwellenzerlegung eines Streuvorganges dar (näheres hierzu folgt später).

Quantenmechanische Beschreibung:



Quantenmechanische Rechnungen zur Streuung verlaufen prinzipiell folgendermaßen: Ein- und auslaufende Wellen werden in Partialwellen zerlegt, die durch ihren Bahndrehimpuls (gegeben durch den Stoßparameter) charakterisiert sind. Jede Partialwelle erfährt durch das Potential eine Phasenverschiebung δ_l . Der differentielle Wirkungsquerschnitt hängt von den Phasenverschiebungen δ_l ab, so daß aus gemessenen differentiellen Wirkungsquerschnitten Einzelheiten des Streupotentials (z.B. dessen Radialfunktion) bestimmt werden können. Für die Nukleon-Nukleon-Streuung ist die Berechnung des Wirkungsquerschnitts besonders einfach, da nur eine Partialwelle ($l = 0$) zum Streuvorgang beiträgt.

Die Bindungsenergie setzt sich aus 5 Summanden zusammen (v. Weizsäcker, 1935):

1. Kondensationsenergie, die frei wird, wenn Nukleonen sich zum Kern vereinigen. Dieser dominante Term erklärt die näherungsweise Konstanz von B/A .

$$B_V = a_V A$$

„Volumenenergie“

2. Nukleonen an der Oberfläche des Kerns sind weniger stark gebunden als im Inneren. Dies wird durch einen negativen Korrekturterm berücksichtigt, der proportional zur Oberfläche ist.

$$B_S = -a_S A^{2/3}$$

„Oberflächenenergie“

3. Die Bindungsenergie wird weiter verringert durch die Coulombabstoßung zwischen den Protonen. Mit der Annahme, daß der Kern eine homogen geladene Kugel ist, folgt für den Coulombterm

$$B_C = -a_C Z^2 A^{-1/3}$$

„Coulombenergie“

4. Die Bindungsenergie wird weiter verringert, wenn $Z \neq N$. Im Rahmen des Fermigasmodells berechnet man, daß ein Kern mit $Z \neq N$ eine um $\Delta E = T_z^2/A$ höhere Energie besitzt als ein Kern mit gleicher Anzahl von Protonen und Neutronen, so daß

$$B_A = -a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A}$$

„Asymmetrienergie“

5. gg-Kerne sind besonders stabil, uu-Kerne besonders instabil. Es wird deshalb eine weitere Korrektur aufgrund der Paarung der Nukleonen eingeführt:

$$B_P = \begin{cases} +\delta & \text{gg-Kerne} \\ 0 & \text{ug, gu-Kerne} \\ -\delta & \text{uu-Kerne} \end{cases}$$

„Paarungsenergie“

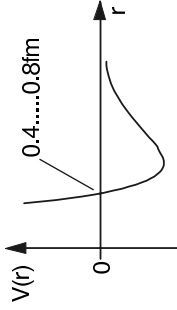
Näherungsweise gilt $\delta \approx a_P A^{-1/2}$

Alle Terme zusammen ergeben die v. Weizsäcker'sche Massenformel

$$m(Z, A) = Zm_H + (A - Z)m_n - a_V A + a_S A^{2/3} + a_C Z^2 A^{-1/3} + a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A} + \begin{cases} +\delta \\ 0 \\ -\delta \end{cases}$$

Die bisher festgestellten Eigenschaften der Kernkräfte geben Hinweise, wie ein mathematischer Ansatz für das Kernpotential aussehen müßte (vgl. ergänzend [May79]). Es gibt zwei Wege, um die die Radialabhängigkeit des Potentials zu erhalten:

- a) Phänomenologische Potentiale: Man versucht, Funktionen zu finden, die die Eigenschaften der Kernkräfte erfüllen. Diese Technik führt aber nicht zum tieferen Verständnis der Kernbindung. Alle „erfolgreichen“ Potentiale haben etwa die gezeichnete Gestalt:



- b) Konstruktion von Potentialen auf der Grundlage des Mesonenaustausches: In den letzten Jahren wurden hier Fortschritte erzielt, jedoch gibt es noch keine völlig befriedigende Beschreibung der Kernbindung, da mit Hilfe des Ein-Pion-Austausches nur der langreichweitige Teil des Potentials beschrieben werden kann. Es gibt allerdings Ansätze, die auch den Austausch von mehreren Pionen beinhalten.

2.3 Bindungsenergien und Tröpfchenmodell

Manche Eigenschaften der Kerne ähneln denen von makroskopischer, kondensierter Materie (konstante Dichte, geringe Kompressibilität, relativ scharfer Abfall der Dichte am Kernrand, annähernd konstante Bindungsenergie pro Nukleon). Diese Fakten bilden die Grundlage des Tröpfchenmodells, in dem man sich den Kern als Flüssigkeitstropfen vorstellt. Der Vergleich hinkt jedoch etwas, da in einem Flüssigkeitstropfen etwa 10^{16} Moleküle vorhanden sind, im Kern dagegen maximal nur etwa 250 Nukleonen. Weiterhin nehmen die Nukleonen im Kern quantisierte Zustände ein („Quantenflüssigkeit“). Das Tröpfchenmodell wird daher nur wenige Kerneigenschaften erklären können. Es ist aber sehr erfolgreich bei der Erklärung der Bindungsenergien (Massen) der Atomkerne.

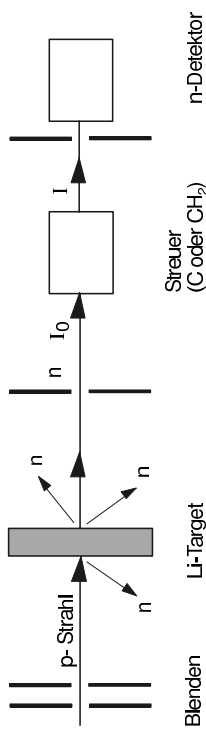
Die Atommasse läßt sich schreiben (vgl. früher)

$$m(Z, A) = Z \cdot m_H + (A - Z) \cdot m_n - \frac{B(Z, A)}{c^2}$$

oder die Kernmasse

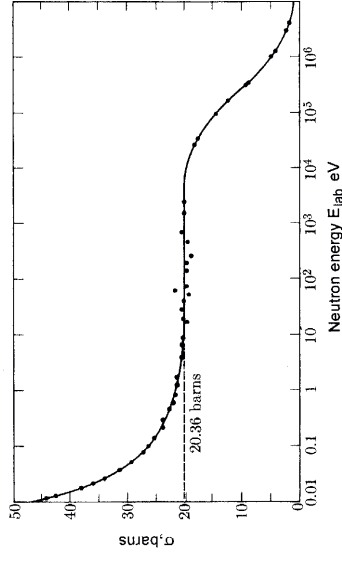
$$M(Z, A) = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - \frac{B'(Z, A)}{c^2} \quad B' \approx B$$

Experimentelle Technik bei der n-p-Streuung (seit etwa 1954)



Messung ohne Streuer ergibt I_0 (Streuung an C-Kernen)
 Messung mit C-Streuer ergibt σ_C (Streuung an C- und H-Kernen)
 Messung mit CH_2 -Streuer ergibt $\sigma_C + \sigma_p$ (Streuung an C- und H-Kernen)

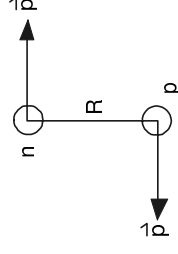
Viele solcher oder ähnlicher Messungen ergeben den Wirkungsquerschnitt für die Neutron-Proton-Streuung im Energiebereich 0.01 eV - 10 MeV (s. Abb.)



aus [Eng66]

Neutron-Proton-Streuung bei niedrigen Energien

Bei Projektilenergien von < 10 MeV wird praktisch nur die $\ell = 0$ -Partialwelle gestreut, d.h. die Streuung ist isotrop im Schwerpunktsystem. Dies läßt sich durch eine halbklassische Betrachtung verifizieren. Das Quadrat des Bahndrehimpulses ist $\ell(\ell+1)\hbar^2 = R^2 p^2 = R^2 2\mu E$, wobei μ die reduzierte Masse ist. Aus dieser Gleichung ergibt sich eine obere Grenze für die Partialwellen, die gestreut werden: $\ell(\ell+1) \leq 0.1 \cdot E_{\text{MeV}}$



Zur Beschreibung des Streuproblems lösen wir die Schrödinger-Gleichung für ein Kastenpotential

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - V(r)) u(r) = 0$$

Lösung im Innenraum $r < R$: $u(r) = A \sin k_0 R$

$$k_0^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E + V_0)$$

Lösung im Außenraum $r > R$:

$$u(r) = B \sin(kr + \delta_0)$$

$$k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} E$$

Die Randbedingungen für $r = R$ ergeben $\text{ctg}(k_0 R) = \frac{k}{k_0} \text{ctg}(kR + \delta_0)$

Unter Anwendung des Additionstheorems für $\text{ctg}(kR + \delta_0)$ erhält man

$$k \cdot \text{ctg} \delta_0 = \frac{k_0 \text{ctg}(k_0 R) + k \tan(kR)}{1 - \frac{k_0}{k} \text{ctg}(k_0 R) \cdot \tan(kR)} = f(k, V_0, R)$$

Da die Streuphase den Wirkungsquerschnitt bestimmt, ist der Wirkungsquerschnitt auf die Größen k , V_0 und R zurückgeführt.

Einführung des Begriffs der Streulänge

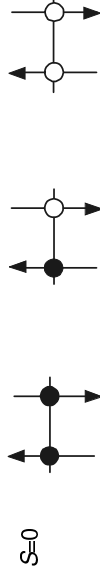
Für niedrige Energien wird $k \text{ctg} \delta_0$ entwickelt. Man erhält

$$k \cdot \text{ctg} \delta_0 = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_0 k^2 + \dots$$

$$\text{mit der Streulänge } a = \frac{k_0 R \cdot \text{ctg}(k_0 R) - 1}{k_0 \cdot \text{ctg}(k_0 R)}$$

und der effektiven Reichweite r_0 (näheres hierzu später).

Somit wird der Streuquerschnitt eine Funktion von a und r_0



Di-Neutron -1 Deuteron 0 Di-Proton $+1$
 $T_z =$

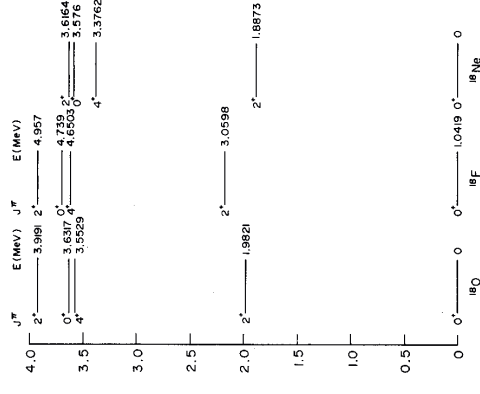
Wegen der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte haben die Zustände des Isospintripletts die gleiche Energie (bis auf elektromagnetische Korrekturen).

Isospinformalismus für komplexere Kerne

In der folgenden Reihe von Kernen charakterisiert T_z jeweils einen Kern.

$$T_z = \begin{array}{ccc} {}^{45}\text{Ca}_{25} & {}^{45}\text{Sc}_{24} & {}^{45}\text{Ti}_{23} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} {}^{45}\text{V}_{22} & {}^{45}\text{Cr}_{21} & {}^{45}\text{Mn}_{20} \\ +\frac{1}{2} & +\frac{3}{2} & +\frac{5}{2} \end{array}$$

Anregungszustände mit ähnlichen Eigenschaften (ausgenommen Coulombenergie), die man in allen 6 Kernen findet, gehören zu einem $T = 5/2$ Isospin-Sextett. Zustände, die man nur in den Sc, Ti, V und Cr-Isotopen dieser Reihe findet, gehören zu einem $T = 3/2$ Quartett. Zustände, die nur in Ti und V auftreten, gehören zum $T = 1/2$ Dublett. Die einem Isospin-Multiplett zugeordneten Zustände bezeichnet man als Analogzustände. Die Abbildung zeigt $T = 1$ -Zustände des Isospin-Tripletts (O - F - Ne) mit $A = 18$.



aus [Ajz72]

Der Isospinformalismus hat in der Kernphysik eine große Bedeutung erlangt, da er auf Systeme aus mehreren Protonen und Neutronen ausdehnbar ist. Simultan beobachtbar sind die Eigenwerte von $\hat{T}^2$ und $\hat{T}_z$, $\hat{T}^2$ hat den Eigenwert $T(T+1)$. Für gegebenes T gibt es $2T+1$ Einstellungen bezüglich der z-Achse. Ein aus Z Protonen und N Neutronen bestehender Kern hat die Isospin-z-Komponente:

$$T_z = \sum_{k=1}^A T_{zk} = \frac{(Z-N)}{2} = \text{negativer halber Neutronenüberschuß}$$

Isospinformalismus für das Zweinukleonen-System

Es gibt drei Möglichkeiten, einen Kern aus zwei Nukleonen zu bilden:

- | | | |
|---------------|-----|------------|
| 1. Di-Neutron | n-n | $T_z = -1$ |
| 2. Di-Proton | p-p | $T_z = +1$ |
| 3. Deuteron | n-p | $T_z = 0$ |

n-n und p-p besitzen den Isospin $T = 1$, beim Deuteron gibt es zwei Möglichkeiten: $T = 0$ oder 1.

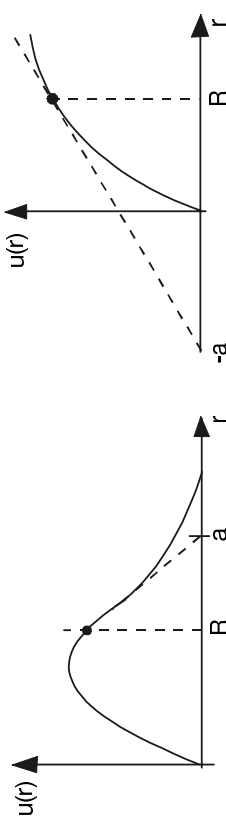
Es gibt 4 Möglichkeiten, die Isospinwellenfunktion zu bilden:

- | | | |
|---|---------|------------|
| 1. $\varphi = \pi(1) \cdot \pi(2)$ | $T = 1$ | $T_z = 1$ |
| 2. $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} [\pi(1) \cdot \nu(2) + \pi(2) \cdot \nu(1)]$ | $T = 1$ | $T_z = 0$ |
| 3. $\varphi = \nu(1) \cdot \nu(2)$ | $T = 1$ | $T_z = -1$ |
| 4. $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} [\pi(1) \cdot \nu(2) - \pi(2) \cdot \nu(1)]$ | $T = 0$ | $T_z = 0$ |
- Isospin - Triplet (symmetrisch) Isospin - Singulett (antisymmetrisch)

Die Isospin-Wellenfunktionen des Isospin-Triplets sind symmetrisch gegenüber Vertauschung der Teilchen 1 und 2, die des Isospin-Singulets antisymmetrisch. Da wegen des Pauliprinzip im n-n- und p-p-System die Spinvektoren antiparallel stehen müssen (identische Teilchen), haben wir auch im ($T=1, T_z=0$)-Zustand des Deuterons antiparallele Spins. Der Grundzustand des Deuterons hat dagegen ($T=0, T_z=0$) und parallele Spins ($S=1$).

Anschauliche Interpretation der Streulänge

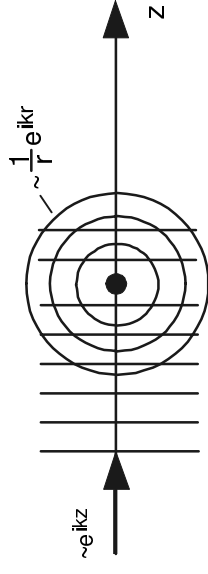
Für $r > R$ und $k \rightarrow 0$ wird $k \cot \delta_0 \approx -1/a$, also $u(r) = B k(r-a)$. Für $a > 0$ ist der Zustand gebunden, für $a < 0$ ist er ungebunden.



$a > R$: Zustand gebunden

$a < 0$: Zustand ungebunden

Übergang zum Wirkungsquerschnitt



Der Streuvorgang läßt sich durch eine einlaufende ebene Welle darstellen, die am Target gestreut wird. Vom Streuzentrum geht eine Kugelwelle aus. Die Lösung der Schrödingergleichung ist daher eine Überlagerung der einlaufenden ebenen Welle und der auslaufenden Kugelwelle

$$\psi(r \rightarrow \infty) = N \cdot \left\{ e^{ikz} + f(\theta) \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \right\}$$

$f(\theta)$ wird als streuwinkelabhängige Streuamplitude bezeichnet.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = |f(\theta)|^2$;

der integrale

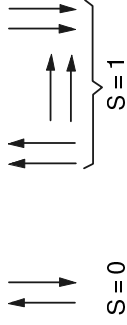
$$\sigma = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega$$

Man erhält für $\ell = 0$:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \rightarrow 4\pi a^2 \quad \text{für } k \rightarrow 0$$

Die Messung des Wirkungsquerschnitts liefert nur die Größe, aber nicht das Vorzeichen von a .

Mit dem Radius des Deuteron-Potentials von 1.4 fm und dem „Deuteron-Radius“ von 4.3 fm (vgl. oben) erwartet man einen integralen Wirkungsquerschnitt von $\sigma = 4\pi a^2 \approx 4$ b. Das Experiment ergibt aber 20.3 b, was dazu in krasssem Widerspruch steht. Lösung des Problems: Beim gebundenen Deuteron stehen die Spins von Proton und Neutron parallel ($S = 1$). Bei der Streuung unpolarisierter Neutronen an Wasserstoff sind jedoch alle quantenmechanisch erlaubten Einstellungen mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorhanden, sowohl die Singulett-Einstellung ($S=0$), als auch die drei Triplett-Einstellungen ($S=1$).



Daher gilt für den Wirkungsquerschnitt

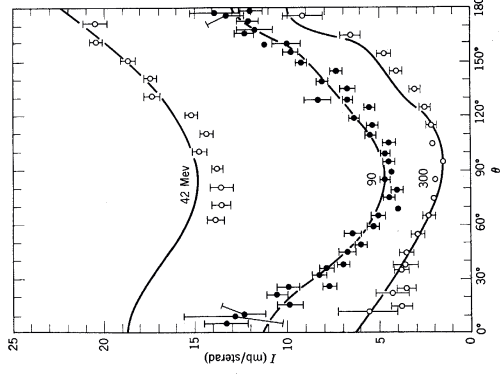
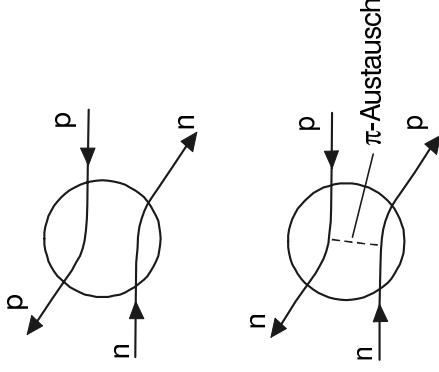
$$\sigma = \frac{1}{4} \sigma_S + \frac{3}{4} \sigma_T = \pi(a_S^2 + 3a_T^2) = 20.3 \text{ b}$$

Für σ_T ergab sich etwa 4 b (mit realistischerem Potential ≈ 4.4 b). Der Wirkungsquerschnitt für die Singulett-Streuung ergibt sich daher zu $\sigma_S = 68$ b und der Betrag der Streuamplitude zu $|a_S| = 23.3$ fm. Der Hauptbeitrag zur Streuung stammt also vom Singulettzustand ($S = 0$).

Die Messung der Neutronenstreuung an Parawasserstoff ($T < 20$ K) und Analyse der Interferenz der von den beiden Streuzentren des Wasserstoffmoleküls ausgehenden Streuwellen ergibt, daß die Streulänge für Singulettstreuung negativ ist. Folgerung: es existiert kein gebundener Deuteronenzustand mit $S = 0$ (Bestätigung der Spinabhängigkeit der Kernkraft).

Neutron-Proton-Streuung bei höheren Energien

Um Einzelheiten über das Streupotential zu erfahren, sind höhere Energien notwendig, (kleinere de Broglie-Wellenlänge). In diesem Fall tragen auch Partialwellen mit $\ell > 0$ zum Wirkungsquerschnitt bei. Erwartet wird, daß der Hauptbeitrag des Streuquerschnitts bei kleinen Winkeln („Vorwärtsstreuung“) auftritt. Man beobachtet jedoch auch einen Anstieg des Wirkungsquerschnitts zu Rückwärtswinkeln, was durch einen π -Mesonen-Austausch erklärt werden kann.



[Ham62]

Die bisher erhaltenen Ergebnisse zur Struktur der Kernkräfte lassen sich zusammenfassen:

1. Es gibt eine Zentralkraft (Hauptbeitrag) (aus den Eigenschaften des Deuterons erhalten).
2. Es gibt eine spinabhängige Zentralkraft (aus der n-p-Streuung erhalten).
3. Es gibt eine nicht-zentrale Kraft (ergibt sich aus dem Quadrupolmoment des Deuterons)
4. Die Kernkraft hat Austauschcharakter (aus der n-p-Streuung erhalten).

Weiterhin findet man (vgl. folgenden Abschnitt)

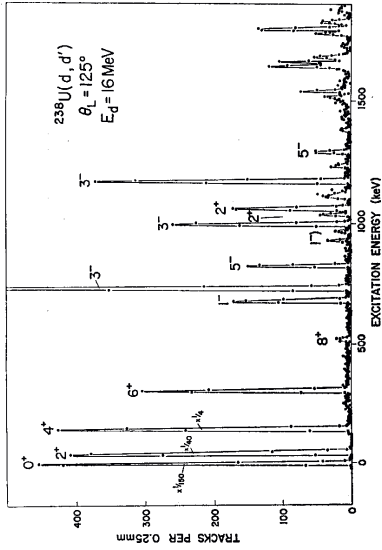
5. Die Kernkraft ist in guter Näherung ladungsunabhängig

Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte, Isospin

Auf die Frage, ob die p-p-, n-p- und n-n-Streuung durch die gleichen Potentialparameter beschrieben werden kann, findet man, daß dies tatsächlich der Fall ist. D.h. der nukleare Anteil der Wechselwirkung in diesen drei Streuvorgängen ist unabhängig von der Ladung der Stoßpartner. Bei der p-p-Streuung wird die Coulombkraft als zusätzliche Wechselwirkung „eingeschaltet“. Dies kann als Hinweis darauf gewertet werden, daß es sich bei Proton und Neutron um zwei Erscheinungsformen eines einzigen Teilchens handelt. Zur Unterscheidung wird der Isospin T eingeführt:

$$T = 1/2 \quad T_z = +1/2 \text{ für Proton} \quad T_z = -1/2 \text{ für Neutron.}$$

Die Messung des Teilchenspektrums gibt direkt die Anregungsenergien und die differentiellen Wirkungsquerschnitte. Indirekt erhält man die übertragenen Drehimpulse, Spins und Paritäten der angeregten Zustände, Lebensdauern und elektrische und magnetische Momente.



Neben natürlich vorkommenden Radionukliden gibt es heute Hunderte von weiteren radioaktiven Substanzen, die durch Bestrahlung mit Neutronen in Reaktoren oder durch Kernreaktionen mit geladenen Teilchen in Beschleunigeranlagen künstlich hergestellt werden.

Anwendungen der Radioaktivität

1. Altersbestimmung

Archäologische Altersbestimmung nach der ^{14}C -Methode

Durch kosmische Strahlung läuft in der Erdatmosphäre die Reaktion $^{14}\text{N} (n,p) ^{14}\text{C}$ ab, wobei ^{14}C mit $T_{1/2} = 5730$ Jahren in ^{14}N zerfällt. ^{14}C wird ständig als $^{14}\text{CO}_2$ in lebende Substanzen eingebaut. Nach dem Absterben findet kein weiterer Einbau statt. Das eingebaute ^{14}C zerfällt gemäß dem Zerfallsgesetz, so daß sich im Laufe der Zeit der ^{14}C -Gehalt vermindert und aus dessen Konzentration auf das Datum des Absterbens des Organismus geschlossen werden kann. Der Meßbereich für die Altersbestimmung beträgt 1000 - 30000 Jahre.

Geologische Altersbestimmung mit Hilfe von Isotopenverhältnissen

Die Isotopenverhältnisse innerhalb von Zerfallsketten sind zeitabhängig, z.B. die Verhältnisse $^{206}\text{Pb}/^{238}\text{U}$, $^{207}\text{Pb}/^{235}\text{U}$, $^{208}\text{Pb}/^{232}\text{Th}$. Aus einer genauen Bestimmung des Isotopenverhältnisses kann auf das Alter einer Probe geschlossen werden. Der Meßbereich für die Altersbestimmung beträgt etwa $10^8 - 10^{10}$ Jahre. Zum Vergleich: das Erdalter beträgt etwa $4,5 \cdot 10^9$ Jahre.

2. Diagnostik

Medizinische Diagnostik: Zur Lokalisierung von Tumoren, Stoffwechselerkrankungen o.ä. werden Radionuklide inkorporiert und die von ihnen ausgehende Strahlung nachgewiesen.

Aktivierungsanalyse: Spurenelemente können durch Erzeugung radioaktiver Isotope durch Bestrahlung mit Neutronen oder geladene Teilchen nachgewiesen werden.

Werkstoffprüfung: Mittels Durchstrahlung ist eine zerstörungsfreie Prüfung von Werkstoffen auf Risse oder Hohlstellen möglich.

