3. Strömungen und Mischungsprozesse

3.1 Die Bewegungsgleichungen für Flüssigkeiten

Strömungen in Seen sind kompliziert und verändern sich fortwährend. Diese Eigenschaft macht sie in einem gewissen Sinne auch einfach: Interessieren wir uns nur für die langzeitliche Wirkung der Strömungen, z.B. für den mittleren Wasseraustausch zwischen Epi- und Hypolimnion, so hilft uns eine statistische Betrachtungsweise, wonach die Bedeutung von "Einzelereignissen" umso stärker hinter dem mittleren Verhalten des Systems zurücktritt, je mehr solcher "Ereignisse" am Vorgang beteiligt sind.

Die Existenz von "Strömungsereignissen" hängt damit zusammen, dass Strömungen in Seen nie laminar, sondern immer turbulent sind. Das bedeutet, dass sich benachbarte Wasserpakete nicht auf gleichmässig nebeneinander her laufenden Stromlinien bewegen (wie das etwa in einer durchströmten engen Röhre bei kleinen Geschwindigkeiten der Fall wäre), sondern durch unregelmässig auftretende Wirbel plötzlich getrennt werden und schliesslich vollkommen verschiedene Wege gehen. Diese Wirbel sind von unterschiedlichster Grösse und existieren nicht als ewige Objekte, sondern stehen in ständigem Wandel. Im Meer kann man heute dank modernster Messmethoden Wirbel mit Durchmessern von einigen hundert Kilometern identifizieren, die sich beispielsweise vom Golfstrom gelöst haben und dann wie grosse Wirbelstürme während Wochen herumwandern. In Seen nehmen die grössten Wirbel das ganze Seebecken ein. Die kleinsten Wirbel sind sowohl im Meer als in Seen nur einige Millimeter oder Zentimeter gross. Weil Flüssigkeiten viskos (d.h. der sog. **inneren Reibung** unterworfen) sind, wird in noch kleineren Strukturen die ganze Bewegungsenergie innerhalb kürzester Zeit in Wärme umgewandelt. Die kinetische Energie ist proportional zum Volumen des Wirbels, die Reibung proportional zur Oberfläche. Grosse Wirbel haben ein günstigeres Volumen-zu-Oberflächen-Verhältnis und überleben somit länger.

Der berühmte Hydromechaniker L.F. Richardson hat diesen Sachverhalt so umschrieben:

> "Grosse Wirbel besitzen kleine Wirbel, welche an ersteren Geschwindigkeit nagen. Und kleine Wirbel haben noch kleinere Wirbel. Und so weiter ... bis zur Viskosität."

Die Verteilung der Strömungsenergie (kinetische Energie) in verschiedene Grössen- bzw. Zeitklassen nennt man das **Spektrum** der Turbulenz. Die grössten Strömungsenergien finden sich bei den grossen Wirbeln. Zu den kleineren Wirbeln hin nimmt die Energie nach einem Potenzgesetz ab. Der Übergang von kinetischer in thermische Energie nennt man **Energiedissipation**.

Was man **Turbulenz** nennt, stellt eigentlich ein zeitlich und räumlich variables Strömungsfeld dar, das man im Prinzip mit den Grundgleichungen der Hydrodynamik beschreiben könnte. Praktisch ist das aber genauso ausgeschlossen wie die Beschreibung der Trajektorien der rund $6 \cdot 10^{23}$ Moleküle in einem Mol Gas. Ebenso wie in der Thermodynamik kann man auch bei der Turbulenz das Problem mit Hilfe einer statistischen Betrachtungsweise umgehen. Wenn man nämlich zeitlich nur lange genug wartet, so werden sich alle Strömungsvektoren durch ein bestimmtes Flächenelement zu einer **mittleren Geschwindigkeit** $\overline{U}$ addieren. Im Vergleich zu den momentanen Strömungsgeschwindigkeiten ist $\overline{U}$ meistens klein oder gar null. Als Mass für die Intensität der Turbulenz dient der zeitliche Mittelwert der Strömungsgeschwindigkeit im Quadrat, $\overline{U^2}$, d.h. die Varianz der Strömung.

Die Bewegung einer Flüssigkeit wird im Prinzip von den gleichen Bewegungsgesetzen bestimmt wie diejenige eines starren Körpers. Danach ist die Bewegung ohne Wirkung von äusseren Kräften geradlinig. Kräfte führen zu Geschwindigkeitsänderungen, d.h. zu Beschleunigungen. Trotzdem sind die Bewegungsgleichungen von Flüssigkeiten ungleich komplizierter als diejenigen starrer Körper. Dies rührt daher, dass die Bewegung einzelner ‚Flüssigkeitspakete' untereinander gekoppelt ist: benachbarte Flüssigkeitspakete "spüren einander". Die Grössen, welche diese Interaktion vermitteln, sind Druck und innere Reibung. Der Druck ist dafür verantwortlich, dass sich eine Flüssigkeit im allgemeinen so bewegt, dass – ausser in extremen Fällen – kein "leerer Raum" entsteht.