3. Bestrahlung zur Veränderung von Eigenschaften

Medizinische Therapie: Durch Bestrahlung von Tumoren kann deren Ausbreitung verlangsamt werden. **Sterilisierung:** Verpackungs- oder Verbandmaterial wird durch Bestrahlung keimfrei gemacht. Durch Bestrahlung können Lebensmittel haltbar gemacht werden

4. Herstellung kompakter Batterien

Entwicklung von Radionuklid-Batterien

4. Kernspektroskopie und Kernmodelle

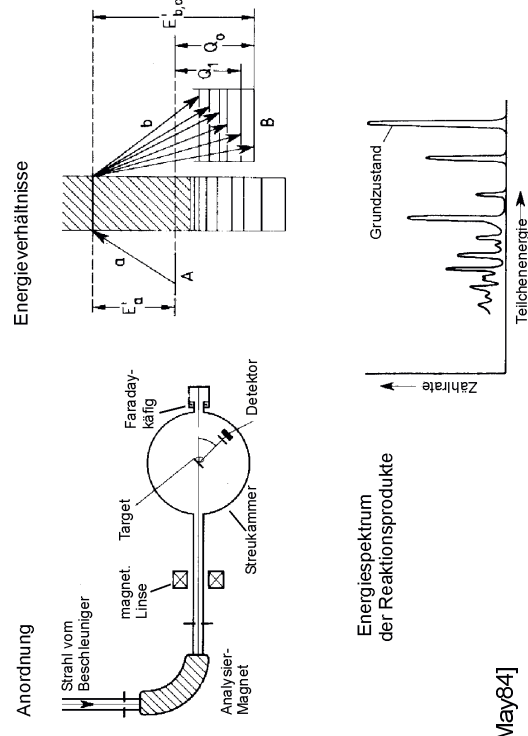
4.1 Allgemeines über Niveauschemata

Bei Anregungsenergien, die kleiner als die Separationsenergie für Nukleonen oder Alpha-Teilchen sind, haben Atomkerne diskrete Energiezustände. Diese kommen dadurch zustande, daß die einzelnen Protonen und Neutronen auf unterschiedliche Weise auf die möglichen „Einteilchenzustände“ im bindenden Potentialtopf verteilt sind (vgl. z.B. Fermigasmodell). Jeder Anregungszustand wird durch einen Satz von meßbaren Größen charakterisiert: Anregungsenergie, Drehimpuls (Spin), Parität, mittlere Lebensdauer bzw. Zerfallsbreite, magnetisches und elektrisches Moment. Im Rahmen der theoretischen Kernphysik werden diese Größen auf der Basis von Modellvorstellungen berechnet. Somit kann die Gültigkeit von Kernmodellen anhand der experimentellen Ergebnisse überprüft werden.

Die systematische Untersuchung des Anregungsspektrums von Atomkernen heißt „Kernspektroskopie“. Übergänge zwischen gebundenen Zuständen werden durch elektromagnetische Wechselwirkung verursacht, wobei die „Abregung“ eines Kerns unter Emission von Photonen (in speziellen Fällen Konversionselektronen oder e^+e^- -Paaren) erfolgt. Die Anregung eines Kerns ist hingegen auf die Absorption von Photonen zurückzuführen.

Es gibt zwei wesentliche Methoden zur Untersuchung der Anregungszustände:

a) Teilchenspektroskopie

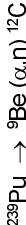


aus [May84]

Neutronenquellen

a) Radioaktive Quellen

Um Neutronen aus radioaktiven Quellen zu gewinnen, wird ein α -Strahler (z.B. ^{239}Pu) mit Beryllium gemischt, in dem dann eine (α, n) -Reaktion stattfindet.



Eine weitere Möglichkeit besteht darin, eine spontan spaltende Quelle, z.B. ^{252}Cf , zu verwenden und die Neutronenemission durch die Spaltprodukte auszunutzen.

Der Nachteil radioaktiver Quellen liegt in der begrenzten Quellstärke.

b) Kernreaktoren

Spaltungsreaktoren liefern überwiegend „thermische“ Neutronen mit kontinuierlichem Energiespektrum und hoher Intensität. Der Neutronenfluß im Reaktorkern beträgt bis zu 10^{14} Neutronen/s·cm².

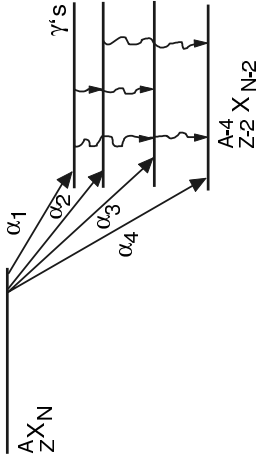
c) Kernreaktionen

Geeignete Kernreaktionen (z.B. ${}^2\text{H}(\text{d}, n){}^3\text{He}$, ${}^7\text{Li}(\text{p}, n){}^7\text{Be}$) können dazu benutzt werden, monoenergetische Neutronen an Niederenergie-Beschleunigern herzustellen. Produktionsraten bis zu etwa 10^{11} Neutronen/s werden erreicht.

Durch Spallation (Zertrümmerung) von schweren Kernen durch hochenergetische Protonen können sehr hohe Neutronenflüsse (bis zu 10^{15} Neutronen/s) erzeugt werden.

3.2 Der Alpha-Zerfall

Bis etwa 1930 wurde die Energie der α -Strahlen durch ihre Reichweite in Luft bestimmt. Später erlaubten Magnetspektrographen detailliertere Untersuchungen der Spektren. α -Strahlen haben diskrete Energien. Die Spektren bestehen zumeist aus mehreren Linien, die zu Zerfällen des Mutterkerns in angeregte Zustände des Tochterkerns gehören. Das Tröpfchenmodell gibt eine Stabilitätsgrenze gegenüber dem α -Zerfall an.



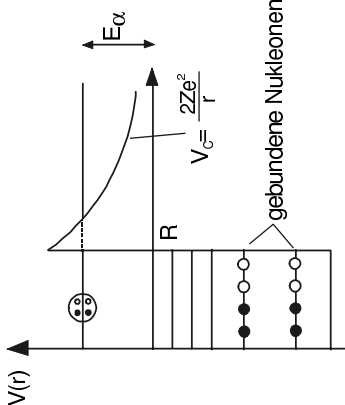
Da der α -Zerfall spontan abläuft, muß die Separationsenergie negativ sein. Die Separationsenergie S_C für ein zusammengesetztes Teilchen („Cluster“) ist

$$S_C = \sum S_p + \sum S_n - B_C$$

Hierbei ist B_C die Bindungsenergie des Clusters, im Falle des α -Teilchens also 28, 29 MeV, S_p und S_n sind die Separationsenergien der Protonen bzw Neutronen.

In der folgenden Tabelle sind Bindungs- und Separationsenergien für verschiedene Teilchen im Kern ${}^{232}\text{U}$ angegeben.

Teilchen	B_C (MeV)	S (MeV)
n		7.15
p		6.05
d	2.2	10.5
t	8.5	10.1
${}^3\text{He}$	7.7	9.6
α	28.3	-5.4



Die negative Separationsenergie ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Voraussetzung für den α -Zerfall. Damit der α -Zerfall beobachtbar wird, muß zusätzlich die Zerfalls- konstante hinreichend groß sein.

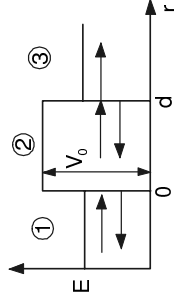
Bildliche Vorstellung: Die komplexe Bewegung der Nukleonen im Kern führt häufig zur Bildung α -ähnlicher Strukturen am Kernrand, wobei die Bindungsenergie des α -Teilchens frei wird und dieses in einen energetisch höheren Zustand bringen kann. Aus diesem Zustand heraus kann es die Potentialbarriere durchtunneln.

Die Zerfallswahrscheinlichkeit läßt sich schreiben als $\lambda = \lambda_0 T$, wobei λ_0 die Wahrscheinlichkeit für die Bildung des α -Teilchens ist und T die Transmission durch die Barriere. Die Transmission ist definiert als die Zahl der erfolgreichen Durchdringungsversuche durch den Potentialwall, dividiert durch die Gesamtzahl der Durchdringungsversuche. Bezeichnen wir mit j_e die auf die Barriere einfallende und mit j_a die an der anderen Seite der Barriere austretende Stromdichte, dann ergibt sich für die Transmission

$$T = \frac{j_a}{j_e} = \frac{|u_a|^2 \cdot v_a}{|u_e|^2 \cdot v_e} = \frac{|u_a|^2 \cdot k_a}{|u_e|^2 \cdot k_e}$$

Hierbei ist $u(r) = r \psi(r)$ die Radial-Wellenfunktion.

Der Transmissionskoeffizient T läßt sich für eine Rechteckbarriere (eindimensional) wie folgt berechnen (Gamow, 1928). Wir lösen die Schrödingergleichung für die Bereiche 1, 2 und 3.



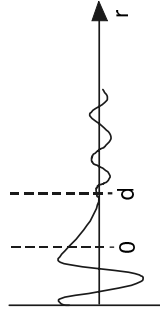
$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] \cdot u(r) = 0$$

Lösung: Bereich 1: $u_1 = A_1 \cdot e^{ik_1 \cdot r} + B_1 \cdot e^{-ik_1 \cdot r}$ $k_1^2 = \frac{1}{\hbar^2} \cdot 2mE$

Bereich 2: $u_2 = A_2 \cdot e^{ik_2 \cdot r} + B_2 \cdot e^{-ik_2 \cdot r}$ $k_2^2 = \frac{1}{\hbar^2} \cdot 2m(E - V_0) = -k_2'^2 < 0$
 $= A_2' \cdot e^{-k_2' \cdot r} + B_2' \cdot e^{k_2' \cdot r}$

Bereich 3: $u_3 = A_3 \cdot e^{ik_3 \cdot r}$ $k_3^2 = k_1^2$

Die Stetigkeitsbedingungen an den Stellen $r = 0$ und $r = d$ lauten:



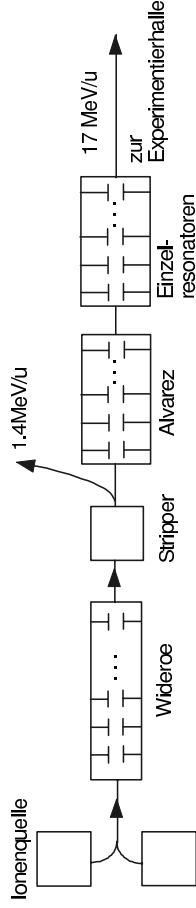
$$u_1(0) = u_2(0) \quad u_1'(0) = u_2'(0)$$

$$u_2(d) = u_3(d) \quad u_2'(d) = u_3'(d)$$

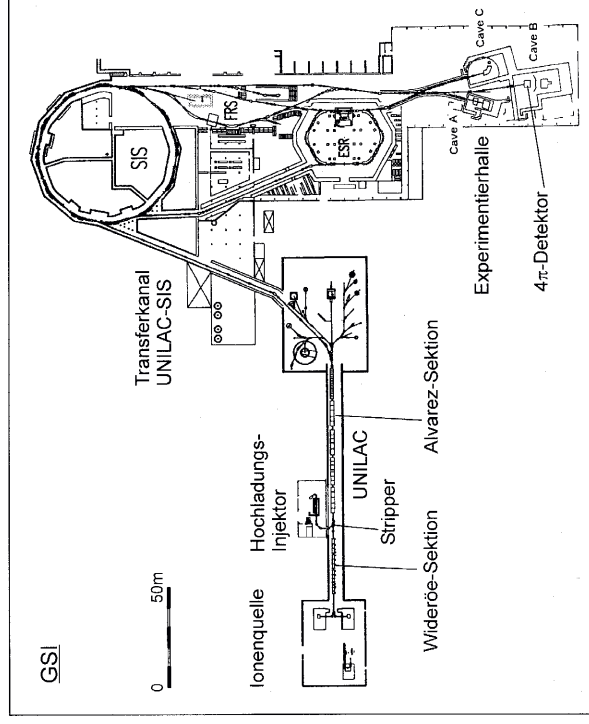
Bei u_e ist nur der einlaufende Teil der Wellenfunktion anzusetzen. Somit ergibt sich für die Transmission

$$T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$$

Der UNILAC der Gesellschaft für Schwerionenforschung in Darmstadt (Universal Linear Accelerator) ist eine Kombination aus mehreren Wideroe- und Alvarez Beschleunigern und zusätzlichen Einzelresonatoren zur kontinuierlichen Energieeinstellung. Es können Ionen aller Massen bis zu Uran beschleunigt werden. Die maximale Endenergie beträgt etwa 17 MeV/u.



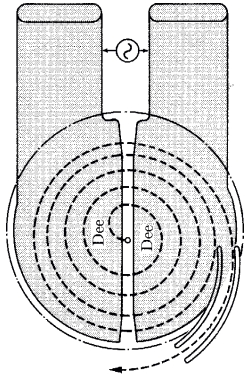
1990 wurde die Beschleuniganlage der GSI mit der Inbetriebnahme des Schwerionen-Synchrotrons (SIS) und des Experimentier-Speicherrings (ESR) beträchtlich erweitert. Der UNILAC dient als Injektor in das SIS, das Schwerionen mit einer Maximalenergie von bis zu 2 GeV/u liefert. In der Abbildung ist die gesamte GSI-Anlage gezeigt.



c) Zyklotron

Im Gegensatz zu elektrostatischen Beschleunigern wird hier eine kleine Potentialdifferenz (etwa 100 kV) mehrmals durchlaufen. Die Teilchen bewegen sich im magnetischen Feld auf Kreisbahnen mit Radius $r = m v/q B$. Die Umlaufzeit ist unabhängig von der Geschwindigkeit und beträgt $\tau = 2\pi r/v = 2\pi m/q B$.

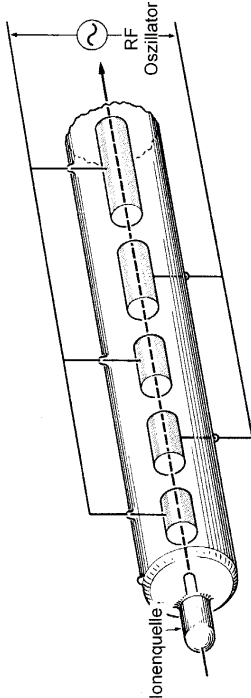
aus [Eng66]



Zur Erreichung höherer Energien wurde das Zyklotronprinzip weiterentwickelt: Isochron-Zyklotron, Synchrozyklotron, Synchrotron.

d) Hochfrequenz-Linearbeschleuniger für schwere Ionen

1. Wideroe-Beschleuniger: Die Beschleunigung findet im Feld zwischen den sog. Driftröhren statt.



2. Alvarez-Beschleuniger: Der Beschleunigertank ist mechanisch ähnlich aufgebaut wie der Wideroe-Typ. An den Driftröhren liegt jedoch zu jeder Zeit die gleiche Spannung gegenüber der Tankwand an (Hohlraumresonator). Im gesamten Tank herrscht die gleiche Feldrichtung. Es sind höhere Frequenzen als beim Wideroe-Typ möglich.

Unter Benutzung der Stetigkeitsbedingungen erhält man schließlich

$$T = \left\{ 1 + \frac{V_0^2}{V_0^2 - (2E - V_0)^2} \cdot \sinh^2(\kappa_2 d) \right\}^{-1}$$

Für den Grenzfalleiner „dicken“ Barriere ($d \gg \lambda_2 = \frac{1}{\kappa_2}$) erhält man

$$T \rightarrow 4 \cdot \frac{V_0^2 - (2E - V_0)^2}{V_0^2} \cdot e^{-2\kappa_2 d} \approx \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \cdot \sqrt{2m(V_0 - E)} \cdot d \right]$$

und für eine Barriere beliebiger Form

$$T \approx \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_0^d \sqrt{2m(V(r) - E)} dr \right]$$

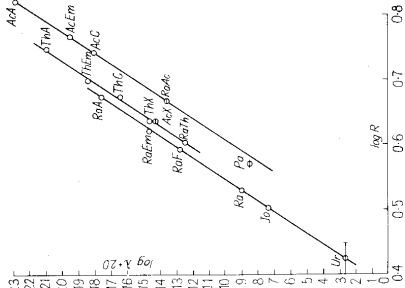
Die Lösung des dreidimensionalen Problems ergibt das gleiche Ergebnis.

Einige Beispiele für Halbwertszeiten, Zerfallsenergien und Transmissionskoeffizienten sind in der folgenden Tabelle gezeigt.

Kern	$T_{1/2}$	E_α (MeV)	T_α
^{210}Po	0.3 μs	8.78	$1.3 \cdot 10^{-13}$
^{224}Ra	3.6 d	5.7	$5.9 \cdot 10^{-26}$
^{144}Nd	$2 \cdot 10^{15}$ y	1.83	$2.2 \cdot 10^{-42}$

Die enorm starke Abhängigkeit der Energie von der Zerfallskonstanten war schon 1911 bekannt (Geiger und Nuttall)

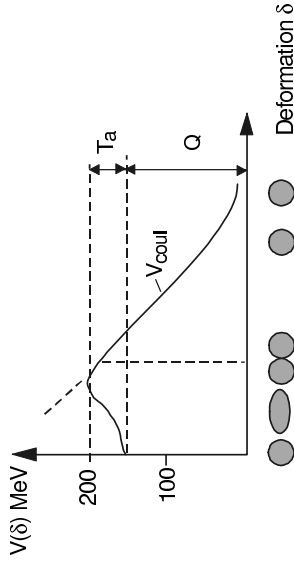
$$\log \lambda = a + b \log R \quad (R = \text{Reichweite in Luft})$$



Die Häufigkeit der Vorbildung eines α -Teilchens im Kern wird abgeschätzt zu etwa $\lambda_0 \approx 10^{21} \text{ sec}^{-1}$.

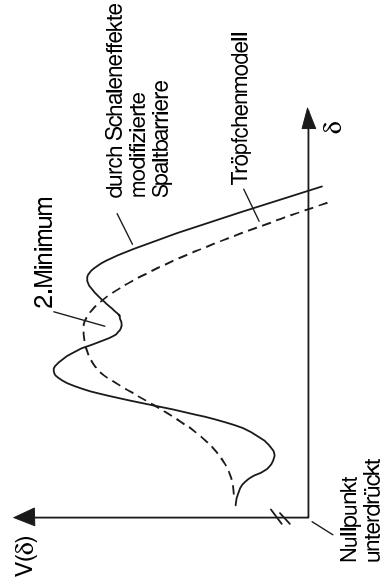
3.3 Spontane Kernspaltung

Neben dem α -Zerfall wird bei den schwersten Kernen auch die spontane Spaltung in zwei Bruchstücke beobachtet. Die Halbwertszeiten gegenüber Spaltung reichen von Tagen bis zu über 10^{21} Jahre. Die formale Beschreibung der Spaltung verläuft analog zum α -Zerfall: Durchdringung einer Potentialbarriere, hier der Spaltbarriere. Der physikalische Vorgang ist jedoch gänzlich anders. Die Spaltung kommt durch eine Einschränkung der Kernoberfläche zustande (dynamische Instabilität). Die Spaltbarriere ist bestimmt durch eine delikates Gleichgewicht zwischen Oberflächen- und Coulombenergie.



Im Bild ist die potentielle Energie in Abhängigkeit von der Deformation des Kerns gezeigt. Für sehr kleine Werte der Aktivierungsenergie T_a kann Spontanspaltung eintreten (Durchtunneln der Barriere). Für größere Werte von T_a ist nur induzierte Spaltung möglich (T_a muß aufgebracht werden).

Vor etwa 30 Jahren wurden die „Spaltisomere“ entdeckt, die dadurch zustandekommen, daß die Spaltbarriere durch Schaleneffekte modifiziert wird. Es kommt zur Ausbildung eines 2. Minimums, in dem Kernzustände mit großer Deformation mit einer meßbaren Lebensdauer gebunden sind.

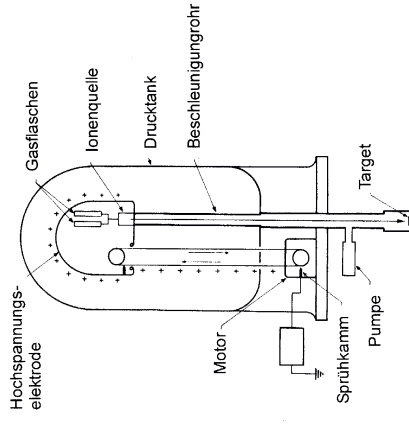


- elektrostatische Beschleuniger,
- Hochfrequenzbeschleuniger.

und weiterhin:

- Linearbeschleuniger
- Kreisbeschleuniger.

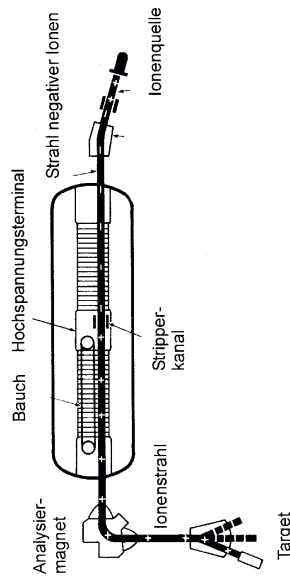
a) Van-de-Graaff-Beschleuniger (seit etwa 1930)



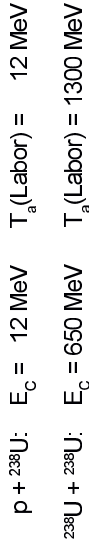
Die maximale Spannung beträgt etwa 7.5 MV; die Endenergie $T = qU = neU$

b) Tandem Van-de-Graaff-Beschleuniger

Die maximale Spannung beträgt etwa 14 MV. Es werden einfach negativ geladene Ionen bis zum Terminal beschleunigt. Dort erfolgt eine Umladung der Ionen durch Abstreifen von zwei oder mehreren Elektronen in einer Gasstrecke oder einer „Stripperfolie“. Anschließend findet eine weitere Beschleunigung der umgeladenen Ionen bis zur Endenergie $T = (q_- + q_+) U = (1 + \eta_+) eU$ statt.



Zwei Beispiele sollen dies verdeutlichen:



Im Gegensatz zu geladenen Teilchen können Neutronen schon bei sehr geringen kinetischen Energien Kernreaktionen auslösen, z.B. Kernspaltung mit „thermischen“ Neutronen, deren kinetische Energie $T \approx 0.025 \text{ eV}$ ist.

Anwendungen von künstlichen Kernumwandlungen

1. Kernphysikalische Grundlagenforschung:

Untersuchung von Reaktionsmechanismen. Hierbei wird zwischen „direkten Reaktionen“ mit Reaktionszeiten von etwa 10^{-22} sec und „Compoundkern-Reaktionen“ mit sehr viel längeren Reaktionszeiten (typisch 10^{-16} sec) unterschieden. Bei direkten Reaktionen bleibt die innere Struktur der Reaktionspartner im wesentlichen erhalten, während bei Compoundkern-Reaktionen die Reaktionspartner vollständig verschmelzen.

Untersuchungen der Kernstruktur. Hierbei wird aus den Eigenschaften angeregter Kernzustände bzw. ihrem Zerfall unter Emission elektromagnetischer Strahlung oder Teilchen auf die innere Struktur der beteiligten Kernzustände geschlossen. Solche Untersuchungen dienen der Überprüfung von Kernmodellen.

2. Weitere Anwendungen:

Künstliche Kernumwandlungen dienen auch der Herstellung von Radionukliden für eine Vielzahl von Anwendungen, desweiteren zur Energiegewinnung durch Kernspaltung oder Kernfusion. Schließlich können im Laborversuch astrophysikalische Untersuchungen zur Bildung der Elemente im Universum durchgeführt werden.

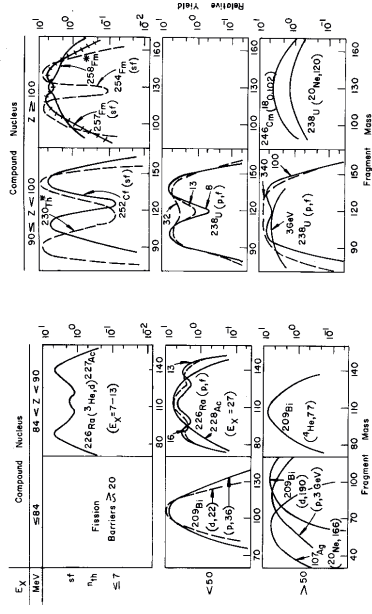
Quellen geladener Teilchen

1. Radioaktive Quellen (insbesondere α -Strahler)

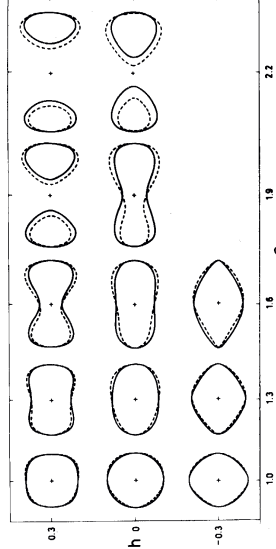
Solche Quellen wurden in der Anfangszeit der Kernphysik ausschließlich verwendet. Ihr Nachteil besteht in der geringen Intensität und niedrigen Energie. Die Coulombschwelle ist nur bei sehr leichten Targetkernen überwindbar.

2. Teilchenbeschleuniger (seit etwa 1930)

Das Prinzip besteht darin, daß geladene Teilchen oder Ionen in einem elektrischen Feld beschleunigt werden. Man unterscheidet

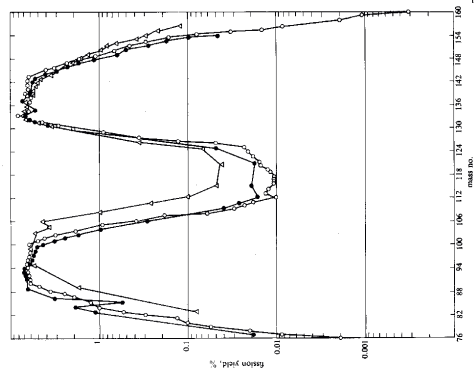


Beispiele einiger Spaltfragmentmassen-Verteilungen nach induzierter Spaltung Aus [Hof 74]



Verschiedene Kernformen, die als Funktion der Deformation zur Spaltung führen können. Durchgezogene Linien, symmetrische Formen, gestrichelte asymmetrische Formen. Aus [Bra72]

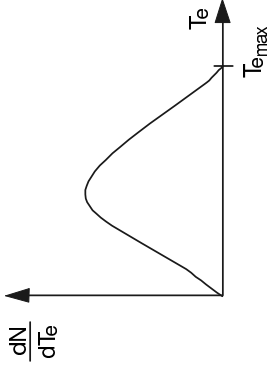
Massenverteilungen der Spaltprodukte nach der induzierten Spaltung von ${}^{233}\text{U}$, ${}^{235}\text{U}$ und ${}^{239}\text{Pu}$



aus [Seg77]

3.4 Der Beta-Zerfall

Im Gegensatz zum α -Zerfall besitzen die beim β -Zerfall emittierten Elektronen oder Positronen ein kontinuierliches Energiespektrum. Dies hat zu Schwierigkeiten bei der Deutung geführt:



a) Energiebilanz: Mutter- und Tochterkern haben definierte Masse (=Energie). Daher sollte auch die Zerfallsstrahlung definierte Energie haben.

b) Drehimpulsbilanz: Mutter- und Tochterkern haben beide entweder ganz- oder halbzahligen Spin. Die emittierte Strahlung sollte daher stets ganzzahligen Spin oder bei $\hbar=0 \rightarrow \hbar=0$ -Übergängen keinen Spin haben. Elektron und Positron haben aber den Spin $1/2 \hbar$.

Der Ausweg aus dieser Schwierigkeit wurde von Pauli 1936 durch die Neutrino-Hypothese aufgezeigt. Pauli forderte, daß neben der Emission von Elektron oder Positron eine weitere Strahlung auftritt, die Energie und Impuls besitzt, keine Ladung trägt, kein magnetisches Moment besitzt, Spin $1/2 \hbar$ und Ruhemasse ≈ 0 hat. Diese Strahlung soll sich mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegen. Alle diese Eigenschaften wurden einem bis dahin unbekannten Teilchen, dem Neutrino, zugeschrieben.

Nachweis des Neutrinos

Experimentell ist der Neutrinonachweis sehr schwierig, da wegen der fehlenden Ladung und Masse die Wechselwirkung sehr gering ist.

Indirekter Nachweis durch Rückstoßmessungen:

Da Neutrinos Energie und Impuls tragen, können sie auf Atomkerne einen Rückstoß ausüben. Zum Neutrinonachweis ist die Elektroneneinfang-Reaktion geeignet



Da das Elektron im Atom verbleibt, übt es keinen Rückstoß aus, so daß der viel kleinere Neutrinorückstoß gemessen werden kann. Da ein Elektron definierter Energie eingefangen wird, hat auch das Neutrino eine feste Energie.

3.5 Künstliche Kernumwandlungen

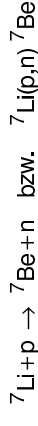
Die künstlich induzierten Kernumwandlungen gehören in den Bereich der Kernreaktionen, zu denen in vielen Lehrbüchern auch die elastische und inelastische Streuung von Nukleonen oder komplexeren (zusammengesetzten) Projektile gehört.

Für eine Kernreaktion gilt folgende Schreibweise:



A ist der Targetkern, a das Projektil, B und b sind die Reaktionsprodukte. Ist die Masse von b sehr klein gegenüber der Masse von B, so wird b auch häufig als Ejektil und B als Rückstoßkern bezeichnet.

Beispiel für eine Reaktion:



Die Energiebilanz lautet (vgl. Kap. 1)

$$(m_A + m_a) \cdot c^2 + T_A + T_a' = (m_B + m_b) \cdot c^2 + T_B + T_b'$$

Der Q-Wert (Energietönung der Reaktion) ist

$$Q = T_B + T_b' - T_A' - T_a' = (m_A + m_a - m_B - m_b) \cdot c^2$$

Es ist wichtig zu merken, daß T im Schwerpunktsystem gegeben ist. Für Kernreaktionen steht nicht die Einschüßenergie im Laborsystem, sondern nur der auf das Schwerpunktsystem umgerechnete Anteil zur Verfügung.

$$T_A' + T_a' = T_a \cdot \frac{m_A}{m_A + m_a}$$

Beim Stoß zwischen geladenen Teilchen (p, α , schwere Ionen) kann eine Reaktion nur dann ablaufen, wenn die Einschüßenergie im Schwerpunktsystem über der Coulombbarriere E_C liegt. Dann kann Oberflächenkontakt zwischen den Reaktionspartnern eintreten.

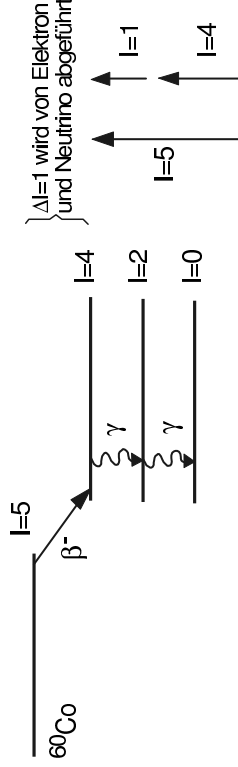
$$r_c = 1.5 \text{ fm}; \quad e^2 = 1.44 \text{ MeV fm}$$

$$E_C = \frac{Z_a \cdot Z_A \cdot e^2}{R_C} = \frac{Z_a \cdot Z_A \cdot e^2}{r_c \cdot \left(\frac{1}{A_a^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{A_A^{\frac{1}{3}}} \right)}$$

Nichterhaltung der Parität beim β -Zerfall

Lee und Yang sagten 1956 vorher, daß Elektron und Neutrino keine definierte Parität besitzen. Da aber Kernzustände vor und nach dem β -Zerfall eindeutige Parität besitzen, bleibt die Parität beim β -Zerfall nicht erhalten. Die experimentelle Bestätigung erfolgte durch Wu und Mitarbeiter 1957.

Im Experiment wurde der β -Zerfall von ^{60}Co bei sehr tiefen Temperaturen (0.01 K), untersucht. In einem Magnetfeld wurden die Kerne ausgerichtet. Das magnetische Moment der Kerne und das B -Feld stellen sich parallel zueinander ein.



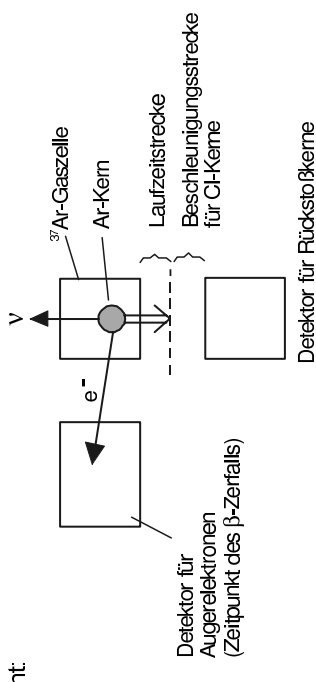
Beobachtung: Die Elektronen werden vorwiegend entgegen der B -Richtung emittiert. Wendet man auf alle experimentellen Größen die Paritätsoperation an (Spiegelung am Ursprung), so sollte bei Paritätserhaltung der experimentelle Befund der gleiche bleiben.

Bei Spiegelung am Ursprung gilt:

1. Ein polarer Vektor (Ort, Geschwindigkeit, Kraft ...) ändert das Vorzeichen: $r \rightarrow -r$.
2. Ein axialer Vektor (Drehimpuls, Magnetfeld ...) ändert das Vorzeichen nicht:
3. Das Skalarprodukt zweier Vektoren (Skalar) (Energie, Impulsquadrat, Drehimpulsquadrat ...) ändert das Vorzeichen nicht: $a \rightarrow a$
4. Das Skalarprodukt eines polaren Vektors mit einem axialen Vektor (Pseudoskalar) (z.B. Helizität = Impuls Spin) ändert das Vorzeichen:

Bei Paritätserhaltung muß der Erwartungswert pseudoskalarer Größen verschwinden, d.h. Elektronen werden mit gleicher Wahrscheinlichkeit in und entgegen der Richtung des B -Feldes emittiert. Dies wird beim β -Zerfall nicht beobachtet. Die Paritätserhaltung ist verletzt. Die gleichzeitig beobachtete Gammastrahlung zeigt dagegen gleiche Intensität in und entgegen der B -Richtung, d.h. die Parität bleibt bei elektromagnetischen Prozessen erhalten.

Experiment:



Zur Festlegung des „Startpunkts“ des Zerfalls wird die Emission eines Augerelektrons benutzt.

Direkter Nachweis des Neutrinos (1969)

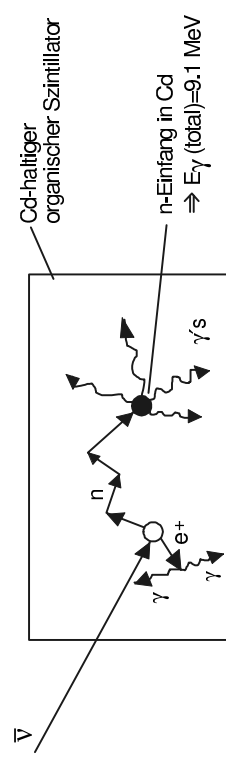
Zum direkten Neutrino nachweis wurde der Antineutrino-Einfang

$$p + \bar{\nu} \rightarrow n + e^+$$

verwendet.

Der Wirkungsquerschnitt für diese Reaktion ist sehr klein ($\sigma \approx 7 \cdot 10^{-43} \text{ cm}^2$). Als intensive Antineutrinoquelle diente ein Kernreaktor. Der Detektor war ein großer mit einer wasserstoffhaltigen Szintillatorsubstanz gefüllter Tank. Dieser Detektor war von vielen Sekundärelektronenvervielfachern umgeben, die die Lichtblitze verstärken.

Aufbau:



Gemessen wird:

1. die Vernichtungsstrahlung ($2 \times 511 \text{ keV}$) des Positrons,
2. dazu in Koizidenz (um einige μsec verzögert) die 9.1-MeV Gammastrahlung, die nach dem Neutroneneinfang in Cd emittiert wird.

Herkunft der Elektronen (Positronen) und Neutrinos beim β -Zerfall

1. Elektronen (Positronen) kommen aus dem Kern, nicht aus der Hülle. Sie sind im Kern nicht vorgebildet, sondern entstehen erst im Augenblick des β -Zerfalls.

Als Folge des β -Zerfalls werden aber auch Elektronen aus der Hülle emittiert:

- 2a. Emission von Augerelektronen (die angeregte Hülle überträgt Energie auf ein Hüllenelektron, das emittiert wird).
- 2b. Emission von Konversionselektronen (der angeregte Kern überträgt Energie auf ein Hüllenelektron, das emittiert wird).

Elektronen nach 2a) und 2b) haben diskrete Energien.

Zerfallstypen und Energieverhältnisse

Innerhalb einer Isobarenreihe tritt immer dann ein β -Zerfall auf, wenn es einen Nachbar-kern geringerer Masse gibt.

Es gibt 3 Möglichkeiten:

1. β^- -Zerfall (Negatronenzерfall)

$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} + 0.78 \text{ MeV}$. Der Zerfall des freien Neutrons erfolgt mit einer Halbwertszeit von $T_{1/2} \approx 13 \text{ min}$.

2. β^+ -Zerfall (Positronenzерfall)

$p \rightarrow n + e^+ + \nu - 1.80 \text{ MeV}$. Dieser Zerfall tritt nur bei gebundenen Protonen auf. Das freie Proton ist stabil.

3. Elektroneneinfang (zumeist K-Einfang)

$p + e^- \rightarrow n + \nu - 0.78 \text{ MeV}$. Der Elektroneneinfang tritt häufig zusammen mit dem Positronenzерfall auf.

Die angegebenen Energietönungen gelten für die Umwandlung freier Protonen oder Neutronen. Die totale Energietönung beinhaltet noch die Massen von Mutter- und Tochterkern.

Der f -Wert ist also ein Maß für das Kernmatrixelement.

Dies gilt zunächst nur für den erlaubten β -Zerfall. Berechnet man f -Werte allgemein nach dieser Vorschrift, so lassen sich die β -Zerfälle in Gruppen einteilen:

1. $\log f = 2.9 - 3.7$ „übererlaubte“ Zerfälle, $|M_{fi}|^2 \approx 1$
2. $\log f = 4.4 - 6$ „erlaubte“ Zerfälle, $|M_{fi}|^2 < 1$
3. $\log f > 6$ „verbotene“ Zerfälle, $|M_{fi}|^2 \ll 1$.

Bei den übererlaubten Zerfällen herrscht „vollständiger Überlapp“ der Kernwellenfunktionen (Spiegelkerne, analoge Kerne), d.h. die Nukleonenkonfiguration ist im Endzustand die gleiche wie im Anfangszustand. Es wandelt sich lediglich ein Neutron in ein Proton um, oder umgekehrt. Daher ist auch der Zerfall des freien Neutrons „übererlaubt“.

Drehimpulsbilanz

Elektron und Neutrino haben nur dann eine endliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit bei $r = 0$, wenn sie in einem s-Zustand sind (wesentliche Voraussetzung der Fermi-Theorie). Sie werden dann mit dem Bahndrehimpuls $\ell = 0$ emittiert. Die Summe der Drehimpulse von Elektron und Neutrino ist dann entweder 0 ($\hbar$ (antiparallele Spineinstellung, Fermi-Übergang) oder 1 ($\hbar$ (parallele Spineinstellung, Gamow-Teller-Übergang). Die Änderung des Kernspins kann bei G-T-Übergängen nur 0 oder 1 betragen.

Auswahlregeln für erlaubte β -Zerfälle:

- a) Spin-Singulett; Fermi-Übergang; $\Delta I = 0$, $\pi_i = \pi_f$,
- b) Spin-Triplett; Gamow-Teller-Übergang; $\Delta I = 0, 1$ (jedoch nicht $0 \rightarrow 0$), $\pi_i = \pi_f$.

Sofern es die Auswahlregeln zulassen, setzt sich das Kernmatrixelement bei erlaubten Übergängen aus einem Fermi- und einem Gamow-Teller-Anteil zusammen.

Verbotene Übergänge

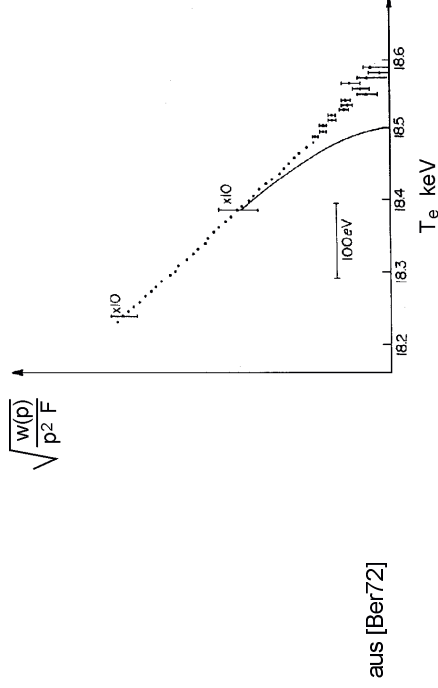
Verbotene Übergänge sind solche, bei denen Elektron und Neutrino mit Bahndrehimpuls $\ell \neq 0$ emittiert werden. Mit zunehmendem ℓ wird die Elektronen- und Neutrino wellenfunktion am Ursprung stark unterdrückt, und die Zerfallswahrscheinlichkeit nimmt stark ab.

Es ergeben sich folgende Auswahlregeln: $\Delta I = \ell + 1 = n + 1$ ($n = \text{Verbotenheitsgrad}$)

$$\pi_i \cdot \pi_f = (-1)^\ell$$

Anwendungen des Kurie-Plots:

1. Prüfung der Theorie bzw. des Zerfallstyps.
2. Genaue Bestimmung der Zerfallsenergie aus dem Endpunkt des Spektrums.
3. Bestimmung der Ruhemasse des Neutrinos.

Integrale Zerfallswahrscheinlichkeit: ft-Wert

Wir schreiben den Ausdruck für λ_β so um, daß ρ_e in Einheiten von $m_e c$ und die Energien in Einheiten von $m_e c^2$ angegeben werden. Die Zerfallswahrscheinlichkeit ergibt sich dann zu

$$\lambda_\beta = g^2 \cdot |M_{fi}|^2 \frac{m_e^5 \cdot c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \int_0^{\rho_{e\max}} F(Z, T_e) \frac{\rho_e^2}{m_e^2 \cdot c^2} \underbrace{\frac{(E_\beta - T_e)^2}{m_e^2 \cdot c^4} \frac{dp_e}{m_e \cdot c}}_{f(Z, \frac{E_\beta}{m_e \cdot c^2}) \leftarrow \text{tabelliert}}$$

Das Integral wird abgekürzt geschrieben als $f(Z, E_\beta/m_e c^2)$. Werte dieser Funktion finden sich in Tabellen.

Somit ist
$$\lambda_\beta = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \text{const} \cdot |M_{fi}|^2 \cdot f$$

oder der sog. ft-Wert
$$f \cdot T_{1/2} = \frac{\text{const}}{|M_{fi}|^2}$$

Energiebilanzen

$$\begin{aligned} 1.) E_{\beta^-} &= T_e + T_\nu = [m(Z, A) - m(Z+1, A)] \cdot c^2 \\ &= Z \cdot m_H \cdot c^2 + (A - Z) \cdot M_n \cdot c^2 - B(Z, A) \\ &\quad - (Z+1) \cdot m_H \cdot c^2 + (A - Z - 1) \cdot M_n \cdot c^2 + B(Z+1, A) \\ &= B(Z+1, A) - B(Z, A) + \underbrace{[M_n - M_p - M_e] \cdot c^2}_{0,78 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.) E_{\beta^+} &= T_e + T_\nu = [m(Z, A) - m(Z-1, A)] \cdot c^2 - 2 \cdot M_e \cdot c^2 \\ &= B(Z-1, A) - B(Z, A) + \underbrace{[M_p - M_n - M_e] \cdot c^2}_{-1,80 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.) E_{\beta^+} &= T_\nu = [m(Z, A) - m(Z-1, A)] \cdot c^2 \\ &= B(Z-1, A) - B(Z, A) + \underbrace{[M_p + M_e - M_n] \cdot c^2}_{-0,78 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

Die Energiedifferenz zwischen 2) und 3) ist gerade $E = 1.02 \text{ MeV}$ (Paarbildungsenergie).

Die Zerfälle 2) und 3) können als konkurrierende Prozesse parallel ablaufen. Positronenemission ist möglich, wenn die gesamte Zerfallsenergie größer als die doppelte Ruhemasse des Elektrons ist. Elektroneneinfang tritt dagegen schon auf, wenn die gesamte Zerfallsenergie positiv ist.

Fermi-Theorie des „erlaubten“ β -Zerfalls

Beim β -Zerfall sind Halbwertszeit und Energieverteilung der emittierten Elektronen oder Positronen direkt meßbar. Daher wird versucht, zunächst diese Größen theoretisch zu reproduzieren. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron (Positron) mit dem Impuls p emittiert wird. Bei gegebener Zerfallsenergie ist die Neutrinoenergie durch die Elektronen- (Positronen-) Energie festgelegt.

Mittels einer zeitabhängigen quantenmechanischen Störungsrechnung ergibt sich für die Zerfallswahrscheinlichkeit (goldene Regel):

$$\lambda_\beta = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \left| \langle f | \hat{H}_\beta | i \rangle \right|^2 \cdot \frac{dn}{dE_\beta}$$

Hierbei ist $\langle f | \hat{H}_\beta | i \rangle = \int \psi_f^* \cdot \hat{H}_\beta \cdot \psi_i \, d\tau = H_{fi}$ das Matrixelement des Operators, der den Anfangszustand $|i\rangle$ in den Endzustand $|f\rangle$ überführt, und dn/dE_β die Dichte der erreichbaren Endzustände.

Der Operator $\hat{H}_\beta$ ist zunächst unbekannt. Wir nehmen deshalb der Einfachheit halber an, daß $\hat{H}_\beta = g = \text{const.}$ Dann folgt für das Matrixelement

$$H_{fi} = g \int \Psi_f^*(\text{Kern}) \Psi_e^* \Psi_V^* \Psi_i(\text{Kern}) d\tau_K; \quad \Psi_V^* = \Psi_V$$

Für die Elektronen- und Neutrinowellenfunktionen nehmen wir ebene Wellen an. Da bei allen in der Praxis beobachteten β -Zerfällen die de Broglie-Wellenlänge des Elektrons sehr groß gegenüber dem Kerndurchmesser ist, kann Ψ_e und Ψ_V entwickelt werden:

$$\lambda_e = \frac{1}{k} = \frac{h}{p} \approx 2 \cdot 10^{-11} \text{ cm} \gg \text{Kernradius}$$

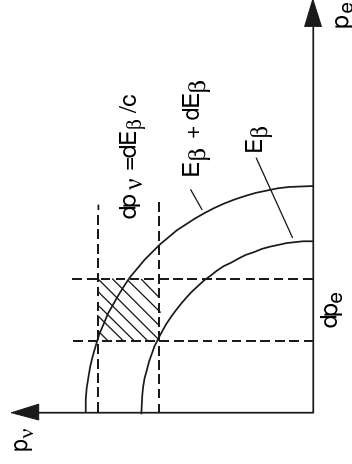
$$\Psi_e = \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot [1 + i\vec{k} \cdot \vec{r} + \dots] \quad ; \text{ebenso für } \Psi_V$$

Wenn nach dem 1. Glied abgebrochen werden kann (1. Näherung), handelt es sich um einen erlaubten β -Übergang. Führt die 1. Näherung zu einem verschwindenden Matrixelement, muß der zweite Term mitgenommen werden (2. Näherung). Ein solcher Zerfall wird als einfach verbotener β -Übergang bezeichnet. Die Reihenentwicklung klassifiziert also die β -Übergänge nach dem Grad ihrer „Verbotenheit“.

Im folgenden werden nur erlaubte β -Übergänge behandelt. Für diese gilt:

$$H_{fi} = g \cdot \Psi_e^*(0) \cdot \Psi_V(0) \cdot \underbrace{\int \Psi_f^*(\text{Kern}) \cdot \Psi_i(\text{Kern}) d\tau_K}_{\text{„Kernmatrixelement“ } M_{fi}}$$

Zustandsdichte des Elektron-Neutrino-Systems im Phasenraum



Das Phasenraumvolumen ist gegeben durch die Anzahl der Zustände multipliziert mit dem Volumen eines Zustands.

$$dV = h^3 dn$$

$$dn_e = \frac{\tau \cdot p_e^2 dp_e}{2 \cdot \pi^2 \cdot h^3}$$

$$dn_\nu = \frac{\tau \cdot p_\nu^2 dp_\nu}{2 \cdot \pi^2 \cdot h^3}$$

$$dn = \int_{E_\beta}^{E_\beta + dE_\beta} dn_e dn_\nu = \int \frac{\tau^2}{4 \cdot \pi^4 \cdot h^6} \cdot p_e^2 dp_e \cdot p_\nu^2 dp_\nu$$

Da $p_\nu = \frac{E_\beta - T_e}{c}$ und $dp_\nu = \frac{dE_\beta}{c}$ folgt schließlich

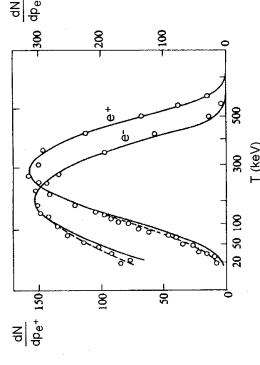
$$\frac{dn}{dE_\beta} = \int_0^{p_{e\max}} \frac{\tau^2}{4\pi^4 h^6 c^3} \cdot p_e^2 \cdot (E_\beta - T_e)^2 dp_e \Rightarrow$$

$$\lambda_\beta = \frac{g^2 |M_{fi}|^2}{2\pi^3 h^3 c^3} \cdot |\Psi_e(0)|^2 \cdot |\Psi_V(0)|^2 \cdot \int_0^{p_{e\max}} p_e^2 \cdot (E_\beta - T_e)^2 dp_e$$

Eine genauere Betrachtung zeigt, daß die Elektronenwellenfunktion Ψ_e durch das Coulombfeld des Kerns modifiziert wird. Wir ersetzen $|\Psi_e|^2$ durch $F(Z, T_e) |\Psi_e|^2$, wobei der Korrekturfaktor (Fermi-Funktion) die Verzerrung der ebenen Wellen im Coulombfeld des Kerns berücksichtigt. Wir erhalten somit für die Anzahl der im Impulsintervall dp_e emittierten Elektronen

$$\frac{dN}{dp_e} \propto F(Z, T_e) \cdot p_e^2 \cdot (E_\beta - T_e)^2$$

Die Form des β -Spektrums zeigt den Einfluß des Coulomb-Feldes.



aus [Seg77]

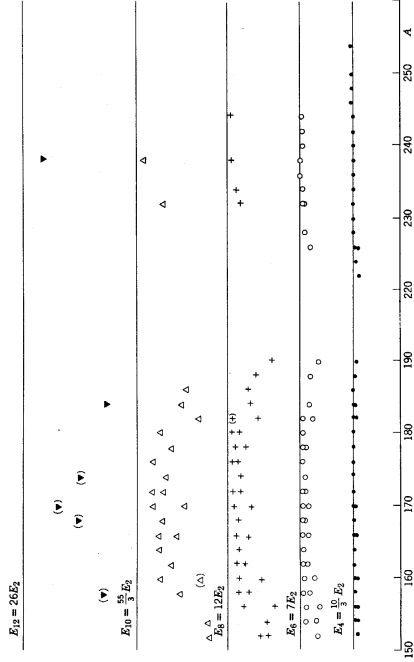
Es ergibt sich eine besonders einfache Darstellung des Spektrums, wenn die Größe

$$\left\{ \frac{\frac{dN}{dp_e}}{F(Z, T_e) \cdot p_e^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

gegen die kinetische Elektronen-Energie T_e aufgetragen wird (Kurie-Plot).

3. Anregungsenergien der ersten angeregten Zustände

In den genannten Gebieten finden sich die ersten angeregten Zustände von gg-Kernen bei besonders niedrigen Anregungsenergien. Die Folge der weiteren Anregungszustände ist sehr regelmäßig und gehorcht der Gesetzmäßigkeit $E(I) \sim I(I+1)$, die für die Rotation eines starren, deformierten Korns charakteristisch ist.

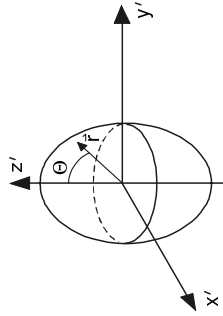


aus [Roy67]

Alle genannten Beobachtungen legen nahe, daß diese Kerne eine deformierte Gleichgewichtsgestalt besitzen. Es besteht offenbar ein Zusammenhang zwischen der Nukleonenzahl und der Kernegestalt. Das Auftreten einer statischen Kerndeformation wird auf eine korrelierte Bewegung der Nukleonen zurückgeführt, die gerade zwischen Schalenabschlüssen auftritt. Unkorrelierte Bewegung führt dagegen zu kugelsymmetrischer Gleichgewichtsgestalt.

Für die folgenden Betrachtungen machen wir die vereinfachende Annahme, daß die Kerne achsialsymmetrisch deformiert sind. Die Oberfläche ist dann gegeben durch

$$R = R_0(1 + \beta \cdot Y_{20}(\cos\theta))$$



Eine Rotation des gesamten Korns findet um eine Achse senkrecht zur z' -Symmetrieachse statt. Die Projektion des Drehimpulses auf die Symmetrieachse ist daher $K = 0$.