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Bewegung einer Flüssigkeit mathematisch zu beschreiben. In der ersten Methode, der sogenannten **Lagrange'schen Darstellung**, wird die zeitliche Variation der Systemvariablen (Geschwindigkeit, Druck, Dichte etc.) im sich bewegenden Flüssigkeitselement beschrieben. In der zweiten Methode, der **Euler'schen Darstellung**, werden die dynamischen Gleichungen der Systemvariablen für einen im Raum fixierten Punkt formuliert. Für eine skalare Eigenschaft f können die beiden Darstellungen durch folgende Gleichung in Bezug gebracht werden:

(3.1) $$\left(\frac{df}{dt}\right)_{Lagrange} = \frac{\partial f}{\partial t} + U_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + U_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

wobei $\partial f/\partial t$ die Euler'sche Ableitung ist, x_i (i = 1,2,3) die drei kartesischen Koordinaten darstellen (x_3: vertikale Koordinate positiv nach oben) und U_i die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten des Geschwindigkeitsvektors **U** sind.

Für den Fall einer **reibungslosen** Flüssigkeit in einem **Intertialsystem** (keine Erdrotation) wird die Dynamik des Langrange'schen Flüssigkeitselementes durch folgende zwei Kräfte bestimmt: (a) Gravitationskraft entlang der vertikalen Achse x_3, (b) hydrostatischer Druckgradient. Die Lagrange'sche Beschleunigung hat somit folgende Form:

(3.2) $$\left(\frac{dU_i}{dt}\right)_{Lagrange} = -\delta_{i3}\, g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

(g: Erdbeschleinigung; $\delta_{i3} = 1$ für i = 3, sonst 0; ρ: Dichte des Wassers, p: hydrostatischer Druck). Benützt man Gl. (3.1) mit $f = U_i$, setzt Gl. (3.2) ein und löst nach der Euler'schen Geschwindigkeitsveränderung auf, ergibt sich folgende Bewegungsgleichung:

(3.3) $$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -U_1\frac{\partial U_i}{\partial x_1} - U_2\frac{\partial U_i}{\partial x_2} - U_3\frac{\partial U_i}{\partial x_3} - \delta_{i3}\, g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$ (**Euler'sche Gleichung**)

Wegen der Multiplikation der Geschwindigkeit U_i mit der örtlichen Geschwindigkeitsableitung $\partial U_i/\partial x_j$ sind diese Gleichungen **nichtlinear** und besitzen höchstens für Spezialfälle analytische Lösungen. Die Nichtlinearität bedingt ferner, dass die Linearkombination von zwei partiellen Lösungen selbst nicht notwendigerweise eine Lösung darstellt. Dies verhindert z.B. die Aufteilung des Strömungsvektors in einzelne harmonische Komponenten. Das bedeutet, dass Wellen verschiedener Frequenz bzw. Wellenlänge miteinander gekoppelt sind.

Berücksichtigt man in den Gleichungen zusätzlich die innere Reibung (**Viskosität**) der Flüssigkeit und eventuell die **Erddrehung**, so erhält man die sogenannten **Navier-Stokes'schen Gleichungen**. Wir wollen uns an dieser Stelle auf die Behandlung der reibungsfreien Euler'schen Gleichungen beschränken und insbesondere die Frage angehen, durch welche Näherung die Kopplung zwischen gross- und kleinskaligen Bewegungen aufgelöst werden kann. Anders gefragt: Gibt es eine mathematische Theorie, mit welcher die langfristigen, gemittelten und grossräumigen Strömungen analysiert werden können, ohne dass dabei über die erwähnte Kopplung die ganze Feinstruktur der kleinräumigen, turbulenten Mischungsprozesse mitberücksichtigt werden muss? Diese Frage wird in Abschnitt 3.2 diskutiert.

Die Lagrange/Euler'sche Transformationsgleichung (3.1) kann auch für andere skalare Grössen benützt werden, beispielsweise für die Konzentration C eines gelösten Stoffes oder für die Temperatur T. In einem mitbewegten Wasserpaket (Langrange'sche Darstellung) verändert sich die Konzentration durch zwei Prozesse, durch *in situ*-Produktion (S_C = Produktion des Stoffes; S_C kann auch negativ sein, falls der Stoff verbraucht wird, Einheit beispielsweise mol $m^{-3}s^{-1}$) und durch molekulare Diffusion (2. Fick'sches Gesetz; D^C: molekularer Diffusionskoeffizient, Einheit beispielsweise m^2s^{-1}):

(3.4) $$\left(\frac{dC}{dt}\right)_{Lagrange} = S_C + D^C \sum_j \frac{\partial^2 C}{\partial x_j^2}$$

Benützt man Gl. (3.1) mit f = C, so ergibt sich:

(3.5a) $$\frac{\partial C}{\partial t} = -\sum_j U_j \frac{\partial C}{\partial x_j} + S_C + D^C \sum_j \frac{\partial^2 C}{\partial x_j^2}$$

Da wegen der Inkompressibilität von Wasser div U = 0 gilt (siehe Gl. 3.13), kann man dies auch in der Form

(3.5b) $$\frac{\partial C}{\partial t} = -\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(U_j C) + S_C + D^C \sum_j \frac{\partial^2 C}{\partial x_j^2}$$

schreiben.

Die entsprechende Bilanzgleichung für die Wassertemperatur T lautet sinngemäss:

(3.6) $$\frac{\partial T}{\partial t} = -\sum_j U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{S_T}{c\rho} + D^T \sum_j \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2}$$

(D^T: molekularer Diffusionskoeffizient für Wärme, Einheit beispielsweise $m^2 s^{-1}$, S_T; *in situ*-Produktion von Wärme, Einheit beispielsweise W m^{-3}, c: spezifische Wärme von Wasser).