Übersicht über die Meßmethoden für verschiedene Observable

a) Lebensdauern

Die Lebensdauer eines angeregten Kernzustandes ist mit dessen Zerfallsbreite Γ verbunden durch $\Gamma = \hbar/\tau$

Für die Kernspektroskopie interessiert besonders der Lebensdauerbereich von etwa 10^{-8} bis 10^{-15} s.

$$\begin{aligned} \tau &= 10^{-10} \text{ s} \rightarrow \Gamma = 6.6 \cdot 10^{-6} \text{ eV} \\ \tau &= 10^{-12} \text{ s} \rightarrow \Gamma = 6.6 \cdot 10^{-4} \text{ eV} \\ \tau &= 10^{-15} \text{ s} \rightarrow \Gamma = 6.6 \cdot 10^{-1} \text{ eV} \end{aligned}$$

Lebensdauer

Meßmethode

$\tau > 10^{-8}$ s elektronische Zeitmessung
 $\tau = 10^{-8}$ s ... 10^{-12} s Dopplerverschiebung der Gammalinien bei der Abbremsung angeregter Kerne
 $\tau < 10^{-12}$ s Resonanzfluoreszenz (Mößbauereffekt), Messung der Zerfallsbreite, indirekte Methoden: Messung von Größen, die mit τ verbunden sind, z.B. Wirkungsquerschnitte bei Coulombanregung.

b) Spin und Parität

Winkelverteilungen der Reaktionsprodukte von Kernreaktionen oder der emittierten Gammastrahlung relativ zum Beschleunigerstrahl geben Auskunft über den in der Reaktion übertragenen Drehimpuls, ebenso die Winkelkorrelationen sequentiell emittierter Strahlungen (z.B. $\gamma\gamma$ -Teilchen- γ -Korrelationen). Die Messung der Linearpolarisation der Gammastrahlung gibt Aufschluß darüber, ob sich die Parität beim Übergang vom Anfangs- in den Endzustand geändert hat oder nicht.

c) Elektromagnetische Momente

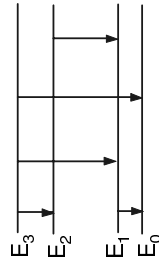
Zur Bestimmung der Momente von Kernen im Grundzustand wird auf Kap. 1 verwiesen. Magnetische Momente angeregter Kernzustände können dadurch bestimmt werden, daß die Probe in ein äußeres Magnetfeld eingebracht wird, in dem die angeregten Kerne eine Präzessionsbewegung ausführen und dadurch die Winkelkorrelationen verdreht wird (Methode der gestörten Winkelkorrelationen).

Folgerungen aus den gezeigten Niveauschemata

1. Isospin-Multipletts: Die Niveauschemata haben die gleiche Struktur unabhängig vom Verhältnis der Protonen- zur Neutronenzahl.
Folgerung: Die Kernkräfte sind in guter Näherung ladungsunabhängig.
2. Schwerere Kerne: Die mittleren Abstände zwischen den Niveaus nehmen mit zunehmender Massenzahl ab, d.h. die Niveaudichte nimmt zu.
Folgerung: Die Dichte der Einteilchenzustände im Potentialtopf wächst mit der Massenzahl A an. Dies wird durch das Fermigasmodell bestätigt (s. Kap 2), in dem die Dichte der Einteilchenzustände etwa proportional zu A ist.
3. Die Niveauschemata hängen stark davon ab, ob es sich um Kerne gerader oder ungerader Massenzahl handelt. Alle gg-Kerne haben im Grundzustand Spin und Parität 0^+ . Die Niveaudichte nimmt zu, wenn man von gg- zu gu (ug)-Kernen geht.
Folgerung: Durch Paarung von Nukleonen erreichen gg-Kerne große Stabilität. Eine hohe Energie ist nötig, um den Kern anzuregen. Dieser Effekt ist besonders ausgeprägt bei bestimmten „magischen“ Nukleonenzahlen (vgl. Schalenabschlüsse, Schalenmodell, s.u.).
4. Bei Nukleonenzahlen, die weit entfernt von magischen Zahlen sind, werden regelmäßige Niveaufolgen mit Spins und Paritäten $0^+, 2^+, 4^+, 6^+, \dots$ beobachtet. Die Anregungsenergien sind etwa proportional zu $I(I+1)$.
Folgerung: Es handelt sich um Rotationszustände deformierter Kerne, d.h. zwischen abgeschlossenen Nukleonenschalen besitzen Kerne vorzugsweise eine deformierte Gestalt.

4.2 Elektromagnetische Übergänge in Atomkernen

- a) Emission von Gammastrahlung bei Übergängen zwischen diskreten, gebundenen Zuständen:

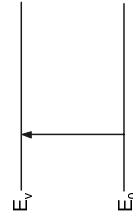


$$E_{\gamma}^{em} = \Delta E - \frac{p_{\gamma}^2}{2M} = \Delta E \cdot \left[1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2} \right]$$

Rückstoß auf den Kern

$$\Delta E = E_m - E_n$$

Der Umkehrprozeß heißt Resonanzabsorption und findet nur vom Grundzustand aus statt.



$$E_{\gamma}^{abs} = \Delta E + \frac{p_{\gamma}^2}{2M} = \Delta E \cdot \left[1 + \frac{\Delta E}{2Mc^2} \right]$$

Rückstoß auf den Kern

Vorhersagen des Einteilchen-Schalenmodells

- a) Drehimpulse der Kerne im Grundzustand:

Kerne mit gerader Anzahl von Protonen und Neutronen (gg-Kerne) haben im Grundzustand wegen der Paarung Spin und Parität 0^+ . Es sei jedoch betont, daß das Paarungsphänomen im Einteilchen-Schalenmodell nicht enthalten ist, sondern auf experimentellen Beobachtungen beruht.

Kerne mit ungerader Anzahl von Protonen oder Neutronen (gu- oder ug-Kerne) haben im Grundzustand Spin, Parität und magnetisches Moment des letzten unpaarigen Nukleons;

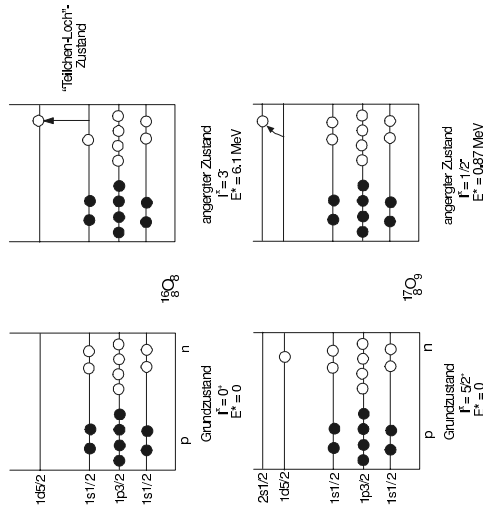
Kerne mit ungerader Anzahl von Protonen und Neutronen (uu-Kerne) haben im Grundzustand Spin, Parität und magnetisches Moment, deren Werte von der Kopplung des unpaarigen Protons mit dem unpaarigen Neutron abhängen und durch die empirischen Nordheim-Regeln beschrieben werden.

Diese Vorhersagen stimmen sehr gut mit den experimentellen Ergebnissen überein.

Wenige beobachtete Abweichungen können durch die Vernachlässigung der Restwechselwirkung erklärt werden, die in einzelnen Fällen zu einer geänderten Reihenfolge in der Besetzung der Schalenmodell-Niveaus führt.

- b) Energien und Drehimpulse der Kerne in angeregten Zuständen:

Angeregte Zustände entstehen durch das „Anheben“ eines oder mehrerer Nukleonen auf Niveaus höherer Energie. Bei ug- und gu-Kernen ist dazu die Energiedifferenz zwischen den Niveaus erforderlich. Bei gg-Kernen muß zusätzlich die Paarungsenergie aufgebracht werden, um ein Nukleonenpaar aufzubrechen. Dies führt zu einer höheren Anregungsenergie. Beispiele:



Man erhält: $\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \{ \langle j^2 \rangle - \langle l^2 \rangle - \langle s^2 \rangle \} = \frac{1}{2} \cdot \{ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \}$

Also $\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle = \begin{cases} \frac{\ell}{2} & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2} \\ -\frac{\ell+1}{2} & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases}$

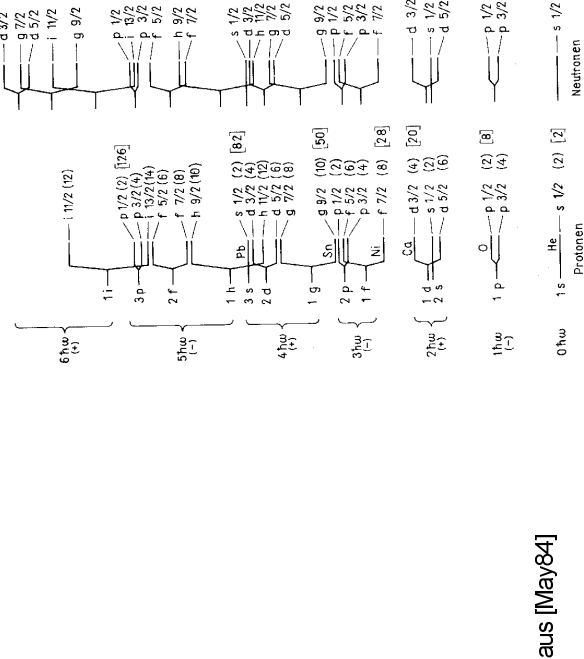
Das Experiment zeigt, daß Zustände mit $j = \ell + 1/2$ energetisch niedriger liegen als solche mit $j = \ell - 1/2$. Daher ist V_1 negativ. Die Energiedifferenz zwischen diesen Zuständen ist

$$\Delta E \sim \ell + (\ell + 1) = 2\ell + 1, \quad \text{d.h.} \quad \Delta E \sim \ell$$

Bei den niedrigsten Schalenabschlüssen ist keine wesentliche Energieveränderung aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung und damit der magischen Zahlen zu erwarten, dagegen bei hohen Drehimpulsen eine starke Aufspaltung. Daher können bei hohen Drehimpulsen Zustände aus höheren Schalen in niedrigere Schalen „eindringen“. Innerhalb einer Oszillatorschale werden daher auch Zustände entgegengesetzter Parität erwartet.

Durch Einführung der Spin-Bahn-Kopplung werden die magischen Zahlen erklärt.

Kernzustände im Schalenmodell mit Spin-Bahn-Kopplung



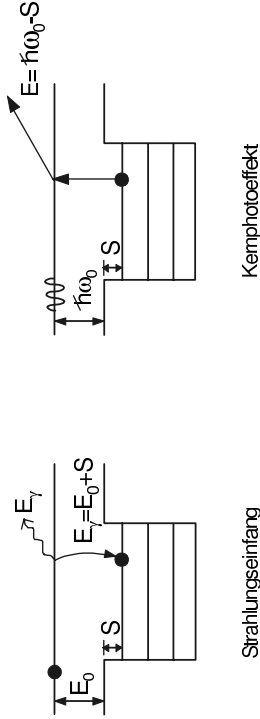
aus [May84]

Die Emissionslinie und die Absorptionslinie sind gegeneinander verschoben und deutlich voneinander getrennt, wenn die doppelte Rückstoßenergie größer als die Linienbreite ist, also

$$\frac{(\Delta E)^2}{Mc^2} > \Gamma$$

b) Emission von Gammastrahlung beim Einfang eines Teilchens (Strahlungseinfang):

Der Umkehrprozeß zum Strahlungseinfang ist der Kernphotoeffekt, d.h. die Emission eines Teilchens als Folge der Absorption eines Photons.



c) Innere Konversion:

Bei der inneren Konversion handelt es sich um einen konkurrierenden Prozeß zur Emission eines Gammaquants. Hierbei wird die freiwerdende Anregungsenergie des Kerns auf ein Hüllenelektron übertragen.

Die kinetische Energie der Elektronen ist diskret und besitzt je nach Schale einen unterschiedlichen Wert.

$$T_{e^-} = \Delta E_{\text{Kern}} - B_{e^-} \quad (B_{e^-} = B_K, B_L, \dots)$$

Man definiert für jede Schale einen Konversionskoeffizienten

$$\alpha_K = \frac{N_{e^-K}}{N_\gamma} \quad \alpha_L = \frac{N_{e^-L}}{N_\gamma} \quad \dots$$

Wenn die freiwerdende Anregungsenergie des Kerns größer als $2m_0c^2$ ist, kann ein Elektron-Positron-Paar emittiert werden. Diesen Prozeß bezeichnet man als innere Paar-konversion. Die Summe der kinetischen Energien von Elektron und Positron ist

$$T_{e^-} + T_{e^+} = \Delta E_{\text{Kern}} - 1.022 \text{ MeV}$$

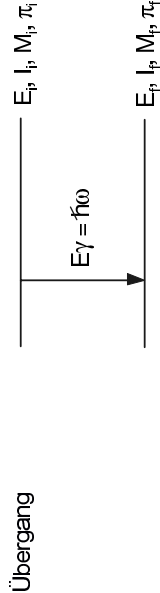
Die Energiespektren von Elektron und Positron sind kontinuierlich.

d) Coulombanregung:

Bei der Coulombanregung handelt es sich um die inelastische Streuung von geladenen Projektilen an Kernen. Am Kernort wirkt ein zeitlich veränderliches elektromagnetisches Feld, durch das der Kern angeregt werden kann. Man kann sich den Prozeß auch so vorstellen, daß ein virtuelles Photon der passenden Energie vom Projektil auf den Targetkern übertragen wird (Photoabsorption).

Emission elektromagnetischer Strahlung

Wir betrachten den Übergang eines Atomkerns aus einem höher angeregten Zustand in einen niedrigeren:



Die Energieerhaltung erfordert $E_i = E_f + E_\gamma$ (Der Rückstoß auf den Kern ist vernachlässigt).

Die Drehimpuls- und Paritätserhaltung erfordert

$$l_i = l_f + l_\gamma \rightarrow |l_i - l_f| \leq l_\gamma \leq l_i + l_f$$

$$m_i = m_f + m_\gamma$$

$$\pi_i = \pi_f \cdot \pi_\gamma$$

Da Anfangs- und Endzustand definierten Drehimpuls und Parität besitzen, muß auch das Gammaquant Drehimpuls und Parität tragen. Die Größe l ist der Drehimpuls des γ -Quants (Drehimpuls des Strahlungsfeldes); l darf nicht mit dem Bahndrehimpuls eines emittierten Teilchens verwechselt werden. Aus den Erhaltungssätzen folgt, daß das elektromagnetische Feld als Überlagerung von Termen dargestellt werden kann, die durch diskrete Drehimpulse gekennzeichnet sind. Es liegt daher nahe, das Strahlungsfeld nach Multipolen zu entwickeln.

Multipolordnung 2^l ($l=1$: Dipol; $l=2$: Quadrupol; ...)

Die Parität der elektromagnetischen Strahlung ist

$$\pi(E^l) = (-)^l \text{ für einen elektrischen } 2^l\text{-Pol}$$

$$\pi(M^l) = (-)^{l+1} \text{ für einen magnetischen } 2^l\text{-Pol}$$

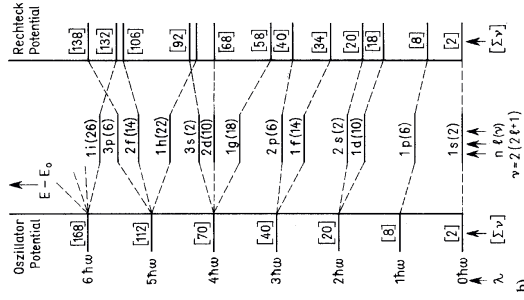
Es wurden die folgenden spektroskopischen Bezeichnungen für Zustände mit verschiedenem Bahndrehimpuls l eingeführt:

l	=	0	1	2	3	4	5	6	7	$\hbar$
Bezeichnung:		s	p	d	f	g	h	i	j	

Aus der Tabelle der Oszillator-Niveaus ersieht man:

1. Innerhalb einer „Oszillator-Schale“ besitzen alle Nukleonen entweder geradzahligen oder ungeradzahligen Bahndrehimpuls, d.h. die Parität ist innerhalb einer Schale konstant.
2. Die experimentell beobachteten magischen Zahlen >20 werden im Rahmen des Modells nicht reproduziert.

Durch Variation der Radialabhängigkeit des Potentials ist es nicht gelungen, die magischen Zahlen >20 zu erklären, wie das folgende Bild zeigt, in dem die Energieniveaus für das Oszillator-, das Rechteck- und ein interpoliertes Potential dargestellt sind.



aus [May84]

Der Durchbruch in dieser Fragestellung gelang 1949 M. Goeppert-Mayer (USA) und Haxel, Jensen und Suess (Heidelberg) durch die Einführung der Spin-Bahn-Kopplung. In Analogie zur Atomphysik wird für das Potential angesetzt:

$$V(r) = V_0(r) + V_1(r) \cdot (\vec{l} \cdot \vec{s})$$

Die Energie-Eigenwerte hängen jetzt von der relativen Einstellung von Bahn- und Eigen-drehimpuls ab.

Folgende Quantenzahlen kennzeichnen die Lösungsfunktionen:

n = Radialquantenzahl (Anzahl der Nullstellen von $u_{n\ell}(r)$ einschließlich der bei $r = 0$),
 ℓ = Bahndrehimpuls-Quantenzahl
 m = Projektion von ℓ auf die z-Achse

Jede Lösung $\psi_{n\ell m}$ beschreibt einen diskreten Zustand, dessen Energie i.a. von n und ℓ abhängt, nicht jedoch von m .

Mathematisch einfach die Lösung mit dem Oszillator-Potential (jedoch nicht sehr realistisch, da das Potential nach unendlich geht und somit keine ungebundenen Zustände existieren). Man erhält Energiewerte $E_{N\ell} = -V_0 + (N+3/2)\hbar\omega$, wobei die Zahl der Oszillatorquanten $N = 2(n-1) + \ell$.

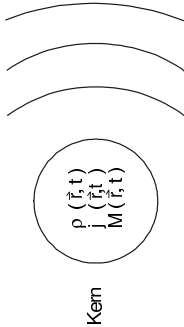
Man erhält folgende Oszillator-Niveaus:

N	n	ℓ	Bezeichnung	Multiplizität $2(2\ell+1)$	Gesamtzahl der Nukleonen
0	1	0	1s	2	2
1	1	1	1p	6	8
2	1	2	1d	10	18
	2	0	2s	2	20
3	1	3	1f	14	34
	2	1	2p	6	40
4	1	4	1g	18	58
	2	2	2d	10	68
	3	0	3s	2	70
5	1	5	1h	22	92
	2	3	2f	14	106
	3	1	3p	6	112
— usw. —					

Klassische Behandlung der Gamma-Emission

Die Beschreibung der Emission elektromagnetischer Strahlung durch einen Atomkern ist mathematisch recht anspruchsvoll und kann hier nicht im Detail nachvollzogen werden. Es wird deshalb auf Vorlesungen zur Theoretischen Physik oder entsprechende Lehrbücher verwiesen, z.B. [Jac67]. Im folgenden wird das Problem kurz definiert und der Lösungsweg anhand einiger Stützstellen beschrieben.

Wir betrachten einen Atomkern, der durch eine orts- und zeitabhängige Ladungsdichte ρ sowie eine Stromdichte j und Magnetisierungsdichte M beschrieben werden kann. Bei einer Änderung einer oder mehrerer dieser inneren Größen entstrahlt der Kern elektromagnetische Strahlung in Form eines zeitlich periodisch veränderlichen Feldes $\sim \exp(-i\omega t)$.



Der Lösungsweg besteht aus mehreren Schritten:

- 1) Zunächst werden die Maxwellgleichungen im quellenfreien Außenraum gelöst. Dazu wird das elektromagnetische Feld nach Multipolen (Kugelfunktionen) entwickelt.
- 2) Danach sind die Amplituden der Multipole mit den Quellen der Strahlung ρ, j, M in Verbindung zu bringen. Dazu werden die Maxwellgleichungen im nicht-quellenfreien Innenraum unter Berücksichtigung der Randbedingungen gelöst.
- 3) Schließlich wird der Übergang zur Quantenmechanik vollzogen und aus den klassischen Intensitäten der Gammastrahlung Übergangswahrscheinlichkeiten berechnet.

Multipolentwicklung des Strahlungsfeldes

Im Vakuum (Wellenzone des Strahlungsfeldes, quellenfreier Raum) gelten die folgenden Maxwell-Gleichungen

$div \vec{E} = 0$

$div \vec{H} = 0$

$rot \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

$rot \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Unter Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}) \cdot \exp(-i\omega t)$
 $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \exp(-i\omega t)$

$erhält\ man \quad rot \vec{E} = ik \vec{H} \quad \quad rot \vec{H} = -ik \vec{E}$

$div \vec{E} = 0 \quad \quad div \vec{H} = 0$

Durch Eliminieren von entweder H oder E ergeben sich daraus zwei Gleichungssysteme (beachte $\nabla^2 = \Delta = \text{grad div} - \text{rot rot}$):

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\vec{H} = -\left(\frac{i}{k}\right) \text{rot } \vec{E}$$

und

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{H} = 0$$

$$\text{div } \vec{H} = 0$$

$$\vec{E} = \left(\frac{i}{k}\right) \text{rot } \vec{H}$$

Erweitert man die Gln (3) und (4) um die Transversalitätsbedingungen $\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \vec{r} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0$ so ist die allg. Lösung der Gln (2) eine Linearkombination der Lösungen der Gln (3) und (4):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}^E(\vec{r}) + \vec{E}^M(\vec{r})$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}^E(\vec{r}) + \vec{H}^M(\vec{r})$$

wobei $\vec{E}^M$ und $\vec{H}^M$ Lösungen der Gln (3)

und $\vec{E}^E$ und $\vec{H}^E$ Lösungen der Gln (4) sind.

Man erhält $\vec{E}^M(\vec{r}) = \sum_{\ell m} f_{\ell m}(kr) \cdot \vec{X}_{\ell m}(\theta, \varphi)$

magnet. 2^ℓ – Pol – Strahlung

$$\vec{H}^M(\vec{r}) = \left(-\frac{i}{k}\right) \text{rot } \vec{E}^M(\vec{r})$$

und

$$\vec{H}^E(\vec{r}) = \sum_{\ell m} f_{\ell m}(kr) \cdot \vec{X}_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

elektr. 2^ℓ – Pol – Strahlung

$$\vec{E}^E(\vec{r}) = \left(\frac{i}{k}\right) \text{rot } \vec{H}^E(\vec{r})$$

Die Vektor-Kugelfunktionen $\vec{X}_{\ell m}(\theta, \varphi)$ sind definiert durch

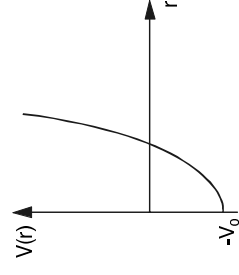
$$\sqrt{\ell(\ell+1)} \cdot \vec{X}_{\ell m}(\theta, \varphi) = \hat{L} \cdot Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

wobei der Drehimpulsoperator $\hat{L} = -i \cdot [\vec{r} \times \vec{\nabla}]$

Unter der Annahme, daß die Restwechselwirkung vernachlässigbar ist, ist jetzt folgende Schrödingergleichung zu lösen (wegen der Kugelsymmetrie des Problems bieten sich Polarkoordinaten an):

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + [E - V(r)] \right\} \psi = 0$$

Einfache Potentiale $V(r)$



Oszillator-Potential

Kastenpotential

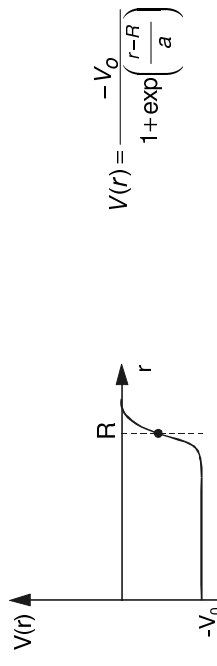
Kastenpotential mit unendl. hohen Wänden

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & : r \leq R \\ 0 & : r > R \end{cases}$$

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & : r \leq R \\ \infty & : r > R \end{cases}$$

Ein realistischeres Potential ist das Woods-Saxon-Potential, das die gleiche Radialabhängigkeit hat wie die Fermi-Ladungsverteilung der Kerne (vgl. Kap 1):



Für Oszillator- und Kastenpotentiale kann die Lösung der Schrödingergleichung analytisch angegeben werden. Für das Woods-Saxon-Potential ist ein numerisches Lösungsverfahren nötig.

Die Lösung wurde bereits allgemein hergeleitet (vgl. Kap 2):

$$\Psi_{nlm}(\vec{r}) = \underbrace{u_{nl}(r)}_{\text{Radialfunktion, hängt von } V(r) \text{ ab}} \cdot \underbrace{Y_{\ell m}(\theta, \varphi)}_{\text{Winkelfunktion, unabh. von } V(r)}$$

Beobachtete magische Zahlen

N	2	8	20	28	50	82	126	(184)	(196)
Z	2	8	20	28	50	82	(114)	(164)	

Die Werte in Klammern sind theoretisch vorhergesagt, experimentell aber noch nicht bestätigt.

2. Systematische Korrelationen zwischen Spin, Parität und magnetischem Moment von Kernen im Grundzustand (vgl. Kap 1).

Grundlagen des Einteilchen-Schalenmodells

In Analogie zur Berechnung der Eigenzustände der Elektronen im Atom wird versucht, die Bewegung der Nukleonen in einem mittleren Zentralpotential darzustellen. Für die Elektronenhülle ist das Zentralpotential das Coulombpotential des Kerns. Im Kern ist ein Zentralpotential dagegen nicht sofort ersichtlich.

Ansatz für die Hamiltonfunktion:

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij}$$

kinet.Energie potentielle Energie

Dieses Vielteilchenproblem ist exakt nicht lösbar. Man setzt daher an:

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_i V_i + \left\{ \sum_{i,j:i \neq j} V_{ij} - \sum_i V_i \right\}$$

mittleres Potential Rest-Wechsel-Wirkung (Klein?)

Damit ist mathematisch erreicht, daß das A-Teilchenproblem auf A Einteilchenprobleme reduziert wird, sofern die Restwechselwirkung klein ist. In diesem Fall ist dann Störungsrechnung möglich.

Daraus ergibt sich folgendes physikalisches Bild: Es bestehen zunächst keine Korrelationen (Wechselwirkungen) zwischen den Nukleonen. Erwartet wird das Auftreten einer Schalenstruktur (analog zur Hülle). Ebenso sollten Aussagen über Spins, Paritäten, und magnetische Momente der Kerne im Grundzustand und energetisch niedrig liegenden angeregten Zustände möglich sein.