3.2 Turbulenz, turbulente Diffusion und Reynolds-Spannung

Nach den Gl. (3.5) und (3.6) setzt eine Berechnung der lokalen Konzentrations- bzw. Temperaturveränderungen voraus, dass das Strömungsfeld U_j in der Nähe des betrachteten Punktes zu jeder Zeit bekannt ist. Wie wir im vorangehenden Abschnitt gesehen haben, sind Strömungen in Oberflächengewässern aber kaum je laminar, sondern turbulent. Das bedeutet, dass das Strömungsfeld sowohl örtlich als auch zeitlich eine komplizierte Struktur aufweist und nicht allein mit Hilfe deterministischer Gleichungen beschrieben werden kann. Anders gesagt: Wir erwarten Strömungsmuster, welche einerseits in eine mittlere bzw. grossräumige Strömung und andererseits in einen nur statistisch erfassbaren fluktuierenden Anteil zerlegt werden können. Obschon man anhand von Experimenten zeigen kann, dass für das Wasser keine natürliche Aufteilung zwischen "grossräumig" und "turbulent" besteht, gelingt es mit den im Folgenden beschriebenen Methoden, die Wirkung der Turbulenz von derjenigen der Strömungen abzutrennen, wenn auch diese Trennung nicht für alle Situationen eindeutig ist. Eine erste, plausible Herleitung der Gleichung für den turbulenten Transport liefert das sogenannte Austausch-Modell (Abb. 3.1).

Betrachten wir den Transport eines Stoffes bzw. der Temperatur in einem Wasserkörper in vertikaler Richtung. Dabei wird angenommen, die mittlere vertikale Strömung sei Null. Dennoch sind als Folge des turbulenten Charakters der Strömung die vertikalen Geschwindigkeitskomponenten nicht jederzeit null. Wir können uns

gedanklich vorstellen, dass die vertikalen Bewegungen durch sog. Austausch-Ereignisse beschrieben werden können, bei denen je zwei Wasservolumina der Grösse Q_{ex} ihren Platz über eine vertikale Distanz L tauschen. Sind die Konzentrationen in den beiden Wasserpaketen nicht gleich (d.h. existiert in diesem Wasserkörper ein mittlerer vertikaler Konzentrationsgradient), so hat dieses Austausch-Ereignis einen Nettotransport F_z zur Folge, der proportional zum ausgetauschten Volumen Q_{ex}, zur Austauschlänge L und zum mittleren vertikalen Konzentrationsgradienten $\partial C/\partial z$ ist (Abb. 3.1):

(3.7) $$F_z = - Q_{ex} L \frac{\partial C}{\partial z} = - K_z \frac{\partial C}{\partial z} \qquad \text{mit } K_z = Q_{ex} L$$

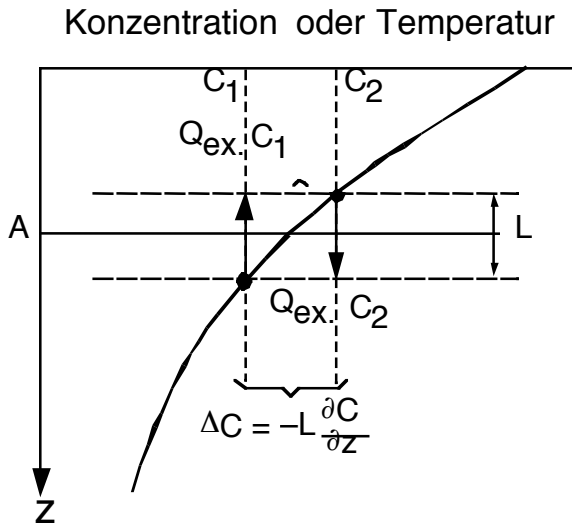

Abb. 3.1: *Austauschmodell für turbulente Diffusion: Der vertikale Wasseraustausch Q_{ex} pro Fläche und Zeit durch die horizontale Ebene A verursacht einen Nettotransport von gelösten oder suspendierten Stoffen, welcher zum negativen Konzentrationsgradienten $\partial C / \partial z$ und der mittleren vertikalen Verschiebung L (Mischungslänge) proportional ist. z = vertikale Raumkoordinate.*

Wir können nun alle Ereignisse zusammenfassen, welche pro Zeiteinheit eine bestimmte Fläche durchqueren. Jedes einzelne Ereignis führt zu einem Transport, der proportional zum vertikalen Konzentrationsgradienten ist. Der Proportionalitätsfaktor setzt sich aus dem ausgetauschten Wasservolumen pro Zeit und Fläche (diese Grösse hat die Einheit einer Geschwindigkeit!) und der mittleren Austauschdistanz L zusammen. Wir benützen für dieses Produkt die neue Variable K_z, den turbulenten Diffusionskoeffizienten (in der englischen Literatur oft auch *eddy diffusion coefficient* genannt). Die entstehende Gleichung besitzt die selbe Form wie das erste Fick'sche Gesetz, und die Grösse K_z hat tatsächlich die Dimension eines Diffusionskoeffizienten.

Das Austauschmodell ist vom theoretischen Standpunkt aus nicht sehr befriedigend, hat aber den Vorteil, dass es ein anschauliches Bild für den turbulenten Diffusionskoeffizienten vermittelt: Der Koeffizient wird bestimmt durch die Intensität der Austauschströmung und durch die Distanz, über welche diese wirkt. Tatsächlich existiert ein analoges Bild für die molekulare Diffusion, wonach sich diese aus der mittleren Geschwindigkeit der Moleküle und der mittleren freien Weglänge zusammensetzt. Im Gegensatz zum molekularen Diffusionskoeffizient ist der turbulente Koeffizient eine Eigenschaft des aquatischen Systemes und hängt nicht von der Art des betrachteten Stoffes ab. Turbulente Diffusionskoeffizienten sind also für alle gelösten Stoffe gleich, können aber nicht – so wie die molekularen Diffusionskoeffizienten – in einem Handbuch tabelliert werden, da sie von Gewässer zu Gewässer und von einem Zeitpunkt zum andern stark variieren.

Die zweite und mathematisch exaktere Methode von Reynolds zur Herleitung der turbulenten Diffusion geht davon aus, dass jedes Variablenfeld f in einen zeitlichen Mittelwert $\bar{f}$ und eine Restfluktuation f' aufgeteilt werden kann:

(3.8a) $$f = \bar{f} + f',$$

wobei

(3.8b) $$\bar{f} = \bar{f}_\tau = \frac{1}{\tau}\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} f(t')\,dt'$$

und $\overline{f_\tau'} = 0$ gilt. Die Dauer des Mittelungsintervalles τ beeinflusst die Trennung zwischen Mittelwert und Fluktuation, was durch den Index τ zum Ausdruck gebracht wird. Je länger τ, desto grösser ist jener Anteil von f, welcher im Fluktuationsterm ("in der Turbulenz") f_τ' erscheint. Falls f keinen Langzeit-Trend besitzt, wird der Mittelwert $\overline{f_\tau}$ von τ unabhängig, sobald τ deutlich grösser als die charakteristische Periode τ_0 ist, mit welcher zeitliche Variationen im System auftreten. Zur Vereinfachung wird nachstehend der Index τ weggelassen.

Benützen wir zur Illustration die Gl. (3.5b) für advektiven und molekular-diffusiven Transport und betrachten der Einfachheit halber nur den Transport in x_3 (= z)-Richtung:

(3.9) $$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(U_z C) + D^C \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

Spaltet man im ersten Term U_z und C gemäss Gl. (3.8) auf, so ergibt sich:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(\bar{C}\,\overline{U_z} + \bar{C}\,U_z' + C'\,\overline{U_z} + C'\,U_z') + D^C \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

Nach erneuter Mittelwertbildung folgt (beachte: $\bar{f} = 0$ und $\bar{\bar{f}} = \bar{f}$):

(3.10) $$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(\overline{C}\,\overline{U_z}) - \frac{\partial}{\partial z}\,\overline{C'U_z'} + D^C \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial z^2}$$

Der advektive Transport (U_zC) zerfällt also in den mittleren Fluss $\overline{C}\,\overline{U_z}$ und den turbulenten Fluss $\overline{C'U_z'}$. Letzterer gleicht dem molekularen Transport, weswegen er in Analogie zum Fick'schen Gesetz durch den Gradienten des mittleren Feldes approximiert werden kann:

(3.11) $$\overline{C'U_z'} = -K_z \frac{\partial \overline{C}}{\partial z}$$ *lokale Gradienten-Approximation*

K_z ist – wie schon in Gl. (3.7) – der turbulente Diffusionskoeffizient; da er viel grösser ist als der molekulare Diffusionskoeffizient D^C, kann letzterer meistens gegenüber K_z vernachlässigt werden. Analoge Beziehungen lassen sich für die andern Koordinaten schreiben. In drei Dimensionen geschrieben erhalten wir also:

(3.12) $$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}(\overline{C}\,\overline{U_x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\overline{C}\,\overline{U_y}) - \frac{\partial}{\partial z}(\overline{C}\,\overline{U_z}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}(K_x \frac{\partial \overline{C}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K_y \frac{\partial \overline{C}}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(K_z \frac{\partial \overline{C}}{\partial z}) + S_C\end{aligned}$$

Die ersten drei Terme beschreiben den advektiven Transport durch das mittlere Strömungsfeld $\overline{U}$, die zweiten drei Terme die turbulente Diffusion und der letzte Term die *in situ* Produktion bzw. Zehrung.

Vernachlässigt man die (tatsächlich nur sehr kleine) Kompressibilität von Wasser, so gilt die Beziehung

(3.13) $$\text{div } U = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial Uy}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$$

Man kann zeigen, dass dies auch für die Anteile $\overline{U}$ bzw. U' allein gilt. Da die advektiven Terme in der Form

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{C}\,\overline{U_x}) = \overline{C}\frac{\partial\,\overline{U_x}}{\partial x} + \overline{U_x}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x} \qquad \text{etc.}$$

geschrieben werden können, folgt aus (3.12) unter Anwendung von (3.13):

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} = -\overline{U_x}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x} - \overline{U_y}\frac{\partial \overline{C}}{\partial y} - \overline{U_z}\frac{\partial \overline{C}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(K_x\frac{\partial \overline{C}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K_y\frac{\partial \overline{C}}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(K_z\frac{\partial \overline{C}}{\partial z}) + S_C \tag{3.14}$$

Beachte, dass die drei Komponenten K_i keineswegs gleich sein müssen. Speziell für den Fall eines geschichteten Wasserkörpers ist K_z normalerweise sehr viel kleiner als K_x und K_y (vgl. Kap. 3.6). Falls tatsächlich $K_x = K_y = K_z$ gilt, heisst das turbulente Geschwindigkeitsfeld **isotrop**. Entsprechend ist die Turbulenz **horizontale isotrop**, falls gilt: $K_x = K_y \neq K_z$.