Die allgemeine Lösung für das elektrische und magnetische Feld ergibt sich nun zu

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{\ell m} \left\{ C_{\ell m}^M \cdot r_{\ell m}^M \cdot \vec{X}_{\ell m} + C_{\ell m}^E \cdot \frac{i}{k} \operatorname{rot} \left(r_{\ell m}^E \cdot \vec{X}_{\ell m} \right) \right\}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \sum_{\ell m} \left\{ C_{\ell m}^M \cdot \left(-\frac{i}{k} \right) \cdot \operatorname{rot} \left(r_{\ell m}^M \cdot \vec{X}_{\ell m} \right) + C_{\ell m}^E \cdot r_{\ell m}^E \cdot \vec{X}_{\ell m} \right\}$$

wobei die Größen $C_{\ell m}^M$ und $C_{\ell m}^E$ Amplituden der magnetischen und elektrischen Strahlungskomponenten sind.

Quellen der Multipolstrahlung

Analog zu dem eben beschriebenen Verfahren werden jetzt die Maxwellgleichungen für das Kerninnere gelöst. Dabei wird angenommen, daß $\rho(\vec{r}, t)$, $\vec{j}(\vec{r}, t)$ und $\vec{M}(\vec{r}, t)$ eine Zeitabhängigkeit $\sim \exp(-i\omega t)$ besitzen (Literatur hierzu z.B.: [Roy67]).

Für die Amplituden erhält man

$$C_{\ell m}^E = -\frac{8\pi i}{(2\ell+1)!!} \cdot k^{\ell+2} \cdot \sqrt{\frac{\ell+1}{\ell}} (Q_{\ell m} + Q_{\ell m}^i)$$

wobei

$$Q_{\ell m} = \frac{1}{2} \int r^{\ell} \cdot Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) \cdot \rho(\vec{r}) \, d\vec{r}$$

$$Q_{\ell m}^i = \frac{-ik}{2(\ell+1)} \int r^{\ell} \cdot Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) \cdot [\operatorname{div}(\vec{r} \times \vec{M}) - \frac{1}{c} \vec{r} \cdot \vec{j}] \, d\vec{r}$$

und

$$C_{\ell m}^M = \frac{8\pi i}{(2\ell+1)!!} \cdot k^{\ell+2} \cdot \sqrt{\frac{\ell+1}{\ell}} (M_{\ell m} + M_{\ell m}^i)$$

mit

$$M_{\ell m} = \frac{-1}{2(\ell+1)c} \int r^{\ell} \cdot Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) \cdot \operatorname{div}(\vec{r} \times \vec{j}) \, d\vec{r}$$

$$M_{\ell m}^i = -\frac{1}{2} \int r^{\ell} \cdot Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) \cdot \left[\operatorname{div} \vec{M} - \frac{k^2}{\ell+1} (\vec{r} \cdot \vec{M}) \right] \, d\vec{r}$$

Damit sind die im Labor gemessenen Amplituden mit den inneren Größen des Kerns in Verbindung gebracht. Eine Messung der Amplituden erlaubt somit Einblick in die innere Struktur des Kerns.

Winkelverteilung der Gamma-Strahlung

Die Winkelverteilung der Intensität (klassisch und quantenmechanisch) ist für jeden Multipol charakteristisch. Daher kann durch Messung der Winkelverteilung die Multipolordnung bestimmt werden.

Der Energiefluß des elektromagnetischen Feldes ist durch den Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \left(\frac{c}{4\pi}\right) \cdot \vec{E} \times \vec{H}$$

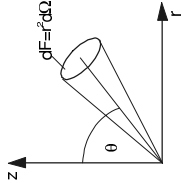
gegeben

In der Wellenzone gilt $|S| \approx \frac{c}{4\pi} \cdot |\vec{E}|^2 \approx \frac{c}{4\pi} \cdot |\vec{H}|^2$

Die in ein Raumwinkелеlement $d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$ emittierte Intensität $u(\theta, \varphi)$ ergibt sich zu

$$u^E(\theta, \varphi) \sim |C_{\ell m}^E|^2 \cdot \bar{X}_{\ell m}^* \cdot \bar{X}_{\ell m}$$

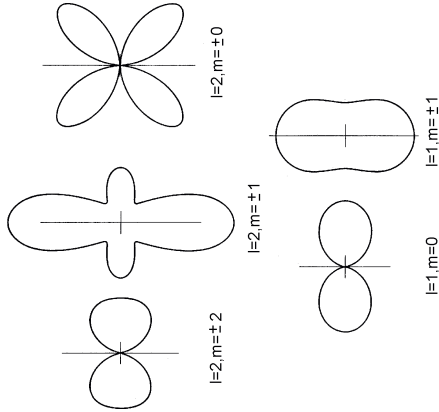
$$u^M(\theta, \varphi) \sim |C_{\ell m}^M|^2 \cdot \bar{X}_{\ell m}^* \cdot \bar{X}_{\ell m}$$



Daraus folgt:

- 1) Die abgestrahlte Intensität ist proportional zum Quadrat der Amplituden.
- 2) Die Abhängigkeit der Intensität von θ und φ (Winkelverteilung) ist durch das Quadrat der Vektor-Kugelfunktionen $|X_{\ell m}|^2$ bestimmt und ist für elektrische und magnetische Strahlung gleich.

Beispiele für Winkelverteilungen (nach [Jac67])



4.3 Das Schalenmodell

Bisher haben wir vielfach von der Vorstellung Gebrauch gemacht, daß die Nukleonen im Kern durch ein anziehendes Potential gebunden sind („Potentialtopf“, vgl. Fermigas-Modell, Tröpfchenmodell bzgl. anziehender Kräfte). Diese Vorstellung wird nahegelegt durch den ziemlich scharfen Rand des Kerns (Potentialsprung), innerhalb dessen anziehende Kräfte herrschen. Innerhalb des Kerns bewegen sich die Nukleonen annähernd wechselwirkungsfrei, da alle Niveaus bis zur Fermi-Energie besetzt sind. Wegen des Pauliprinzips können zumindest bei tiefgebundenen Nukelonen keine Umbesetzungen aufgrund von Stößen stattfinden.

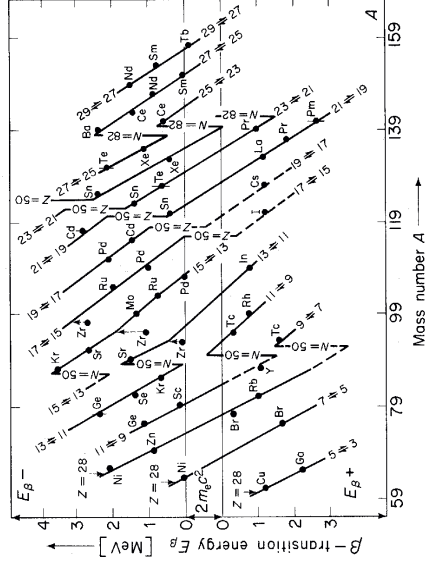
Experimentelle Befunde zu einer Schalenstruktur des Atomkerns

Beim Aufbau der Elektronenhülle von Atomen werden bei ganz bestimmten Ordnungszahlen besonders stabile Atome beobachtet (Edelgaskonfigurationen). Ähnliches wird bei den Atomkernen beobachtet.

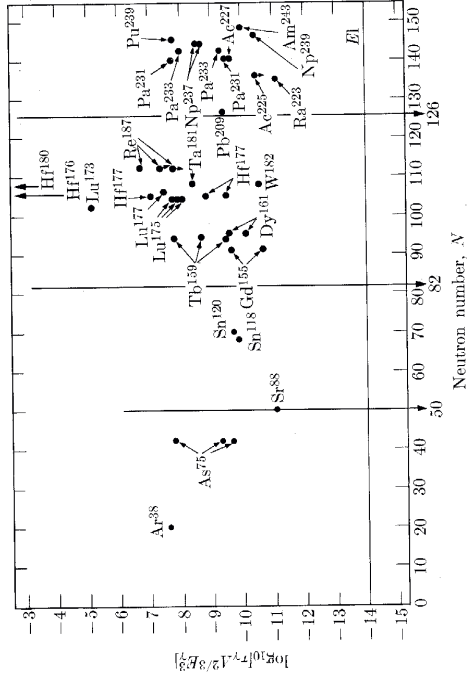
1. Existenz „magischer“ Zahlen

Nimmt die Protonen- oder Neutronenzahl einen „magischen“ Wert an, so findet man, daß

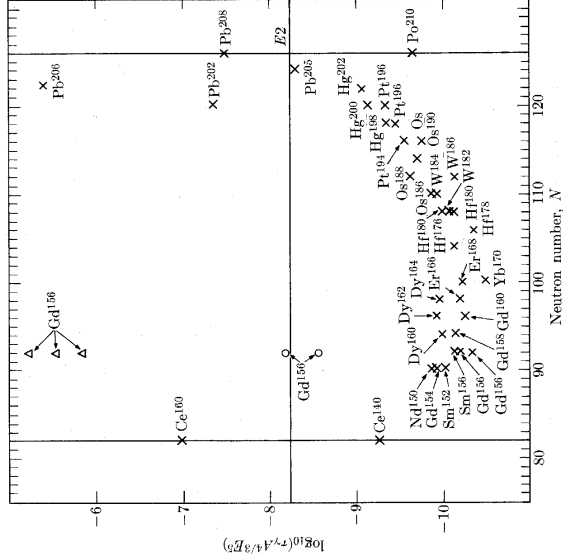
- a) die Bindungsenergie besonders groß ist, was nicht durch das Tröpfchenmodell zu erklären ist;
- b) diese Nuklide in der Natur besonders häufig vorkommen, z.B. gibt es 7 stabile Nuklide mit $N = 82$, 6 stabile Nuklide mit $N = 50$);
- c) die ersten angeregten Zustände besonders hohe Anregungsenergien besitzen.



Als Beispiel zu a) sind die im β -Zerfall beobachteten Umwandlungsenergien in Abhängigkeit von der Massenzahl gezeigt. Aus [May84]



Vergleichbare E1-Lebensdauern als Funktion der Neutronenzahl:
Gerade Linie = Weisskopfab schätzung. Aus [Eng66]



Vergleichbare E2-Lebensdauern als Funktion der Neutronenzahl:
Gerade Linie = Weisskopfab schätzung. Aus [Eng66]

Intensitäten und Übergangswahrscheinlichkeiten

Klassisch ist die Übergangswahrscheinlichkeit durch das Verhältnis der pro Sekunde emittierten Quanten der Energie $\hbar\omega$ und der Energie eines Quants gegeben.

$$T_{i \rightarrow f} = \frac{1}{\hbar\omega} \oint_{4\pi} \hat{S} d\vec{f} \quad [T_{i \rightarrow f}] = s^{-1}$$

Unter Benutzung der oben für $\hat{E}_{\ell m}(\vec{r})$ und $\hat{H}_{\ell m}(\vec{r})$ berechneten Ausdrücke erhält man für die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$T_{\ell m}^E = \frac{8\pi(\ell+1)}{\ell[(2\ell+1)!]^2} \cdot \frac{k^{2\ell+1}}{\hbar} \cdot |Q_{\ell m} + Q_{\ell m}^*|^2$$

$$T_{\ell m}^M = \frac{8\pi(\ell+1)}{\ell[(2\ell+1)!]^2} \cdot \frac{k^{2\ell+1}}{\hbar} \cdot |M_{\ell m} + M_{\ell m}^*|^2$$

Der Übergang zur Quantenmechanik wird dadurch vollzogen, daß die klassischen Momente durch die Erwartungswerte der entsprechenden Operatoren ersetzt werden:

$$Q_{\ell m} \rightarrow \int \Psi_f^* \cdot \hat{M}_{\ell m}^E \cdot \Psi_i \, d\tau = \langle f | \hat{M}_{\ell m}^E | i \rangle$$

$$M_{\ell m} \rightarrow \int \Psi_f^* \cdot \hat{M}_{\ell m}^M \cdot \Psi_i \, d\tau = \langle f | \hat{M}_{\ell m}^M | i \rangle$$

Man erhält schließlich für die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$T_{\ell m}^{(\sigma)} = \frac{8\pi(\ell+1)}{\ell[(2\ell+1)!]^2} \cdot \frac{k^{2\ell+1}}{\hbar} \cdot |\langle f | \hat{M}_{\ell m}^{(\sigma)} | i \rangle|^2 \quad \sigma = \begin{cases} E \\ M \end{cases}$$

Die experimentell interessierende Übergangswahrscheinlichkeit ergibt sich durch Summation über die möglichen End-Unterzustände und Mittelung über die möglichen Anfangs-Unterzustände

$$T_{\ell}^{(\sigma)} = \frac{2}{2I_i + 1} \cdot \sum_{m_i, m_f} T_{\ell m}^{(\sigma)}$$

Also

$$T_{\ell}^{(\sigma)} = \frac{8\pi(\ell+1)}{\ell[(2\ell+1)!]^2} \cdot \frac{k^{2\ell+1}}{\hbar} \cdot B(\sigma, \ell)$$

mit der reduzierten Übergangswahrscheinlichkeit

$$B(\sigma, \ell) = \frac{1}{2I_i + 1} \cdot \sum_{m_i, m_f} |\langle f | \hat{M}_{\ell m}^{(\sigma)} | i \rangle|^2$$

Die reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit ist i.a. sehr schwierig zu berechnen. Für ein einzelnes Proton außerhalb eines Kernumpfes aus abgepaarten Nukleonen hat Weißkopf unter vereinfachenden Annahmen über die Wellenfunktionen eine Abschätzung der Übergangswahrscheinlichkeiten für elektrische und magnetische Übergänge gegeben (Weißkopf-Einteichen-Abschätzung)

$$T_W(E\ell) = \frac{2\ell(\ell+1)}{\ell![(2\ell+1)!!]^2} \cdot \left(\frac{3}{\ell+3}\right)^2 \cdot \frac{e^2 k}{\hbar} \cdot (kR)^{2\ell}$$

$$T_W(M\ell) = T_W(E\ell) \cdot 10 \cdot \left(\frac{\hbar^2}{m_p c R}\right)^2$$

Diskussion der Formeln:

- Abhängigkeit von der Multipolordnung: Da $kR \ll 1$, nimmt die Übergangswahrscheinlichkeit bei gegebener Energie mit zunehmendem Drehimpuls ℓ stark ab.
- Abhängigkeit von der Übergangsenergie: Da $\hbar\omega = \hbar ck$, folgt $T_\ell \sim E_\gamma^{2\ell+1}$

Die Intensität nimmt also mit zunehmender Übergangsenergie bei gegebener Multipolordnung stark zu.

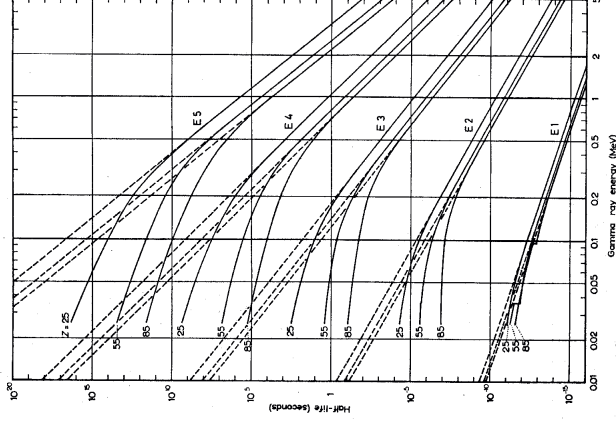
Für einen Dipolübergang folgt $T_1 \sim E^3$, für einen Quadrupolübergang $T_2 \sim E^5$ usw.

- Abhängigkeit vom Charakter der Strahlung: Für eine vorgegebene Multipolordnung gilt für das Verhältnis von magnetischer zu elektrischer Strahlung

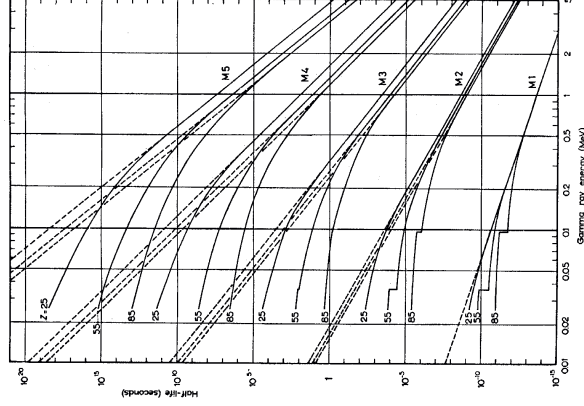
$$\frac{T_\ell^M}{T_\ell^E} \approx \left(\frac{g\mu_K}{eR}\right)^2 \approx 10^{-2}$$

Da die Intensität der elektrischen Strahlung des gleichen Multipols etwa 10 ... 100 mal größer ist als die magnetische, kann die magnetische ℓ -Strahlung mit der elektrischen $(\ell+1)$ -Strahlung intensitätsmäßig konkurrieren.

In den folgenden Abbildungen sind die Ergebnisse der Weißkopfabschätzungen für verschiedene Multipolordnungen gezeigt. Für elektrische Dipol- und Quadrupolübergänge werden diese Abschätzungen mit experimentellen Daten verglichen. Im Hinblick auf die starken Vereinfachungen, die den Weißkopfabschätzungen zugrundeliegen, sind die beobachteten Abweichungen vom Experiment nicht überraschend. Die beobachtete Verstärkung der Intensität der E2-Übergänge im Bereich der Seltenen Erden ist ein Hinweis auf kollektive Eigenschaften dieser Kerne, in diesem Fall korrelierte Bewegungen vieler Protonen ($\rightarrow$ Kollektivmodell, s.u.).



aus [Led67]



Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts

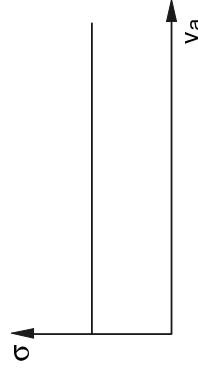
Wenn das Matrixelement konstant ist, ist der integrale Wirkungsquerschnitt für eine gegebene Reaktion

$$\sigma \sim \frac{k_f}{k_i} \sim \frac{v_b}{v_a}$$

Spezialfälle

a) elastische Streuung:

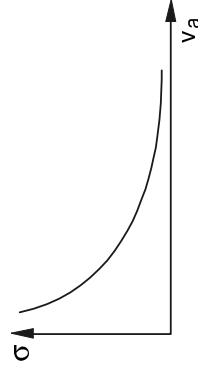
$$v_a = v_b ; \sigma = \text{const}$$



b) exotherme, neutroneninduzierte Reaktion:

$Q = 1 \text{ MeV} > 0$; $T_n \approx 1 \text{ eV}$; daher $v_b \approx \text{const}$

$$\sigma \sim \frac{1}{v_a}$$

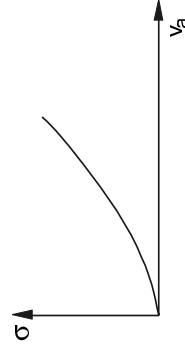


c) exotherme, durch geladene Teilchen ausgelöste Reaktion:

Damit die Reaktion stattfinden kann, muß das Teilchen in den Kern eindringen, d.h. es muß der Coulombwall durchdrungen werden. Die Transmissionswahrscheinlichkeit wird durch den Gamow-Faktor G gegeben.

$Q > 1 \text{ MeV}$; $T_p \approx 1 \text{ MeV}$

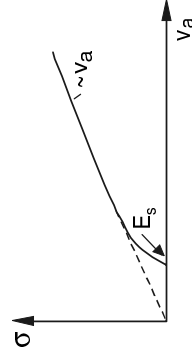
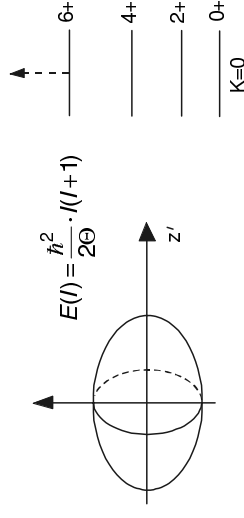
$$\sigma \sim \frac{1}{v_a} \cdot e^{-G_a} \quad \text{für eine } (p,n) \text{-Reaktion}$$



d) inelastische Neutronenstreuung:

Da $Q < 0$, existiert eine Schwellenenergie $E_{S'}$, oberhalb derer die Reaktion erst einsetzt. Für den Wirkungsquerschnitt erhält man folgenden qualitativen Verlauf:

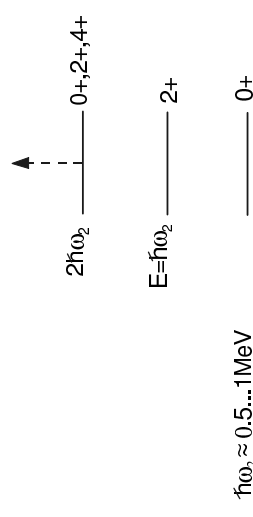
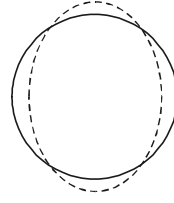
$$\sigma \sim \sqrt{T_a - E_S}$$

Kollektive Anregungen1. Rotationsanregungen deformierter Kerne

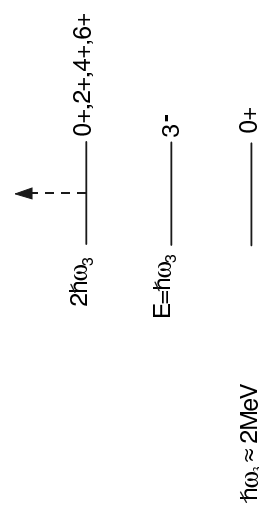
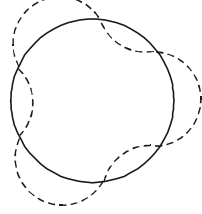
Rotationsanregungen sind bis zu dem Punkt beobachtet worden, an dem der schnell rotierende Kern unter den Zentrifugalkräften zerfällt ($I \approx 60 \dots 100 \hbar$).

2. Oberflächenschwingungen sphärischer Kerne

a) Quadrupolschwingung



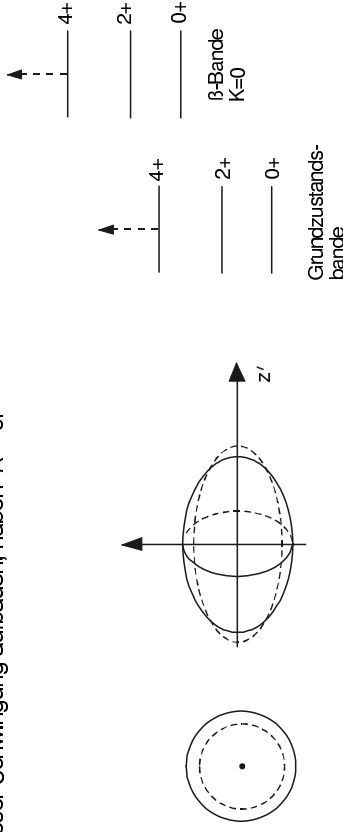
b) Oktupolschwingung



3. Oberflächenschwingungen deformierter Kerne

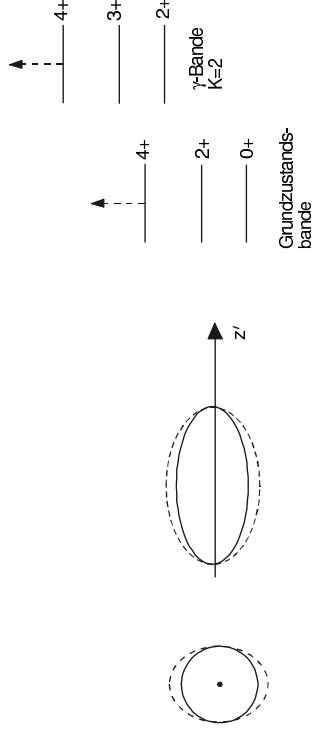
a) β -Schwingung

Bei diesem Schwingungstyp handelt es sich um eine Vibration in Richtung der Symmetrieachse. Daher bleibt die Achsialsymmetrie erhalten. Rotationszustände, die sich auf dieser Schwingung aufbauen, haben $K = 0$.



b) γ -Schwingung

Diese Vibration erfolgt senkrecht zur Symmetrieachse. Die Achsialsymmetrie bleibt nicht erhalten. Die Projektion des Gesamtdrehimpulses auf die z' -Achse ist $K = 2$.



Das im folgenden Bild gezeigte Niveauschema von ^{232}Th zeigt neben der Anregung der Grundzustandsrotationsbande (Mitte) Rotationszustände, die auf der γ -Vibration und der β -Vibration aufbauen (linker Teil der Abbildung). Rechts sieht man eine Oktopol-schwingung mit dazugehöriger Rotationsbande (1^+ ; 3^+ ; 5^+ ...); ganz rechts einige noch nicht eindeutig identifizierte Niveaus [Ger83].