Die "lokale Gradienten-Approximation" ist nicht die einzige Möglichkeit, die Wirkung von Turbulenz auf den Stofftransport zu beschreiben. In manchen Fällen führt dieses Modell sogar zu Widersprüchen. Eine erste Komplikation betrifft den Fall grossräumiger Turbulenz: Beim Austausch von Wasserpaketen über grössere Distanz hängt der Stofftransport nicht nur vom lokalen Gradienten $\partial\overline{C}/\partial x$, sondern von der Stoffverteilung C(x) in einem endlichen Bereich ab. Mathematisch führt dies zu einem **nicht-lokalen** Austauschmodell.

Eine weitere Schwierigkeit betrifft die Abhängigkeit von K_i von der Distanz, über welche die Wirkung der Diffusion betrachtet wird. Diese Grössenabhängigkeit der Diffusion hängt mit der Aufteilung in mittlere Strömung (Advektion) und Fluktuationsströmung (turbulente Diffusion) zusammen. Je grösser eine Tracerwolke, desto grösser die obere Grenze jener Wirbel, welche auf den Tracer diffusiv (formverändernd), nicht advektiv (Verschiebung der Wolke als Ganzes) wirken. Messungen von horizontaler Diffusion im Meer bestätigen diesen Sachverhalt (Abb. 3.2). Dies führt dann zur paradoxen Situation, dass zwei Tracerwolken unterschiedlicher räumlicher Ausdehnung gleichzeitig (d.h. unter dem Einfluss des selben turbulenten Strömungsfeldes) durch scheinbar verschieden grosse Diffusionskoeffizienten beeinflusst werden.

Die wichtigsten Gleichungen, welche Transport und Verteilung eines Stoffes im turbulenten Medium beschreiben, sind in Tab. 3.1 zusammengefasst.

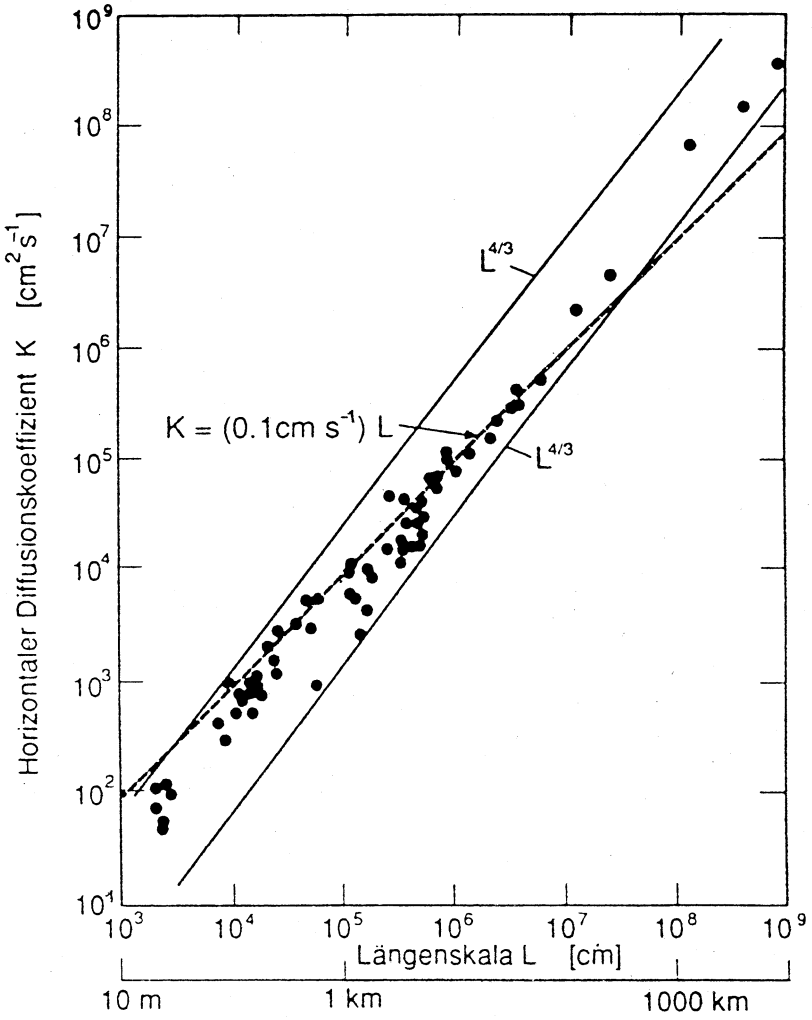

Abb. 3.2: *Horizontale Diffusion im Meer als Funktion der horizontalen Ausdehnung L, berechnet aus verschiedenen Experimenten mit künstlichen Tracern. Nach A. Okubo (Deep-Sea Res.* ***18****, 789-802, (1971)). Sie dazu auch eine kritische Diskussion des Okubo-Diagramms in Peeters et al., J. Geophys. Res., C101, 18361-18375 (1996)).*

Tab. 3.1: Transport und Stoffdynamik im turbulenten Medium

Advektion (mittlere Strömung)

Fluss pro Zeit und Fläche

$$\mathbf{F^{ad}} = \overline{\mathbf{C}} \cdot \overline{\mathbf{U}} \qquad [ML^{-2}T^{-1}]$$

Komponenten: $F_i^{ad} = \overline{C} \cdot \overline{U_i}$

Konzentrationsveränderung (inkompressibler Fluss)

$$\left(\frac{\partial \overline{C}}{\partial t}\right)_{ad} = -\,\mathrm{div}\,\mathbf{F^{ad}} = -\frac{\partial F_x^{ad}}{\partial x} - \frac{\partial F_y^{ad}}{\partial y} - \frac{\partial F_z^{ad}}{\partial z}$$

$$= -\overline{U_x}\frac{\partial \overline{C}}{\partial x} - \overline{U_y}\frac{\partial \overline{C}}{\partial y} - \overline{U_z}\frac{\partial \overline{C}}{\partial z}$$

Diffusion (turbulente Strömung)

Fluss pro Zeit und Fläche

$$F_i^{diff} = -K_i \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i} \qquad \text{1. Fick'sches Gesetz}$$

Konzentrationsveränderung

$$\left(\frac{\partial \overline{C}}{\partial t}\right)_{diff} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial \overline{C}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial \overline{C}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial \overline{C}}{\partial z}\right)$$

Isotrope, räumlich konstante Diffusion ($K = K_x = K_y = K_z$)

$$\left(\frac{\partial \overline{C}}{\partial t}\right)_{diff} = K\left(\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial z^2}\right) = K \cdot \Delta C \qquad \text{2. Fick'sches Gesetz}$$

Bemerkung: Entsprechende Gleichungen gelten für die Temperatur T.

3.3 Die Messung von Diffusion im See

Da das Wasser eines Sees während des grössten Teils des Jahres eine vertikale Dichteschichtung besitzt, sind die im vorangegangenen Kapitel erwähnten Wirbel meistens **nicht isotrop**. Die turbulenten Strömungen verlaufen präferenziell entlang der Linien gleicher Dichte (**Isopyknen**), d.h. ungefähr in der Horizontalen. Daher ist der horizontale Diffusionskoeffizient (K_x oder K_y) meist um einige Zehnerpotenzen grösser als der vertikale (K_z). Der See ist oft vollständig (oder nahezu vollständig) horizontal durchmischt. Dies gilt insbesondere auch für die Wassertemperatur T: In einer bestimmten Tiefe herrscht überall die gleiche Temperatur. Wäre dies nicht der Fall, so würde in gleicher Tiefe Wasser unterschiedlicher Dichte existieren, was zu sog. **horizontalen Dichteströmungen** führt. Dabei verschiebt sich schwereres Wasser seitlich unter das leichtere, leichteres Wasser über das wärmere.

Unter der Annahme horizontaler Homogenität kann somit zur Zeit t_1 aus einem einzigen vertikalen Temperaturprofil $T(z,t_1)$ (gemessen an der tiefsten Stelle des Sees) und aus der Seeform (ausgedrückt durch die Querschnittfläche des Sees als Funktion der Tiefe: A_z) der Wärmeinhalt des Sees zur Zeit t_1 unterhalb der Tiefe z_0 gemessen werden (siehe Abb. 3.3):

(3.15) $$W(z_0,t_1) = c\,\rho \int_{z_0}^{z_{max}} A_z\, T(z,t_1)\, dz$$

Beachte: In dieser Ableitung bedeutet z die Wassertiefe; die vertikale Koordinate ist somit nach unten gerichtet.

Entsprechend berechnet sich der Wärmeinhalt zum späteren Zeitpunkt t_2: $W(z_0, t_2)$. Falls angenommen wird, der Anstieg des Wärmeinhaltes W sei nur die Folge von Wirbeldiffusion durch die Fläche A_{z0} (= A_0), so folgt nach dem 1. Fick'schen Gesetz (Tab. 3.1)

(3.16) $$-A_0\, K_z \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z_0} c\,\rho\,(t_2 - t_1) = W(z_0, t_2) - W(z_0, t_1)$$

oder mit $(t_2 - t_1) \rightarrow 0$

(3.17) $$K_z = -\frac{\dfrac{\partial W}{\partial t}}{A_0\, c\rho \left.\dfrac{\partial T}{\partial z}\right|_{z_0}} = -\frac{\displaystyle\int_{z_0}^{z_{max}} A_z \frac{\partial}{\partial t} T(z,t_1)\, dz}{A_0 \left.\dfrac{\partial T}{\partial z}\right|_{z_0}}$$