Phasenraumbetrachtungen, Reziprozitätssatz

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Teilchens um den Winkel θ in das Raumwinkelement $d\Omega$ ist gegeben durch $(d\sigma/d\Omega) = W(\theta)/j_e$. Bei Kernreaktionen ist die Wechselwirkungsenergie H_w i.a. klein gegen die Gesamtenergie des Systems; daher ist die Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit W mit Hilfe der „Goldenen Regel“ möglich:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar^2} \cdot |H_{fi}|^2 \cdot \frac{dn}{dE_o} \quad [W] = s^{-1}$$

Hierbei ist dn/dE_o die Anzahl der erreichbaren Endzustände pro Energieintervall, also die Dichte der Endzustände (Zustandsdichte)

$$\text{und das Matrixelement} \quad H_{fi} = \langle f | H_w | i \rangle = \int \Psi_f^* H_w \Psi_i d\tau$$

Um das Matrixelement bestimmen zu können, muß die Zustandsdichte bekannt sein. Wir machen hier die gerechtfertigte Annahme, daß das Matrixelement im beobachteten Energieintervall konstant ist. Dann ist die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts nur durch die Zustandsdichte bestimmt. Nach der Reaktion sind die Reaktionspartner weit voneinander entfernt, d.h. es ist kein Potential mehr wirksam, und die Zustandsdichte freier Teilchen ist anwendbar. Daher

$$dn = \frac{dV_{\text{Phasenraum}}}{V_{\text{Einheitszelle}}} = \frac{\tau \cdot 4\pi \cdot p^2 dp}{(2\pi \cdot \hbar)^3}$$

$$\frac{dn}{dE_o} = \frac{1}{dE_o} \cdot \frac{\tau \cdot 4\pi \cdot p^2 dp}{(2\pi \cdot \hbar)^3}$$

p ist der Impuls des beobachteten Teilchens. Da im Schwerpunktsystem $p_o = -p_B$, gibt es nur einen unabhängigen Impuls. Weiter gilt für das zur Verfügung stehende Energieintervall

$$dE_o = dE_b + dE_B = \frac{p_b}{m_b} dp_b + \frac{p_B}{m_B} dp_B$$

$$\text{Es folgt schließlich:} \quad \frac{dn}{dE_o} = \frac{\tau \cdot 4\pi \cdot m_f \cdot k_f}{(2\pi)^3 \cdot \hbar^2}$$

Dies gilt zunächst für spinlose Teilchen. Für Teilchen mit Spin erlaubt das Pauliprinzip $2I+1$ Teilchen in jedem Zustand. Daher:

$$\frac{dn}{dE_o} = \frac{4\pi \cdot \tau}{(2\pi)^3 \hbar^2} \cdot m_f k_f \cdot (2I_b + 1) \cdot (2I_B + 1)$$

Für die Berechnung des Wirkungsquerschnitts benutzen wir:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\theta = \frac{W_\theta}{j_e} = \frac{W}{4\pi \cdot j_e}$$

$$\text{und erhalten} \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\theta = \frac{(2I_b + 1) \cdot (2I_B + 1)}{(2\pi)^2 \hbar^4} \cdot |H_{fi}|^2 \cdot m_i m_f \cdot \frac{k_f}{k_i}$$

Mit der Annahme, daß $|H_{fi}|^2 = |H_{fi'}|^2$ erhält man den Reziprozitätssatz für Kernreaktionen

$$\frac{\sigma_{i \rightarrow f}}{\sigma_{f \rightarrow i}} = \frac{(2I_b + 1) \cdot (2I_B + 1)}{(2I_a + 1) \cdot (2I_A + 1)} \cdot \frac{k_f^2}{k_i^2}$$

Dieses Integral ist gleich dem Teilchenstrom, der durch Reaktionen dem elastischen Kanal verlorengeht und nicht mehr im Strom der gestreuten Teilchen erscheint. Analog zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts für die elastische Streuung wird für Reaktionen zunächst das Integral

$$\int_{\Omega} d\Omega \quad \text{mit} \quad \vec{j} = \frac{\hbar}{2im} \{ \Psi_T^* \nabla \Psi_T - \Psi_T \nabla \Psi_T^* \}$$

ermittelt.

Der integrale Wirkungsquerschnitt für Reaktionen ergibt sich zu $\sigma_R = \frac{1}{j_e} \int_{\Omega} r^2 j_T d\Omega$.

$$\text{Man erhält: } \sigma_R = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell + 1) \cdot (1 - |\eta_{\ell}|^2) = \sum_{\ell} \sigma_{R_{\ell}}$$

$$\text{mit } \sigma_{R_{\ell}} = \pi \cdot \lambda^2 \cdot (2\ell + 1) \cdot (1 - |\eta_{\ell}|^2)$$

Diskussion:

1. $\sigma_{R_{\ell}} = 0$ für $|\eta_{\ell}| = 1$.

In diesem Fall tritt wegen $\eta_{\ell} = \exp(2i\delta_{\ell})$ nur eine Phasenverschiebung ein, jedoch keine Änderung der Amplitude.

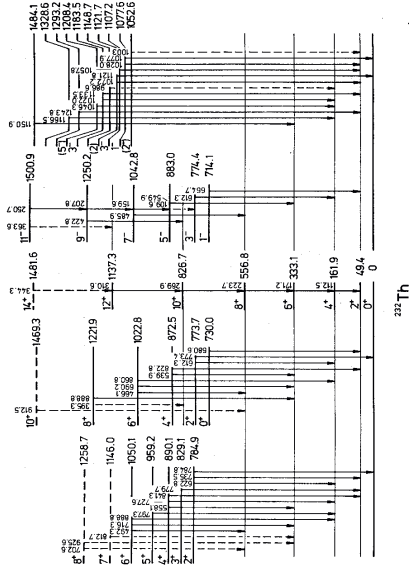
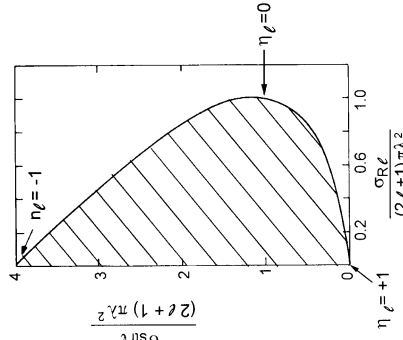
2. $\sigma_{R_{\ell}}$ ist maximal für $|\eta_{\ell}| = 0$, und zwar $\sigma_{R_{\ell \max}} = \pi \cdot \lambda^2 \cdot (2\ell + 1)$

3. Neben einer Reaktion ist immer die Streuung vorhanden. In kernphysikalischen Prozessen ist die elastische Streuung häufig dominant.

4. Der Streuquerschnitt wird maximal, wenn $\eta_{\ell} = -1$. In diesem Fall ist

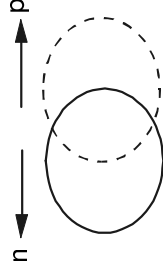
$$\sigma_{S_{\ell \max}} = 4\pi \cdot \lambda^2 \cdot (2\ell + 1)$$

Der Zusammenhang zwischen den Wirkungsquerschnitten für elastische Streuung und Reaktionen lässt sich graphisch darstellen:

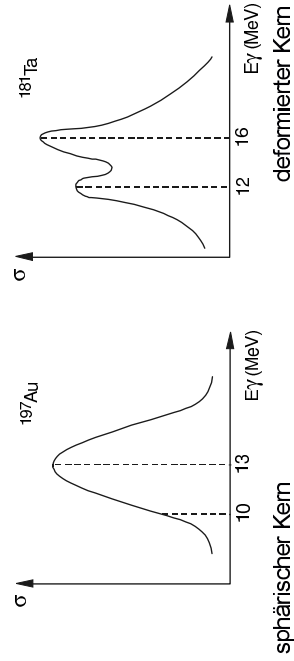


4.. Riesenresonanzen

Die Riesenresonanz wird als Entmischungsschwingung von Protonen und Neutronen im Kern interpretiert. Im einfachsten Fall handelt es sich um eine Dipolschwingung. Man kennt aber auch Quadrupol- und Monopol-Riesenresonanzen. Letztere sind Atmungsschwingungen, die Auskunft über die Kompressibilität der Kernmaterie geben. Beobachtet werden Riesenresonanzen bei der Photoabsorption oder der Coulombanregung durch schwere Ionen mit nahezu relativistischen Geschwindigkeiten.



Typische Anregungsfunktionen:



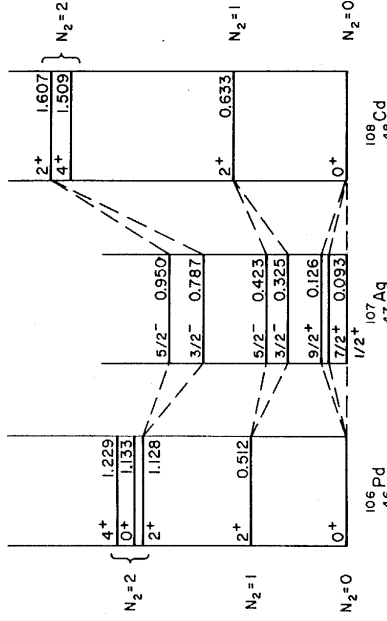
Beim deformierten Kern ^{181}Ta werden zwei Maxima beobachtet, die Schwingungen senkrecht und parallel zur Symmetrieachse entsprechen.

Kopplung eines unpaarigen Nukleons an einen gg-Rumpf

Wir betrachten 2 Grenzfälle:

a) „Schwache“ Kopplung

Die kollektiven Bewegungen des Rumpfes haben keine wesentliche Beziehung zur Bewegung des unpaarigen Nukleons. Das Nukleon „steht“ einen im zeitlichen Mittel sphärischen Rumpf. Die Energien und Drehimpulse des Rumpfes und des Nukleons verhalten sich im wesentlichen additiv. In der Abbildung ist gezeigt, wie das unpaarige Proton von ¹⁰⁷Ag an die kollektive Vibration (I = 2+) der gg-Kerne ¹⁰⁶Pd und ¹⁰⁸Cd ankoppelt (aus [Hor75]).

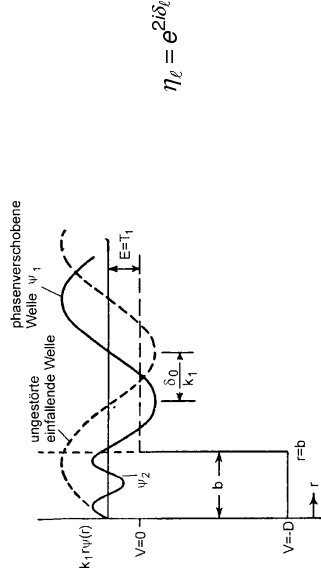
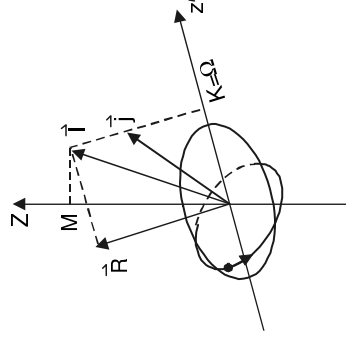


b) „Starke“ Kopplung

Dieser Kopplungstyp tritt bei permanent deformierten Kernen auf. Wenn die Rotation des Rumpfes langsam gegenüber der Bewegung des unpaarigen Nukleons ist, bewegt sich das Nukleon in einem deformierten Potential. Die Nukleonenbewegung wird gegenüber dem sphärischen Grenzfall stark modifiziert.

Kopplungsschema:

Erhaltungsgrößen sind jetzt nicht mehr $\vec{R}$ und $\vec{j}$, sondern der Gesamtdrehimpuls $\vec{I} = \vec{R} + \vec{j}$, sowie die Projektionen M und $K = \Omega$. Die Bewegung im Laborsystem ist kompliziert: $\vec{R}$ und $\vec{j}$ führen Präzessionsbewegungen um die z'-Symmetrieachse aus, die ihrerseits um den I-Vektor präzediert.



Zur Bestimmung der Koeffizienten η_ℓ ist jetzt die Schrödinger-Gleichung für jede Partialwelle bei vorgegebenem Potential $V(r)$ zu lösen. Aus den Randbedingungen sind dann die Phasenverschiebungen δ_ℓ zu ermitteln.

Berechnung des integralen Wirkungsquerschnitts für Streuung und Reaktionen

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\text{Unter Benutzung der Relation } \int P_\ell(\cos\theta) \cdot P_{\ell'}(\cos\theta) \, d\Omega = \frac{4\pi}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}$$

$$\text{ergibt sich } \sigma_{Sr} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell+1) \cdot |1-\eta_\ell|^2 = \sum_{\ell} \sigma_\ell \quad \text{mit } \sigma_\ell = \pi k^{-2} (2\ell+1) \cdot |1-\eta_\ell|^2$$

Gegenüber dem einfachen Bild der Ringzonenerlegung ergibt die exakte Behandlung einen Zusatzterm $|1-\eta_\ell|^2$.

Einschluß von Reaktionen

Treten neben der elastischen Streuung Kernreaktionen (= Kernumwandlungen) auf, so verringert sich die Anzahl der elastisch gestreuten Teilchen. Es tritt ein Teilchenzahlverlust im elastischen Kanal auf. Falls nur elastische Streuung stattfindet, gilt

$$\int_{4\pi} d\Omega = 0$$

d.h. gleich viele Teilchen treten in eine das Streuzentrum umgebende Kugel ein und wieder aus. Wenn zusätzlich Reaktionen auftreten, so wird der Strom der auslaufenden (gestreuten) Teilchen geringer als der der einlaufenden und somit das Integral

$$\int_{4\pi} d\Omega = \text{endlich}$$

Hierbei sind die Funktionen $j_\ell(kr)$ die sphärischen Bessel-Funktionen, die für $kr \gg \ell$ (großer Abstand des Detektors vom Streuzentrum) die asymptotische Form

$$j_\ell(kr) \rightarrow \frac{\sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)}{kr} \quad (kr \gg \ell)$$

annehmen. Die Funktionen $P_\ell(\cos \theta)$ sind die Legendre-Polynome, die mit den Kugelfunktionen zusammenhängen:

$$Y_{\ell 0}(\theta) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \cdot P_\ell \cos(\theta)$$

Mit $\sin \varphi = \frac{i}{2}(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi})$ läßt sich die einlaufende Welle umschreiben:

$$\Psi_\ell(r \rightarrow \infty) = \frac{1}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \cdot i^{\ell+1} \cdot \left[e^{-i(kr - \frac{\ell\pi}{2})} - e^{i(kr - \frac{\ell\pi}{2})} \right] \cdot P_\ell \cos(\theta)$$

Formal wurde dadurch die ebene Welle durch eine Überlagerung von ein- und auslaufenden Kugelwellen ausgedrückt. Die Gesamt-Wellenfunktion unterscheidet sich von der einlaufenden Welle nur dadurch, daß die auslaufende Kugelwelle durch das Streupotential modifiziert wird (Faktor η_ℓ).

$$\Psi_T(r \rightarrow \infty) = \frac{1}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \cdot i^{\ell+1} \cdot \left[e^{-i(kr - \frac{\ell\pi}{2})} - \eta_\ell \cdot e^{i(kr - \frac{\ell\pi}{2})} \right] \cdot P_\ell \cos(\theta)$$

Die Streuwelle ergibt sich als Differenz der Gesamtwellen Ψ_T und der einlaufenden Welle Ψ_e .

$$\Psi_{Str} = \frac{1}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \cdot i^{\ell+1} \cdot (1 - \eta_\ell) \cdot e^{i(kr - \frac{\ell\pi}{2})} \cdot P_\ell \cos(\theta)$$

Da $i^{\ell} = e^{i\pi \frac{\ell}{2}}$ folgt für die Streuamplitude $f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \cdot (1 - \eta_\ell) \cdot P_\ell \cos(\theta)$

Der differentielle Streuquerschnitt ergibt sich schließlich zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4K^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \cdot (1 - \eta_\ell) \cdot P_\ell \cos(\theta) \right|^2$$

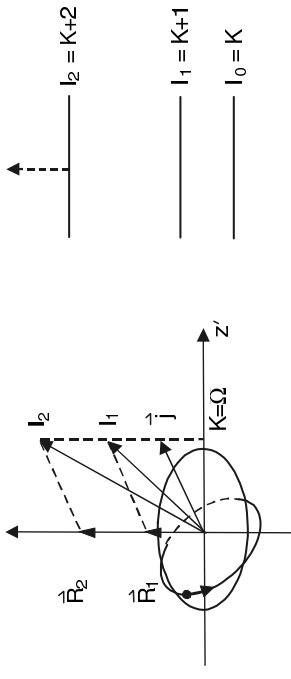
Der Wirkungsquerschnitt ist danach durch einen Satz von Zahlen η_ℓ vollständig bestimmt. Wir haben jetzt die Aufgabe, diese Zahlen mit den Eigenschaften des Streupotentials in Verbindung zu bringen. Die Methode dazu wurde bereits in Kap. 2 bei der Behandlung der Neutron-Proton-Streuung kurz gezeigt.

Für elastische Streuung gilt folgender Zusammenhang zwischen dem Koeffizienten η_ℓ der Phasenverschiebung δ_ℓ , die die ℓ -te Partialwelle durch den Einfluß des Streupotentials erleidet:

$$\eta_\ell = e^{2i\delta_\ell}$$

Anregung eines Rotationsbandes bei festem Einteilchendrehimpuls j :

Die Projektion auf die Symmetrieachse ist für alle Rotationsstufen $K = \Omega = \text{const.}$ Die Spinfolge des Rotationsbandes ist $I = K, K+1, K+2, \dots$



Beispiel: ^{237}Np . Man erkennt verschiedene Rotationsbanden. Die Abweichungen vom Gesetz $E(I) \sim I(I+1)$ in den beiden $K = 1/2$ -Banden (linker Teil) versteht man (vgl. Nilsson-Modell weiter unten).

aus [Boh75]



4.5 Das Nilsson-Modell

Im Rahmen des Nilsson-Modells werden die Eigenenergien eines einzelnen, unpaarigen Nukleons im deformierten Potential berechnet. Das Nilsson-Modell ist daher ein Schalenmodell für deformierte Kerne. In Analogie zum Schalenmodell für sphärische Kerne wird ein mittleres Potential eingeführt, in dem sich das betrachtete Nukleon bewegt. Nilsson benutzte das Potential des anisotropen, harmonischen Oszillators mit einem Zusatzterm für die Spin-Bahn-Kopplung sowie einem Korrekturterm, der die Energien von Zuständen mit hohem Drehimpuls den experimentellen Befunden anpaßt.

$$H_{Ni} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \{ \omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) + \omega_{\parallel}^2 z^2 \} + C(\vec{l} \cdot \vec{s}) + D\ell^2$$

Der Hamiltonoperator für das gesamte System (Rumpf + Nukleon) ist:

$$\hat{H} = \hat{H}_{Ni} + \frac{\hat{P}^2}{2\Theta} = \hat{H}_{Ni} + \frac{(\vec{I} - \vec{j})^2}{2\Theta}$$

Er führt zu folgenden Eigenenergien:

$$E = E_{Ni} + \frac{\hbar^2}{2\Theta} \left\{ \ell(\ell+1) - K(K+1) + \delta_{K, \frac{1}{2}} \cdot a \cdot (-1)^{\ell+\frac{1}{2}} \cdot \left(j + \frac{1}{2}\right) \right\}$$

$a = \text{Entkopplungsparameter}$

Ergebnis: Auf jedem Einteilchenzustand mit der Energie E_{Ni} baut sich eine Rotationsbande auf, wie es experimentell beobachtet wird. Der Zusatzterm für die Zustände mit $(K = 1/2)$ bewirkt die in diesen Banden beobachteten Abweichungen vom $\ell(\ell+1)$ -Gesetz.

Berechnung der Eigenenergien E_{Ni} des Nilsson-Modells

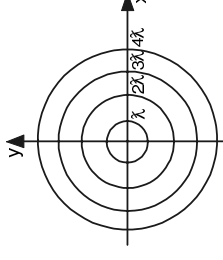
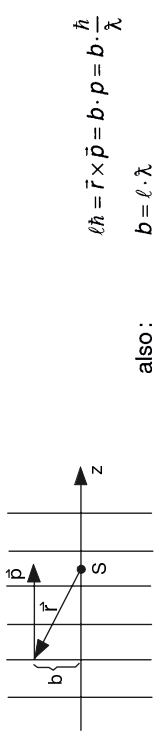
Durch die Deformation des Potentials wird die vom sphärischen Schalenmodell bekannte Entartung der Zustände bezüglich der M -Quantenzahl aufgehoben. Jeder Schalenmodellzustand spaltet in $(j + 1/2)$ Zustände auf, die durch die Projektion Ω des Einteilchendrehimpulses j auf die Symmetrieachse gekennzeichnet sind. Jeder Zustand kann nur noch von 2 Nukleonen der gleichen Sorte besetzt werden.

Definition des Deformationsparameters:

$$\omega_{\perp}^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{2}{3} \delta \right)$$

$$\omega_{\parallel}^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{4}{3} \delta \right)$$

Für den Zusammenhang zwischen Stoßparameter und Drehimpuls ergibt sich:



Die einlaufende Welle kann in der xy-Ebene in Ringzonen zerlegt werden, denen ein bestimmter ℓ -Wert zugeordnet ist. Dies ist gleichbedeutend mit der Entwicklung der Wellenfunktion nach Eigenfunktionen zu konstantem ℓ -Wert (Kugelfunktionen).

Der integrale Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Teilchen, die in der ℓ -ten Zone einlaufen, ist gleich der Fläche dieser Ringzone, also

$$\sigma_{\ell} = (2\ell + 1) \cdot \pi \cdot \lambda^2$$

Es hängt von der Reichweite des Potentials ab, wie viele ℓ -Werte bei der Beschreibung des Streuvorganges mitgenommen werden müssen.

Für die genauere (quantenmechanische) Berechnung des Streuquerschnitts ist folgende Radial-Schrödinger-Gleichung zu lösen:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left\{ E - V(r) - \frac{\ell(\ell+1) \cdot \hbar^2}{2mr^2} \right\} u = 0$$

wobei die Radialwellenfunktion $u(r) = r \Psi(r)$. Zur Lösung ist eine Annahme über die Radialabhängigkeit des Potentials $V(r)$ nötig. Ein einfaches Potential ist das Kastenpotential, ein realistischeres das Woods-Saxon-Potential, das jedoch ein numerisches Lösungsverfahren erfordert.

Für die Entwicklung der Welle nach Kugelfunktionen wird folgende mathematische Identität benutzt:

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \cdot i^{\ell} \cdot j_{\ell}(kr) \cdot P_{\ell}(\cos\theta)$$

In einem typischen Beschleuniger-Experiment findet man folgende Abmessungen: Potential-Durchmesser $\approx 5 \dots 10$ fm, Strahl-Durchmesser $\approx 1 \dots 3$ mm, Abstand des Detektors vom Strahl > 10 cm. Experimentell sind daher die obigen Annahmen (insbes. 3. und 4.) erfüllt. Am Detektor wird nur die gestreute Kugelwelle registriert, es gibt keine Interferenzen zwischen einlaufender und gestreuter Welle.

Für die in z-Richtung fortschreitende ebene Welle wird angesetzt:

$$\Psi \sim \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)] = \exp[i(kr \cos \theta - \omega t)] = \exp[i(kz - \omega t)]$$

Der stationäre Teil ist $\sim \exp(ikz)$; die auslaufende Kugelwelle $\sim \left(\frac{1}{r}\right) \exp(ikr)$

$$\text{Die gesamte Welle ist daher } \Psi_T(\vec{r}) = A \left[\exp(ikz) + f(\theta) \left(\frac{1}{r} \right) \exp(ikr) \right]$$

Mit diesem Ansatz ist die Schrödinger-Gleichung für das Streuproblem (Gesamtenergie > 0) zu lösen. Aus den Randbedingungen erhält man die Streuamplitude $f(\theta)$.

Zusammenhang zwischen $f(\theta)$ und differentiellem Wirkungsquerschnitt

In Kap. 1 wurde der differentielle Wirkungsquerschnitt $(d\sigma/d\Omega)_0$ definiert:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\theta = \frac{\text{Zahl der um den Winkel } \theta \text{ gestreuten Teilchen pro Sekunde}}{\text{Stromdichte der einlaufenden Teilchen } j_e}$$

Allgemein gilt für die Teilchendichte $P = \psi^* \psi = |\psi|^2 \text{ cm}^3$, und die Stromdichte $j = v P \text{ s}^{-1} \text{ cm}^2$. Für die einlaufende Welle folgt daher $P = |A \exp(ikz)|^2 = A^2$ sowie $j_e = v_e A^2$.

Für den Teilchenstrom dI der auslaufenden Welle durch ein Flächenelement dF einer das Streuzentrum umgebenden Kugel gilt:

$$dI = j_a dF = v_a |A f(\theta) \exp(ikr) r|^2 dF = v_a A^2 |f(\theta)|^2 d\Omega.$$

Für die elastische Streuung ist $v_a = v_e$. Hieraus folgt die wichtige Formel:

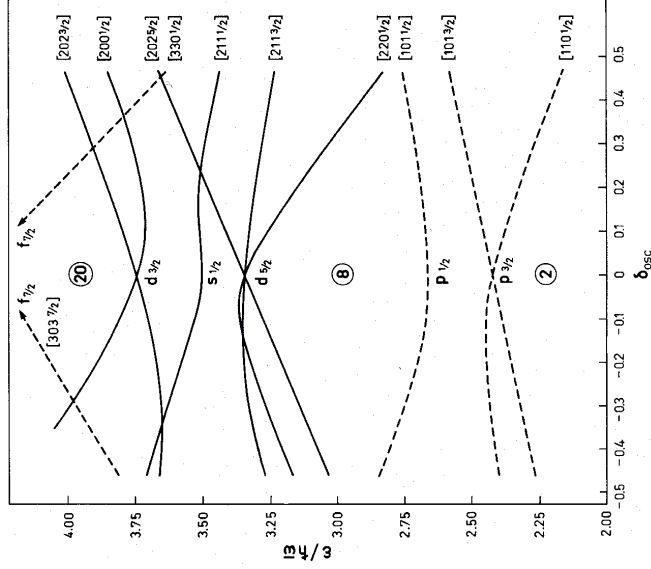
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

Partialwellen-Zerlegung

Wir haben jetzt die Schrödinger-Gleichung für einen elastischen Streuvorgang in Kugelkoordinaten zu lösen. Als Ansatz benutzen wir die oben definierte Gesamt-Wellenfunktion $\Psi_T(\vec{r})$. Damit kann die Streuamplitude $f(\theta)$ und der differentielle Wirkungsquerschnitt bestimmt werden.

Für $\delta = 0$ erhält man die Zustände des sphärischen Schalenmodells. Ist $\delta > 0$, so ist der Kern prolat (zigarrenförmig) deformiert, ist $\delta < 0$, so ist der Kern oblat (diskusförmig) deformiert.

Die folgenden 4 Abbildungen sind aus [Boh75] entnommen. Das experimentelle Niveauschema von ^{235}U zeigt eine nahezu perfekte Übereinstimmung mit den Vorhersagen des Nilssonmodells.



Spektrum der Einteilchen-Zustände im deformierten Potential (N und $Z < 20$). Die Niveaus sind durch die asymptotischen Quantenzahlen $[N n_z \Lambda \Omega]$ gekennzeichnet.

Da im C.M.-System die Teilchen „3“ und „4“ unter 180° auseinanderfliegen, gilt:

$$T'_3 = \frac{m_4}{m_{tot}} \cdot (T'_j + Q)$$

$$T'_4 = \frac{m_3}{m_{tot}} \cdot (T'_j + Q)$$

Man definiert:

$$\gamma_3 = \frac{v_s}{v_3}$$

$$v_s^2 = \frac{2m_1 \cdot T'_j}{m_2 \cdot m_{tot}}$$

$$\text{und} \quad v_3'^2 = \frac{2m_4}{m_3 \cdot m_{tot}} \cdot (T'_j + Q)$$

$$\text{folgt} \quad \gamma_3 = \left[\frac{m_1 \cdot m_3}{m_2 \cdot m_4} \cdot \frac{T'_j}{T'_j + Q} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Daraus ergibt sich} \quad \frac{v_s^2}{v_3'^2} = 1 + \gamma_3^2 + 2 \cdot \gamma_3 \cdot \cos \theta'$$

$$\text{und} \quad T_3 = T'_3 \cdot \left(1 + \gamma_3^2 + 2 \cdot \gamma_3 \cdot \cos \theta' \right)$$

$$\text{Da} \quad T'_3 + T'_4 = T'_j + Q$$

$$\text{folgt} \quad T'_3 \cdot \left(1 + \frac{m_3}{m_4} \right) = T'_j + Q$$

$$\text{Mit dem oben berechneten Wert} \quad \gamma_3 = \sqrt{\frac{m_1 \cdot m_3}{m_2 \cdot m_4} \cdot \frac{T'_j}{T'_j + Q}}$$

$$\text{folgt} \quad T'_j + Q = \frac{m_1 \cdot m_3}{m_2 \cdot m_4} \cdot \frac{T'_j}{\gamma_3^2}$$

$$\text{Somit folgt} \quad T_3 = T'_j \cdot \frac{m_1 \cdot m_3}{m_2 \cdot m_{tot}} \cdot \frac{1 + \gamma_3^2 + 2\gamma_3 \cos \theta'}{\gamma_3^2}$$

Eine weitere wichtige Formel verbindet den differentiellen Wirkungsquerschnitt im Laborsystem mit dem im Schwerpunktsystem:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_3} = d\sigma' \cdot \frac{\left(1 + \gamma_3^2 + 2\gamma_3 \cos \theta' \right)^{\frac{3}{2}}}{1 + \gamma_3 \cos \theta'}$$

5. Kernreaktionen

5.1 Reaktionskinematik und einfache Streutheorie

Allgemeine Betrachtungen

Kernzustände, die über den radioaktiven Zerfall untersucht werden können, sind auf den Bereich niedriger Anregungsenergien beschränkt. Die weitaus größere Zahl der angeregten Zustände ist nur über Kernreaktionen zugänglich. Bei der Kollision zweier Kerne ist eine Vielzahl von Prozessen möglich: von der elastischen Streuung bis zu komplizierten Kernumwandlungen.

Bezeichnen wir mit „a“ das Projektil, „A“ den Targetkern, „b“ das Ejektil, und „B“ den Endkern, dann können die möglichen Reaktionen wie folgt klassifiziert werden:

$$A + a \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + a \\ A^* + a \\ B_1 + b_1 \\ B_2 + b_2 \\ B_3 + b_3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{elastische Streuung (Summe der kinetischen Energien ist konstant)} \\ \text{inelastische Streuung (A ist angeregt)} \\ \text{eigentliche Reaktion = Kernumwandlung} \end{array} \right\}$$

B kann sich im Hinblick auf Z und N vom Targetkern A unterscheiden. b kann ein Teilchen oder ein Photon sein.

Zwei Schreibweisen werden für Kernreaktionen verwendet: $A + a \rightarrow B + b$ oder $A(a,b)B$

($A + a$) wird als Eingangskanal, ($B + b$) als Ausgangskanal bezeichnet.

Neben den angegebenen „Zweikörperreaktionen“ können auch komplexere Vorgänge stattfinden, z.B. Drei- und Mehrkörperreaktionen (drei oder mehrere Teilchen im Ausgangskanal) bis hin zum „Zerplatzen“ des Targetkerns in viele Bruchstücke (Spallation).

Bei der Untersuchung von Kernreaktionen gibt es viele Beobachtungsgrößen:

- Mögliche Reaktionsprodukte bei gegebener Projektilenergie. Verschiedene Reaktionen, z.B. (p,p'), (p,γ), (p,α), (p,n), führen zu verschiedenen Endkernen. Das Energiespektrum des Ejektils gibt Aufschluss über die angeregten Zustände des Endkerns.
- Intensitäten der beobachteten Anregung der verschiedenen Energieniveaus geben Aufschluss über die Kernstruktur in den angeregten Zuständen ($\rightarrow$ Wellenfunktionen).
- Winkelverteilungen (Intensitäten als Funktion des Beobachtungswinkels) lassen Rückschlüsse auf die übertragenen Drehimpulse und auf Reaktionsmechanismen zu.

d) Anregungsfunktionen (Intensitäten als Funktion der Projektilenergie) ergeben Energieniveaus, Lebensdauern der angeregten Zustände aus deren Zerfallsbreiten und weiter hin Hinweise auf den Reaktionstyp (direkte oder Compoundkernreaktion, s. weiter unten).

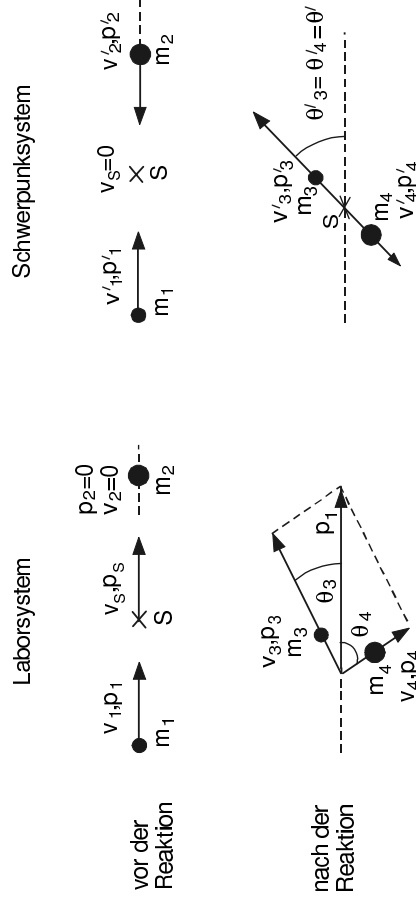
e) Festlegung der Spinrichtung der Reaktionspartner erlaubt Aussagen über Polarisationszustände.

Kinematik von Kernreaktionen

Für die Beschreibung von Kernreaktionen, bei denen keine Elektronen beteiligt sind, genügen i.a. die nicht-relativistischen Formeln.

Koordinatensysteme: Die Messung erfolgt stets im Laborsystem. Für die physikalische Beschreibung und Interpretation ist jedoch das Schwerpunktsystem (C.M.-System) geeignet, da die Schwerpunktbewegung für den Ablauf der Reaktion belanglos ist und es nur auf die Relativgeschwindigkeit zwischen den Reaktionspartnern ankommt.

Im folgenden beschränken wir uns auf Zweikörperreaktionen. Wir bezeichnen mit dem Index „1“ das Projektil, „2“ den Targetkern, „3“ das Ejektil, „4“ den Endkern.



Impulserhaltung: $\vec{p}_1 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$

$\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{p}'_3 + \vec{p}'_4 = 0$

Energieerhaltung: Die Gesamtenergie einschließlich der Ruhmassen bleibt erhalten, nicht jedoch notwendigerweise die Summe der kinetischen Energien. Definition des Q-Wertes der Reaktion (Energieerhöhung):

$$Q = T_3 + T_4 - T_1 = (m_1 + m_2 - m_3 - m_4) c^2$$

Die Energieerhaltung gilt unabhängig vom Koordinatensystem, daher gilt ebenso:

$$Q = T'_3 + T'_4 - T'_1 - T'_2 = T'_t - T'_i$$

Für 2-Körper-Reaktionen folgen aus Energie- und Impulserhaltung 4 Gleichungen, durch die bei gegebener Einschußenergie (T_i bzw. T'_i) die gesamte Kinematik festgelegt ist.

Im folgenden werden einige wichtige Formeln zur Reaktionskinematik von 2-Körper-Reaktionen zusammengestellt:

1. Energien und Geschwindigkeiten im Eingangskanal

$$T'_1 + T'_2 = T'_i$$

$$v_S = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 = \frac{m_1}{m_{tot}} \cdot v_1$$

$$v'_1 = v_1 - v_S ; v'_2 = -v_S$$

$$T'_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (v_1 - v_S)^2 = T_1 \cdot \left(\frac{m_2}{m_{tot}} \right)^2 ; T'_2 = T_1 \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{(m_{tot})^2}$$

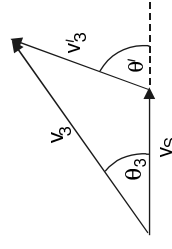
Es folgt:

$$T'_i = T'_1 + T'_2 = T_1 \cdot \frac{m_2}{m_{tot}}$$

und weiterhin:

$$T'_1 = T'_i \cdot \frac{m_2}{m_{tot}} ; T'_2 = T'_i \cdot \frac{m_1}{m_{tot}}$$

2. Energien im Ausgangskanal

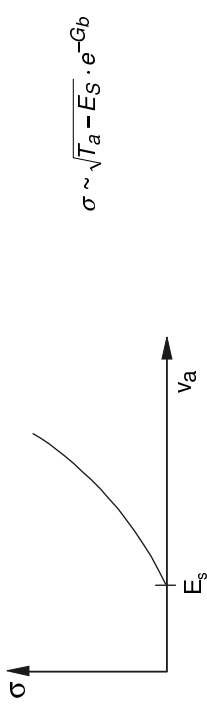


Aus dem Diagramm lassen sich 2 Relationen ablesen:

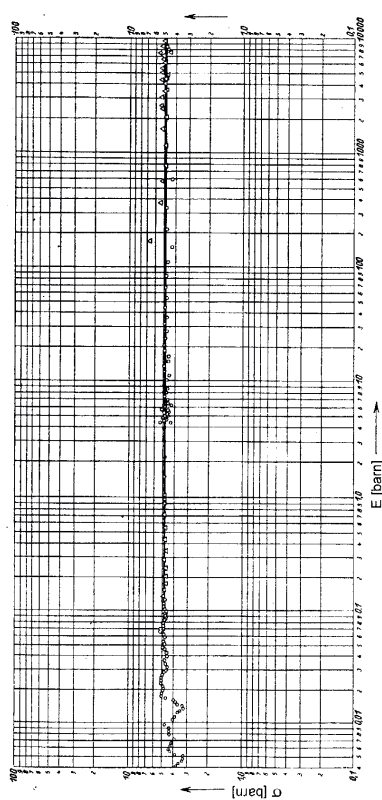
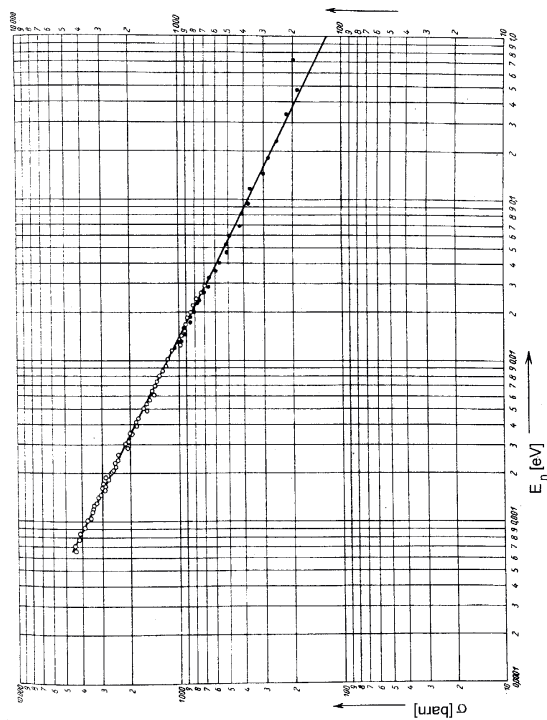
$$\tan \theta_3 = \frac{v'_3 \sin \theta'}{v_S + v'_3 \cos \theta'}$$

$$v_3^2 = v_S^2 + v'^2_3 - 2v_S v'_3 \cos(\pi - \theta')$$

e) endotherme Reaktion, geladenes Teilchen als Produkt:

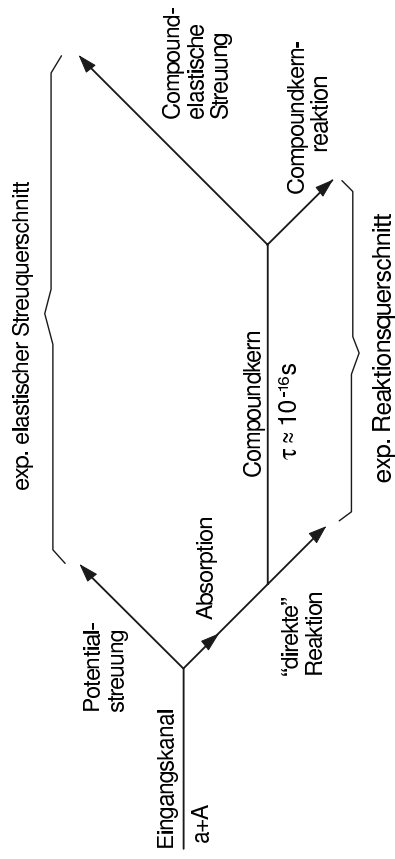


In den folgenden Abbildungen sind zwei Beispiele gezeigt (aus [Her63]):

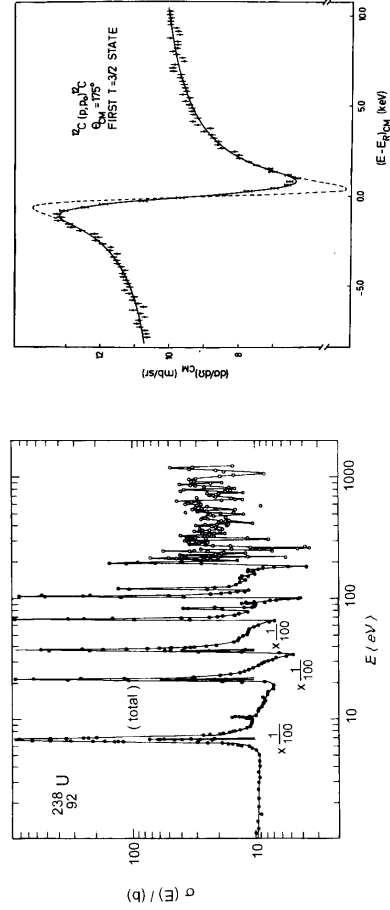


5.2 Reaktionsmechanismen

Übersicht über die möglichen Reaktionen:



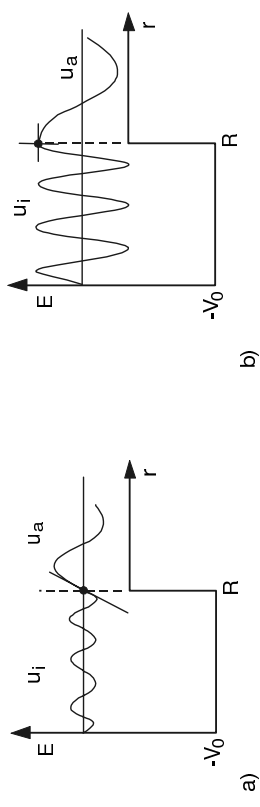
Der differentielle Wirkungsquerschnitt für eine Reaktion ist bekannt, wenn neben kinematischen Größen (Impulse der beteiligten Teilchen) das Matrixelement bekannt ist (vgl. Kap. 5.1, vorhergehenden Abschnitt). Hier soll versucht werden, einige Eigenschaften des Matrixelements zu verstehen, z.B. seine Energieabhängigkeit. Insbesondere soll das Auftreten von Resonanzen im Wirkungsquerschnitt erklärt werden (s.folgende Abbildung).



aus [Bet96] und [Hin75]

Qualitative Betrachtungen zum Auftreten von Resonanzen:

Der Einfachheit halber betrachten wir die Streuung an einem Rechteckpotential für zwei verschiedene Fälle des Auftreffens der von rechts auf den Potentialrand einlaufenden Welle



Am Potentialrand muß der Wert und die Ableitung der Wellenfunktion stetig anschließen, d.h.

$$u_i(R) = u_a(R) ; \quad u_i'(R) = u_a'(R)$$

Die logarithmische Ableitung ist: $f_\ell = R \frac{u_\ell'(r)}{u_\ell(r)} \Big|_{r=R}$

Für den Fall a) folgt aus dem gezeichneten Bild eine geringe Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens im Kerninneren; das Teilchen dringt nur mit geringer Wahrscheinlichkeit in den Kern ein, es wird also vorwiegend am Potentialrand gestreut (Potentialstreuung). Im Fall b) folgt eine große Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens im Kerninneren, es dringt in den Kern ein und wird wieder emittiert (Resonanzstreuung). Für das Auftreten einer Resonanz ist offensichtlich die Bedingung $f_\ell = 0$ notwendig.

Gesucht wird nun der Zusammenhang zwischen f_ℓ und η_ℓ . Damit kann dann der Wirkungsquerschnitt berechnet werden. Im folgenden beschränken wir uns auf $\ell = 0$.

Die Gesamtwellenfunktion im Außenraum ließ sich schreiben als:

$$\Psi_T = \frac{1}{2k r} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \cdot i^{\ell+1} \cdot \left[e^{-i(kr - \frac{\ell\pi}{2})} - \eta_\ell \cdot e^{i(kr - \frac{\ell\pi}{2})} \right] \cdot P_\ell(\cos\theta)$$

Für $\ell = 0$ ergibt sich mit $u(r) = r \Psi(r)$

$$u_{0a}(r) = \frac{i}{2k} \cdot \left[e^{-ikr} - \eta_0 \cdot e^{ikr} \right]$$

und

$$\eta_0 = \frac{f_0 + ikR}{f_0 - ikR} \cdot e^{-2ikR}$$

Der Streuquerschnitt ist

$$\sigma_{S_\ell} = \pi \lambda^2 \cdot (2\ell + 1) \cdot |1 - \eta_\ell|^2$$

Ist f_0 reell, so ist $|\eta_0|^2 = 1$, d.h. es finden keine Reaktionen statt. Beim Auftreten von Reaktionen ist f_0 immer komplex. Der integrale Wirkungsquerschnitt für die Streuung ($\ell = 0$) berechnet sich zu:

$$\sigma_{S_0} = \pi \cdot \lambda^2 \cdot \left| \frac{-2ikR}{f_0 - ikR} + e^{2ikR} - 1 \right|^2$$

Nur der erste Term in der Klammer ist von der logarithmischen Ableitung, also den Kerneigenschaften, abhängig. Der zweite beschreibt die Potentialstreuung. Also:

$$\sigma_{S_0} = \pi \lambda^2 \cdot |A_{res} + A_{pot}|^2$$

Für den Reaktionsquerschnitt erhält man für $\ell = 0$ mit $\sigma_{R_0} = \pi \lambda^2 (1 - |\eta_0|^2)$

$$\sigma_{R_0} = \pi \cdot \lambda^2 \cdot \frac{-4kR \cdot \text{Im} f_0}{(\text{Re} f_0)^2 + (\text{Im} f_0 - kR)^2}$$

Energieabhängigkeit von f_0 in der Nähe der Resonanz

Für die Wellenfunktion im Kerninneren nehmen wir an, daß sie aus einer Welle besteht, die auf den Kernrand zuläuft, und einer dort reflektierten Welle, die bei der Reflexion etwas gedämpft wird.

$$u_l(r) = e^{-ikr} + e^{-2iq} \cdot e^{i(Kr+2\xi)} = \text{const} \cdot \cos(Kr + \xi + iq)$$

Für die logarithmische Ableitung erhält man damit $f_0 = K \cdot R \cdot \tan(Kr + \xi + iq)$

An der Resonanz ($E = E_{\text{res}}$) ist $f_0 = 0$. Man entwickelt f_0 um $E = E_{\text{res}}$ und $q = 0$:

$$f_0 = (E - E_{\text{res}}) \cdot \frac{\partial f}{\partial E} \Big|_{E=E_{\text{res}}} + q \cdot \frac{\partial f}{\partial q}$$

Die hier auftretenden Ableitungen lassen sich aus dem obigen Ausdruck für f_0 berechnen. Man erhält:

$$f_0 = -(E - E_{\text{res}}) a - ib$$

mit

$$a = -\frac{\partial f}{\partial E} \Big|_{E=E_{\text{res}}}$$

$$b = k R q$$

Damit erhält man für die Amplitude der Resonanzstreuung:

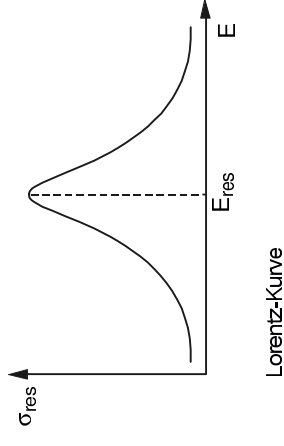
$$A_{\text{Res}} = \frac{i\Gamma_{\alpha}}{(E - E_{\text{Res}}) + \frac{1}{2}i\Gamma_R}$$

mit

$$\Gamma_{\alpha} = \frac{2kR}{a} ; \quad \Gamma_R = \frac{2b}{a} ; \quad \Gamma = \Gamma_{\alpha} + \Gamma_R$$

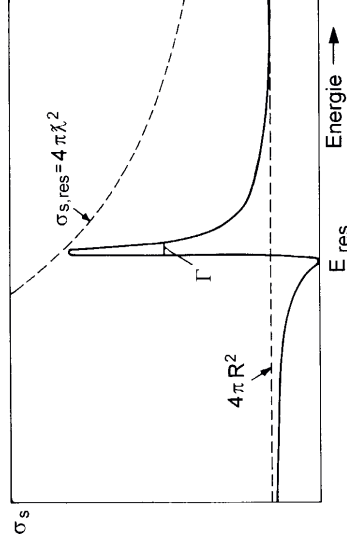
und dem Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{S_{\text{Res}}} = \pi \cdot \lambda^2 \cdot \frac{\Gamma_{\alpha}^2}{(E - E_{\text{Res}})^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}$$



Mit der Annahme, daß keine Reaktionen stattfinden, erhält man für den Wirkungsquerschnitt in der Nähe einer Resonanz folgende Energieabhängigkeit für $\ell = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_S &= \sigma_{S_{\text{Res}}} + \sigma_{S_{\text{Pot}}} \\ \sigma_{S_{\text{Pot}}} &\approx 4\pi \cdot R^2 \end{aligned}$$



Da auch der Reaktions-Wirkungsquerschnitt Resonanzverhalten zeigt, erhält man für den totalen Wirkungsquerschnitt für Resonanzprozesse

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_S + \sigma_R = \frac{\pi \cdot \lambda^2 \cdot \Gamma_{\alpha} \cdot \Gamma}{(E - E_{\text{Res}})^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \quad \text{Breit - Wigner - Formel}$$

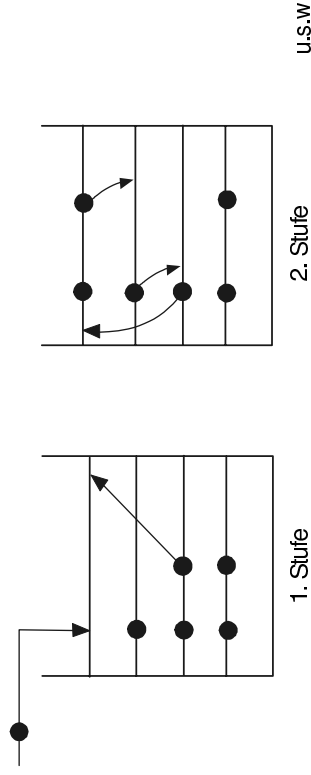
5.3 Compoundkern-Reaktionen

Der Herleitung der Resonanzformeln lag die Vorstellung zugrunde, daß die Anpassung der Wellenfunktion am Kernrand für die Breite der Resonanz verantwortlich ist.

Für große Werte von $\partial H / \partial E$ ergaben sich schmale Resonanzen, für kleine Werte breite Resonanzen. Man erwartet daher, daß die Breite der Resonanz $\Gamma \sim (\partial H / \partial E)^{-1}$.

Berechnet man Γ unter Benutzung geeigneter Wellenfunktionen, so erhält man $\Gamma_e \approx 1 \text{ MeV}$ („Einteilchenbreite“). Dieser Berechnung liegt das physikalische Bild zugrunde, daß das einlaufende Teilchen für kurze Zeit einen ungebundenen Zustand einnimmt und dann wieder emittiert wird. Die experimentellen Daten zeigen dagegen, daß es Resonanzen mit viel kleineren Breiten gibt ($\Gamma \approx 0.003 \dots 1 \text{ eV}$). Dies bedeutet, daß die Lebensdauern der gebildeten Zustände um bis zu etwa 6 Zehnerpotenzen länger sind als die Durchflugzeit durch das Kernpotential (Einteilchenbild).

Die lange Lebensdauer läßt sich dadurch erklären, daß das einlaufende Teilchen mit allen Nukleonen des Kerns in Wechselwirkung tritt. Es gibt daher eine Fülle von Umordnungen im Kern, bis das eingedrungene Teilchen wieder emittiert wird.



Das Zustandekommen von langlebigen Compoundkern-Zuständen ersieht man aus der Struktur der Hamiltonfunktion für Einfangreaktionen. Der Targetkern bestehe aus A Nukleonen mit Koordinaten r_i , dem ein weiteres Teilchen mit den Koordinaten x durch die Reaktion hinzugefügt wird.

$$\begin{aligned}
 H &= H_{\text{Target}} + T(r) + \sum_{i=1}^A V_i(r_i, x) \\
 &= H_{\text{Target}} + T(r) + V_{\text{Opt}} + \left\{ \sum_{i=1}^A V_i(r_i, x) - V_{\text{Opt}} \right\}
 \end{aligned}$$

- [Her63] G. Hertz: *Lehrbuch der Kernphysik, Bd. II*, Teubner, Leipzig 1963
- [Hin62] S. Hinds, R. Middleton, D. J. Pullen: *Phys. Lett.* **1** (1962) 12
- [Hin75] F. Hinterberger, P. v. Rossen, H. G. Ehrlich, B. Schüller, R. Jahn, J. Bispin, G. Welp: *Nucl. Phys. A* **253** (1975) 125
- [Hof57] R. Hofstadter: *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **7** (1957) 231
- [Hor75] W. F. Hornyak: *Nuclear Structure*, Academic Press, New York 1975
- [Jac67] J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York 1967
- [Led67] C. M. Lederer, J. M. Hollander, I. Perlman: *Table of Isotopes*, 6th ed., Wiley, New York 1967
- [Mar70] P. Marmier, E. Sheldon: *Physics of Nuclei and Particles*, Academic Press, New York 1970
- [May84] T. Mayer-Kuckuk: *Kernphysik*, Teubner, Stuttgart 1984
- [Roy67] R. R. Roy and B. P. Nigam: *Nuclear Physics*, Wiley, New York 1967
- [Rut30] E. Rutherford, J. Chadwick, C. D. Ellis: *Radiations from Radioactive Substances*, Cambridge University Press, New York 1930
- [Seg77] E. Segre: *Nuclei and Particles*, Benjamin/Cummings, Menlo Park 1977
- [Sha74] A. de Shalit and H. Feshbach: *Theoretical Nuclear Physics, Vol. I: Nuclear Structure*, Wiley, New York 1974

$T(r)$ ist die Relativenergie zwischen Projektil und Target, V_{opt} ein mittleres „optisches“ Potential (vgl. folgenden Abschnitt). Ohne Restwechselwirkung bildet das einfallende Teilchen einen Einteilchenzustand mit der Breite Γ_e . Die Restwechselwirkung spaltet die Einteilchenresonanz in viele Zustände auf, deren Wellenfunktionen sehr kompliziert sind und sich mit der Energie des Teilchens schnell ändern können. Aus der relativ breiten Einteilchenresonanz werden somit viele schmale Compoundkernresonanzen.