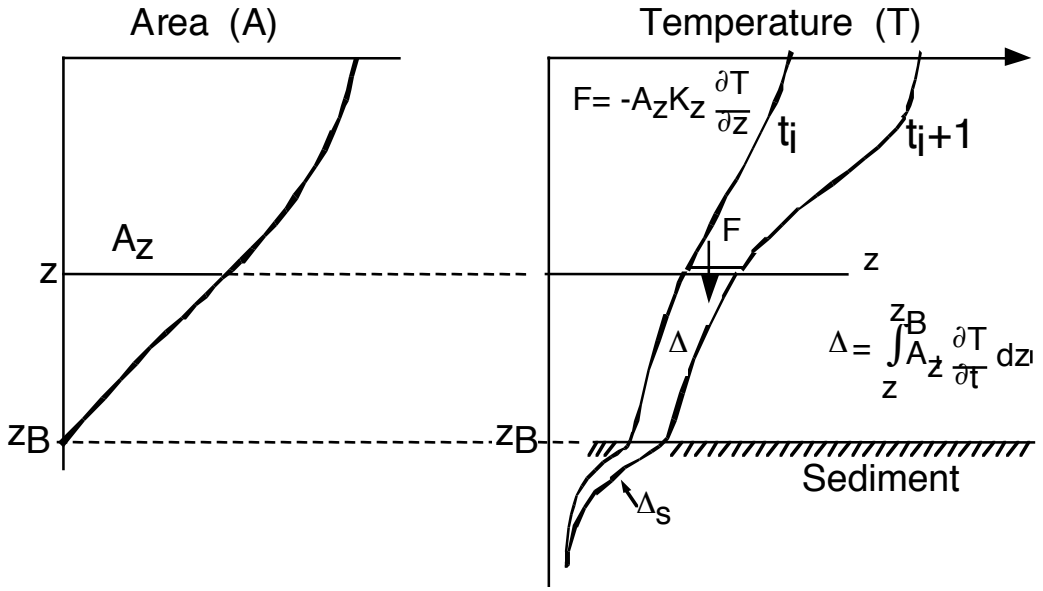

Abb. 3.3: *Berechnung der vertikalen Wirbeldiffusion aus Temperaturprofilen für tiefenabhängigen Seequerschnitt A_z. Der turbulente Wärmetransport durch die Fläche A_0 erhöht den Wärmeinhalt des Wassers um den Wert Δ. Unter Umständen muss zusätzlich die Veränderung des Wärmeinhaltes des Sedimentes Δ_S berücksichtigt werden.*

Weil die Temperatur ein sog. **konservativer Tracer** ist (**konservativ** = keine *in situ* Wärmequellen oder -senken), ist diese Methode zur Berechnung der vertikalen Diffusionskoeffizienten relativ einfach. Allerdings benötigt man Temperaturmessgeräte, welche über Wochen und Monate hinaus auch **absolut** genaue T-Werte liefern, da die zeitlichen Temperaturveränderungen im Hypolimnion sehr klein sind. Die klassischen limnologischen Standard-Messungen erfüllen diese Anforderungen oft nicht. Sind Messreihen über mehrere Jahre vorhanden, so kann Gl. (3.17) auch aus der **mittleren** jahreszeitlichen Entwicklung der Wassertemperatur berechnet werden. Ein Beispiel für den Zürichsee ist in Abb. 3.4 dargestellt.

Da die vertikale Komponente der turbulenten Geschwindigkeiten mit zunehmender Stärke der Dichteschichtung abnimmt, ist zu erwarten, dass zwischen K_z und dem Dichtegradienten $\frac{d\rho}{dz}$ ein empirischer Zusammenhang besteht. Wir werden auf diesen Punkt am Schluss von Kapitel 3 zurückkommen.