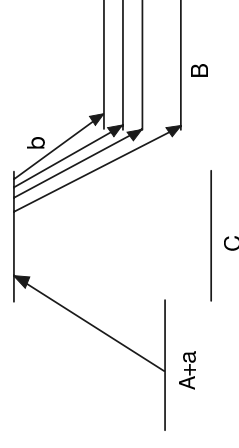
Wegen der langen Lebensdauer von Compoundkern-Zuständen ist der Zerfall des Compoundkerns unabhängig von dessen Bildung (N. Bohr, 1936). Der Wirkungsquerschnitt für eine Reaktion, die aus dem Eingangskanal α in den Ausgangskanal β führt, kann deshalb geschrieben werden als

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha c} \cdot G_{\beta}$$

Hierbei steht α für das System (Projektil + Target) und β für das System (Ejektal + Restkern).

$$\text{Da } G_{\beta} = \frac{\Gamma_{\beta}}{\Gamma} ; \quad \Gamma = \sum_{\beta'} \Gamma_{\beta'}$$

$$\text{ist } \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha c} \cdot \frac{\Gamma_{\beta}}{\Gamma}$$



Mit Hilfe des Reziprozitätstheorems lassen sich die im allgemeinen unbekannten Zerfallsbreiten durch die Wirkungsquerschnitte der inversen Reaktionen ausdrücken. Man erhält

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha c} \cdot \frac{k_{\beta}^2 \cdot \sigma_{\beta c}}{\sum_{\beta'} k_{\beta'}^2 \cdot \sigma_{\beta' c}}$$

Der Wirkungsquerschnitt einer Compoundkern-Reaktion ist also bekannt, wenn der Bildungsquerschnitt des Compoundkerns in allen Kanälen bekannt ist.

Das Optische Modell

In den vorherigen Abschnitten wurde gezeigt, daß beim Auftreten von Kernreaktionen (Kernumwandlungen) der Strom der elastisch gestreuten Teilchen geschwächt wird. Dem elastischen Kanal geht also Intensität verloren. In Analogie zur Optik kann der Vorgang der Streuung so beschrieben werden, daß das einlaufende Teilchen (Welle) durch das Kernpotential eine Brechung erfährt, während Reaktionen durch die Absorption eines Teils der einlaufenden Teilchen charakterisiert werden.

Es wird ein komplexes Potential $U(r) = V(r) + iW(r)$ eingeführt, mit dem die Schrödinger-Gleichung gelöst wird. Mit diesem Potentialansatz ergibt sich für die Wellenfunktion

$$\Psi(r) \sim \exp(ik_1 r) \cdot \exp(-k_2 r)$$

Der zweite Term beschreibt die Dämpfung der Welle und somit die Absorption.

Das optische Analogon ist die Brechung und Absorption von Licht an einer trüben Glaskugel (Optisches Modell).

Wie sieht das Potential aus, das die beschriebenen Vorgänge zu reproduzieren gestattet? Häufig wird ein komplexes Woods-Saxon-Potential verwendet, dessen Realteil als

$$V(r) = V_0 \cdot \{1 + \exp[(r - R)/a]\}^{-1} = V_0 \cdot f(r)$$

angesetzt wird. Die Form des Imaginärteils ist weniger anschaulich anzugeben. Da die Absorption der einlaufenden Teilchen jedoch an der Kernoberfläche dominant sein wird, setzt man für nicht allzu hohe Projektilenergien

$$W(r) = W_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial r}$$

Zusätzlich wird eine Spin-Bahn-Kopplung der Stärke

$$V_{ls} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \left(\frac{d\mathbf{f}}{dr} \right) \cdot (\vec{\ell} \cdot \vec{s})$$

eingeführt.

Das Potential hängt also von einer Reihe von Parametern ab (V_0 , W_0 , V_{ls} , R , a), die durch Anpassung der berechneten Winkelverteilungen an die Meßwerte bestimmt werden können. Typische Werte sind

$$\begin{aligned} V_0 &= 50 \text{ MeV/Nukleon,} \\ W_0 &= 10 \text{ MeV,} \\ R &= r_0 A^{1/3} \text{ mit } r_0 = 1.2 \text{ fm,} \\ a &= 0.5 \text{ fm.} \end{aligned}$$

Die folgenden Abbildungen zeigen experimentell beobachtete Winkelverteilungen im Vergleich mit berechneten.

Literatur

- [Ajz72] F. Ajzenberg-Selove:
Nud. Phys A **190** (1972) 1
- [ANU80] Australian National University, Laborbericht, Canberra 1980
- [Ber72] E. K. Bergkvist:
Nud. Phys. **39B** (1972) 317
- [Bet96] K. Bethge: *Kernphysik*,
Springer, Berlin 1996
- [Boh75] A. Bohr, B. Mottelson: *Nuclear Structure*, Vol. II,
Benjamin, New York 1975
- [Bra72] M. Brack, J. Dangaard, A. S. Jensen, H. C. Pauli, V. M. Strutinsky,
C. Y. Wong:
Rev. Mod. Phys. **44** (1972) 320
- [But64] H. v. Butlar: *Einführung in die Grundlagen der Kernphysik*,
Akad. Verlagsgesellschaft, Frankfurt/Main 1964
- [Coh71] B. L. Cohen: *Concepts of Nuclear Physics*,
McGraw Hill, New York 1971
- [Elz72] Th. W. Elze, J. R. Huizenga:
Nud. Phys. A **187** (1972) 545
- [Eng66] H. A. Enge: *Introduction to Nuclear Physics*,
Addison-Wesley, Reading 1966
- [Eva55] R. D. Evans *The Atomic Nucleus*,
McGraw Hill, New York 1955
- [Fer58] S. Fernbach:
Rev. Mod. Phys. **30** (1958) 414
- [Ger83] J. Gerl, Th. W. Elze, H. Ower, K. Ronge, H. Bohn, T. Faestermann:
Phys. Lett. **120B** (1983) 83
- [Ham62] T. Hamada, I. D. Johnston:
Nud. Phys. **34** (1962) 382
- [Hof74] D. C. Hoffman, M. M. Hoffman:
Ann. Rev. Nucl. Sci. **24** (1974) 151

Reaktionen

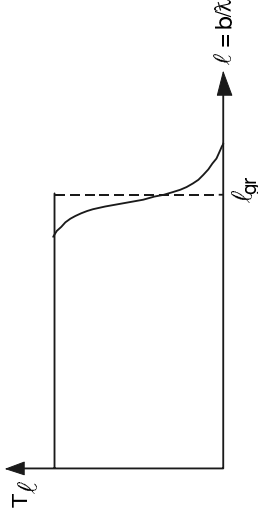
Für den Reaktionswirkungsquerschnitt wurde früher hergeleitet:

$$\sigma_r = \pi \lambda^2 \cdot \sum_{\ell} (2\ell + 1)(1 - | \eta_{\ell} |^2) = \pi \lambda^2 \cdot \sum_{\ell} (2\ell + 1) \cdot T_{\ell}$$

Die Größe T_{ℓ} wird in der Literatur häufig verwendet und als Transmissionskoeffizient bezeichnet.

Für das folgende nehmen wir vereinfachend an:

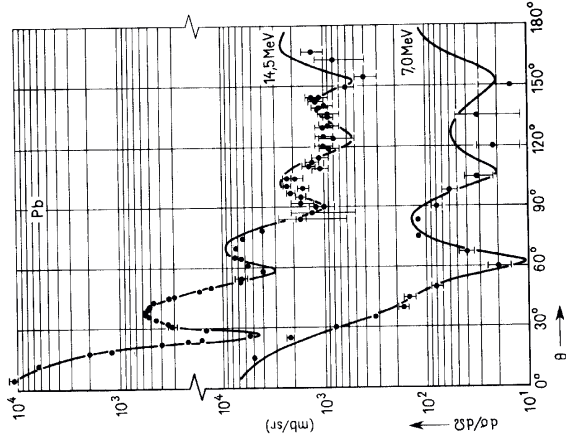
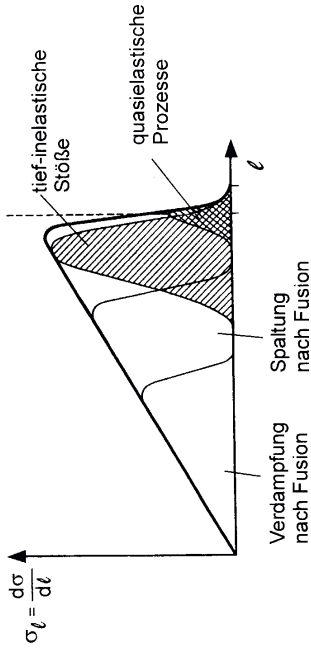
Wenn $b < b_{gr}$, also $\ell < \ell_{gr}$, dann $T_{\ell} = 1$ (Reaktion findet statt),
wenn $b > b_{gr}$, also $\ell > \ell_{gr}$, dann $T_{\ell} = 0$ (keine Reaktion).



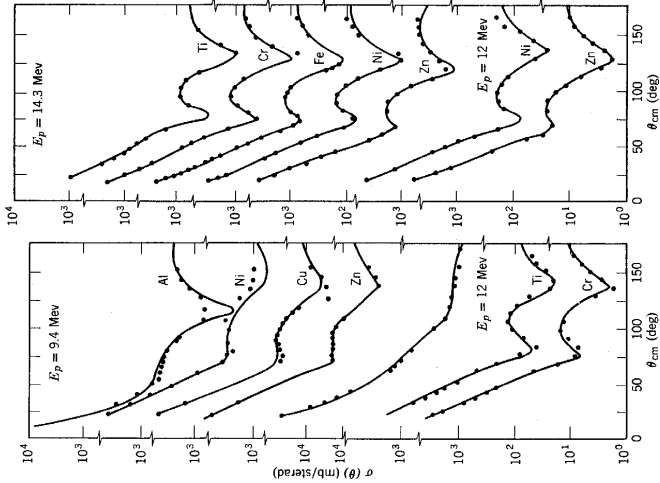
Mit dieser Bedingung kann der Reaktionsquerschnitt berechnet werden. Man erhält

$$\sigma_r = \pi \cdot \lambda^2 \cdot \sum_{\ell=0}^{\ell_{gr}} (2\ell + 1) \approx \pi \cdot \lambda^2 \cdot \ell_{gr}^2$$

Folgende Reaktionstypen treten in Schwerionenreaktionen auf:



aus [Per62] und [Roy67]

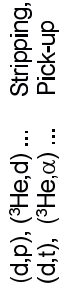


5.4 Direkte Kernreaktionen

Die Behandlung der elastischen Streuung hat ergeben, daß der Wirkungsquerschnitt aus einem compoundelastischen und einem formelastischen (Potentialstreuung) Anteil besteht. Während mit dem compoundelastischen Prozeß viele Umordnungen von Nukleonen und damit eine lange Lebensdauer des Zwischenkernzustandes (Auftreten von Resonanzen) verbunden sind, handelt es sich bei der Potentialstreuung um einen „schnellen“ Prozeß, der während des Vorbeifluges vom Projektil am Target stattfindet ($\approx 10^{-22}$ sec).

Ähnliches gilt für Reaktionen. Neben den langsam verlaufenden Compoundkernreaktionen gibt es „direkte“ Reaktionen, die in sehr kurzer Zeit ablaufen. Wegen der kurzen Wechselwirkungszeit werden dabei nur wenige Freiheitsgrade des Targets (oder Projektils) angeregt. Die Reaktion regt also selektiv solche Zustände an, die sich nur wenig vom Target- (Projektil-) Zustand unterscheiden.

Typische Reaktionen sind die Abstreif-Reaktionen (Stripping-, oder Pickup-Reaktionen), z.B.:

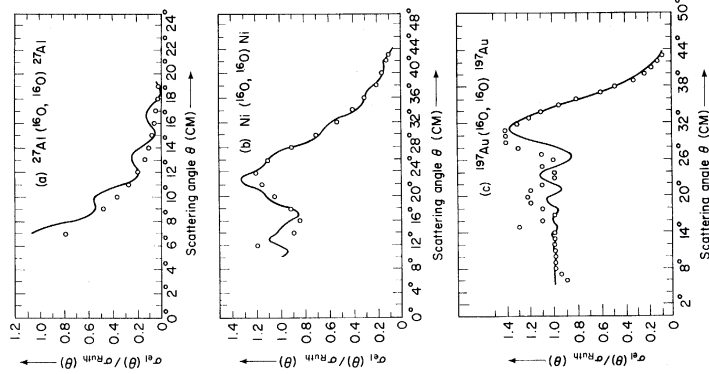
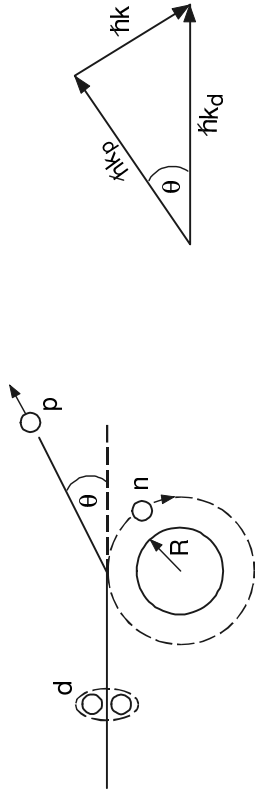


Diese Reaktionen werden zusammenfassend als Nukleon-Transfer-Reaktionen bezeichnet.

Beobachtungsgrößen:

	Compoundkern-Reaktion	Direkte Reaktion
Winkelverteilung:	symmetrisch zu 90°	Maximum bei kleinen Winkeln
Anregungsfunktion:	Auftreten von Resonanzen (Breite = wenige eV)	breite Strukturen (mehrere MeV breit)

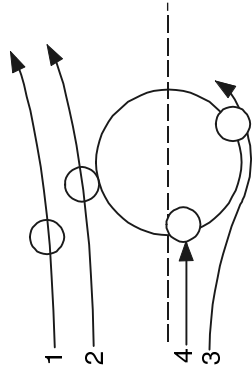
Der Zusammenhang zwischen Winkelverteilung und übertragenem Drehimpuls folgt aus einer klassischen Betrachtung:

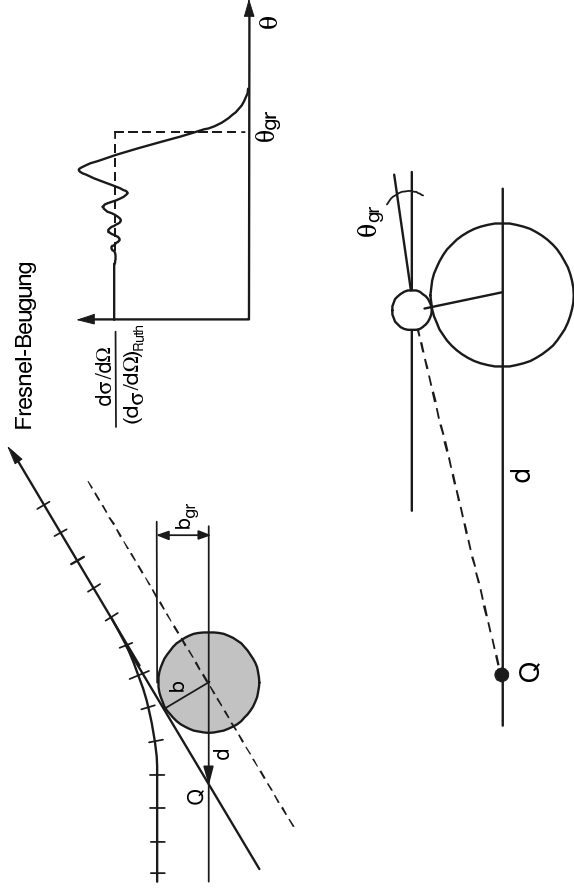


Übergang von Fraunhofer- (oben) zu Fresnel-Beugung (unten) (aus [Mar70])

Abhängig vom Stoßparameter treten in Schwerionreaktionen prinzipiell folgende Reaktionstypen auf (in der Reihenfolge dichter werdender Annäherung zwischen Projektil und Target):

- 1) Coulombstreuung,
- 2) Streifbahn = „grazing collision“ (Oberflächenkontakt),
- 3) Naher Stoß (Kernwechselwirkung ist dominant),
- 4) Zentraler Stoß (Reaktionen, z.B. Fusion)





Aus der Figur entnimmt man: $\sin \theta_{gr} = b/d$. Nach Sommerfeld tritt Fresnel-Beugung immer dann auf, wenn $a^2/(\lambda d) \gg 1$. Für den Radius des Streuscheibchens setzen wir $a = b_{gr}$. Mit der Beziehung $|l| = R/\lambda$ folgt als Bedingung für Fresnel-Beugung

$$\ell_{gr} \sin \theta_{gr} \gg 1.$$

Andererseits ergibt sich als Bedingung für Fraunhofer-Beugung

$$\ell_{gr} \sin \theta_{gr} \ll 1.$$

Der Quotient a/d nimmt Werte von ≈ 1 (bei stark gekrümmten Wellen) bis zu $\ll 1$ (bei nahezu ebenen Wellen) an. Für den Sommerfeld-Parameter (vgl. Kap. 1)

$$\eta = a/\lambda \text{ gilt daher}$$

$$\eta \gg 1 \text{ bei Fresnel- und } \eta < 1 \text{ bei Fraunhofer-Beugung.}$$

Die Streuung schwerer Projektile (Fresnel-Beugung) braucht nicht im Wellenbild behandelt zu werden, sondern kann klassisch und zeitabhängig beschrieben werden. Die Teilchen bewegen sich hierbei unter dem Einfluß der Coulombkraft auf klassischen Trajektorien. Der Sommerfeldparameter η gibt daher an, ob zur Beschreibung eines Streuvorgangs das Bild klassischer Bahnen oder das Wellenbild angemessen ist.

Der übertragene Bahndrehimpuls ist

$$\hbar \cdot \sqrt{\ell(\ell+1)} = R \cdot \hbar k$$

Aus dem Vektordiagramm ersieht man:

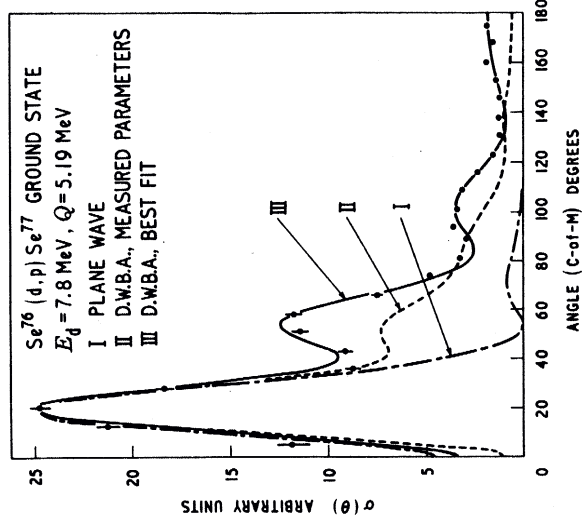
$$\cos \theta = \frac{(k_p^2 + k_d^2) - \frac{\ell(\ell+1)}{R^2}}{2 \cdot k_p \cdot k_d}$$

Es besteht danach eine feste Beziehung zwischen θ und ℓ .

Die quantenmechanische Rechnung ergibt keinen „scharfen“ Winkel θ , sondern eine Verteilung um θ , der eine Interferenzstruktur überlagert ist.

Als Beispiel diene die Reaktion $^{76}\text{Se}(d,p_0)^{77}\text{Se}$. Bei einer Deuteron-Einschussenergie von $T_d = 7.8 \text{ MeV}$ und einem Grundzustands-Q-Wert $Q = 5.19 \text{ MeV}$ ergibt sich die kinetische Energie der emittierten Protonen zu $T_p = 13 \text{ MeV}$. Mit obigen Formeln berechnet man folgenden Zusammenhang zwischen Streuwinkel und übertragenem Drehimpuls:

$\ell =$	1	2	3	4	5
$\theta =$	19°	34°	49°	64°	81°

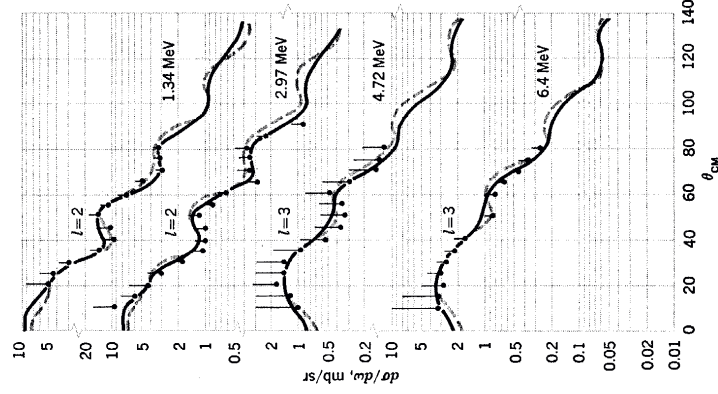
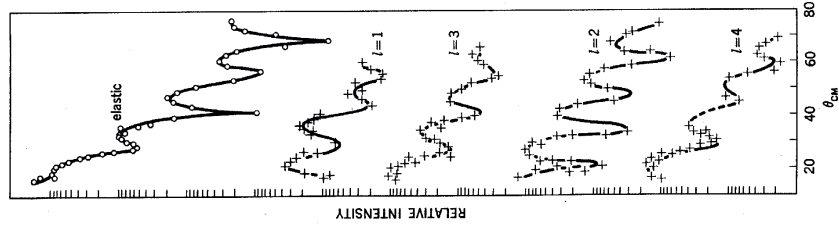


aus [Hin62]

Aus der Abbildung erkennt man, daß ein Drehimpulsübertrag von $\ell = 1$ mit den experimentellen Daten am besten übereinstimmt. Das Schalenmodell sagt voraus, daß das 43. Neutron entweder in einen $g_{9/2}$ ($\ell = 4$) oder $p_{1/2}$ ($\ell = 1$)-Zustand eingebaut wird. Das Experiment ($\ell = 1$) gibt also direkt den Schalenmodellzustand an, in den das transferierte Nukleon eingebaut wird. Transferreaktionen sind daher sehr gut zur Überprüfung der Vorhersagen von Einteilchenmodellen geeignet.

Die Beschreibung der Reaktion durch ebene Wellen führt zu einer unbefriedigenden Wiedergabe der gemessenen Winkelverteilung (vgl. Abbildung). Grund dafür sind die Verzerrungen, die die Wellenfronten aufgrund des Kernpotentials erleiden. Die Beschreibung läßt sich verbessern, wenn das Streuproblem mit Hilfe eines optischen Potentials gelöst wird und die Struktur der einlaufenden und auslaufenden verzerrten Wellen numerisch bestimmt wird (DWBA = Distorted Wave Born Approximation).

Beispiele für die Güte der DWBA-Theorie sind in den folgenden zwei Abbildungen gezeigt aus [Coh71]



5.5 Reaktionen zwischen schweren Kernen

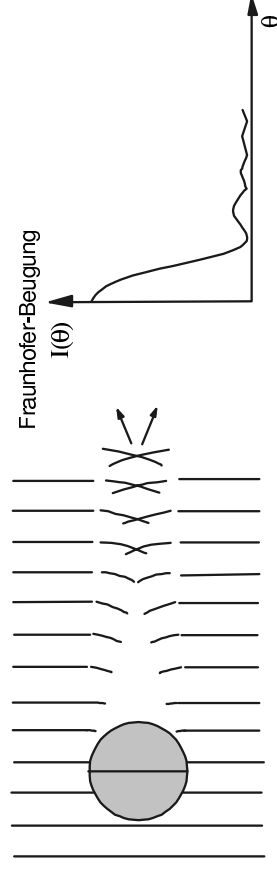
Streuung

Bei der Behandlung der elastischen Streuung im Wellenbild wurde die Projekttilbewegung durch eine ebene (oder besser verzerrte) Welle charakterisiert; vom Streuzentrum gehen Kugelwellen aus. Hierbei ergeben sich zwei Grenzfälle, die sich auf Grund der verschiedenen de Broglie-Wellenlänge wie folgt unterscheiden:

1. $\lambda \gg R$ (z.B. Streuung langsamer Neutronen): Die Streuung ist isotrop, da von allen Punkten des Streuzentrums gleichphasige Kugelwellen ausgehen.
2. $\lambda \ll R$ (z.B. Streuung schneller Neutronen): Die Winkelverteilung zeigt eine ausgeprägte Diffraktionsstruktur.

Bei der Streuung schwerer Projektile ist im allgemeinen $\lambda \ll R$. Zusätzlich ist die starke Coulombwechselwirkung zu berücksichtigen. Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden:

- a) Das Coulombpotential beeinflusst die Wellenfronten nur wenig. Aus den ebenen Wellenfronten wird durch das Streuzentrum eine „Scheibe“ herausgeschnitten; in der Schattenzone kommt es zu Interferenzerscheinungen. Das optische Analogon zu diesem Vorgang ist die Fraunhofer-Beugung.



- b) Es findet eine starke Beeinflussung (Krümmung) der Wellenfronten durch das Coulombpotential statt. Dieser Fall ist typisch für Schwerionreaktionen. Die Wellen scheinen von einem virtuellen Quellpunkt Q auszugehen. Das optische Analogon hierzu ist die Fresnel-Beugung (Beugung eines divergenten Lichtbündels an einem Beugungsscheibchen mit Radius a).