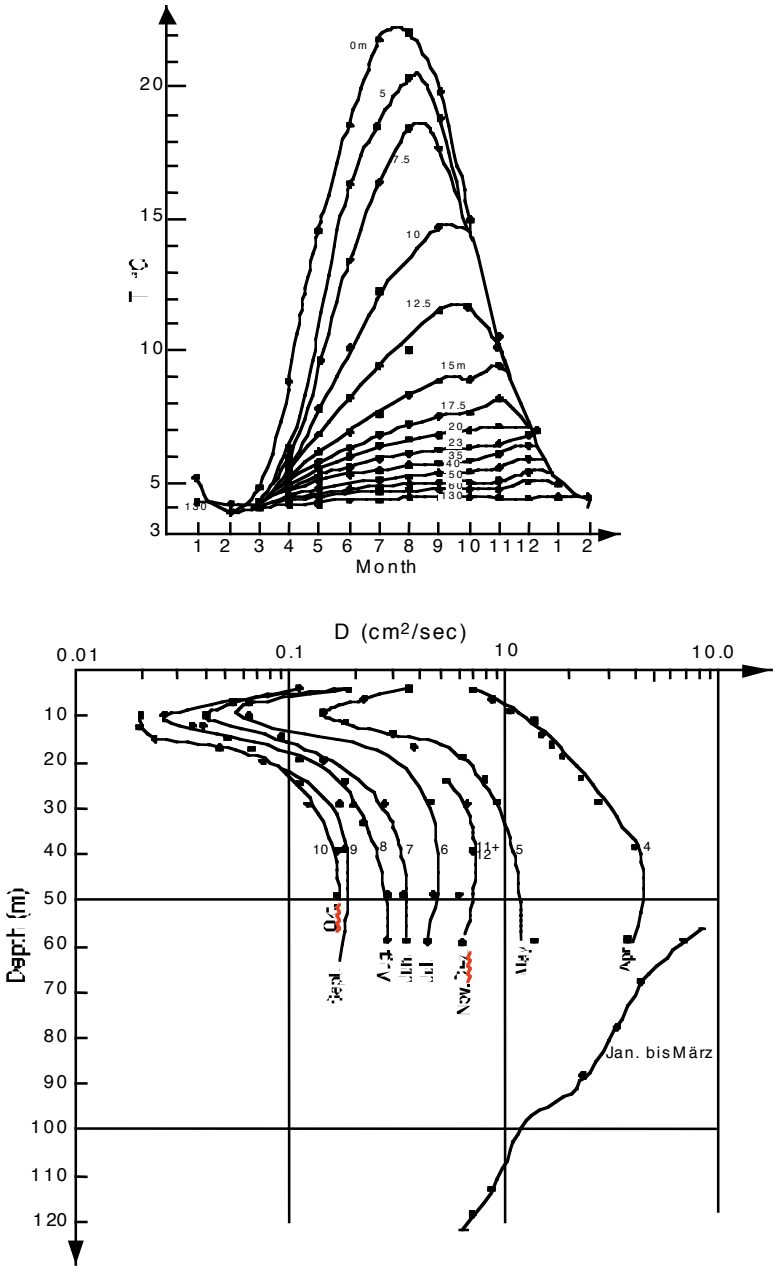

Abb. 3.4: *Mittlerer Jahresgang der Wassertemperatur in verschiedener Tiefe im Zürichsee (oben) und Berechnung des vertikalen turbulenten Diffusionskoeffizienten (hier D genannt) aus diesen Daten (unten). (nach Y.H. Li, Schweiz. Z. Hydrol.* ***35****, 1 (1973)). Zum Vergleich: Der* ***molekulare*** *Diffusionskoeffizient für Wärme bei 4°C ist* $1.36 \cdot 10^{-3}$ $cm^2 s^{-1}$.

Neben der Temperatur werden auch andere **natürliche Tracer** zur Bestimmung der Diffusion verwendet, welche entweder konservativ sind (z.B. Chlorid) oder nach einem genau bekannten Gesetz entstehen bzw. verschwinden. Zur zweiten Kategorie gehören namentlich die (natürlichen) radioaktiven Substanzen. Zwei Beispiele:

Beispiel 1:

Radon-222 ist ein natürliches, radioaktives Edelgas (Halbwertszeit 3.83 Tage), welches vor allem im Sediment eines Sees aus dem Zerfall von Radium-226 (Halbwertszeit 1620 Jahre) entsteht (siehe Tab. 3.2 für die Definition der Aktivitäts-Einheiten). Radon diffundiert vom Sediment ins freie Seewasser und wird dort je nach Mischungsintensität mehr oder weniger rasch in höhere Wasserschichten transportiert, bevor es zerfällt. Seine kurze Halbwertszeit führt innerhalb von 7 bis 10 Tagen zu stationären Radon-Verteilungen. Diese werden meist im Rahmen eines 1-dimensionalen Diffusionsmodells interpretiert. Für den advektionslosen, stationären Fall in einer Dimension reduziert sich Gl. (3.5) auf die Form

(3.18) $$K_z \frac{d^2C}{dz^2} - \lambda C + \lambda C_0 = 0$$

C: Aktivität von Radon-222 ($Bq \cdot m^{-3}$)
C_o: Aktivität von Radium-226 ($Bq \cdot m^{-3}$)
λ: Zerfallskonstante von Radon-222
$\lambda = \frac{\ln 2}{3.83d} = 0.181\ d^{-1} = 2.10 \cdot 10^{-6}\ s^{-1}$

Beachte: Da wegen der Stationarität die zeitliche Ableitung verschwindet, wird hier Gl. 3.5 zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Die partiellen Ableitungen können durch gewöhnliche ersetzt werden. Der Produktionsterm hat die Form $S_C = \lambda C_o - \lambda C$.

Gl. (3.18) kann man für das sog. Ueberschuss-Radon C^{ex} (englisch: "excess radon"), d.h. für jenes Radon, das **nicht** mit Radium-226 im Zerfallsgleichgewicht steht, umformulieren: $C^{ex} = C - C_o$.

(3.19) $$K_z \frac{d^2C^{ex}}{dz^2} - \lambda C^{ex} = 0$$

Lösung:

(3.20) $$C^{ex}(h) = C^{ex}(0)\ e^{-(\lambda/K_z)^{1/2} h}$$

C^{ex} (0): Ueberschuss-Radon am Sediment (Seegrund)
h: Distanz vom Seegrund

Die logarithmisierte Form von Gl. (3.20) ist

(3.21) $$\ln C^{ex}(h) = \ln C^{ex}(0) - (\lambda/K_z)^{1/2}\, h$$

Trägt man $\ln C^{ex}(h)$ gegen h auf, so sollte sich eine Gerade ergeben mit dem Achsenabschnitt (h = 0) $\ln C^{ex}(0)$ und der Steigung $-(\lambda/K_z)^{1/2}$. Da λ bekannt ist, lässt sich aus der Steigung der Diffusionskoeffizient K_z berechnen. In Abb. 3.5 sind Radon-Profile aus dem Greifensee dargestellt.

In besonderen Fällen werden zur Bestimmung von Mischungsprozessen auch **künstliche Tracer**, z.B. der Farbstoff Uranin, verwendet, dies vor allem zur Bestimmung der horizontalen Ausbreitung von Stoffen. Die Auswertung solcher Experimente ist meistens kompliziert; sie erfordert die Lösung der zeitabhängigen, 3-dimensionalen Diffusionsgleichung (3.5), was nur in Spezialfällen analytisch möglich ist.

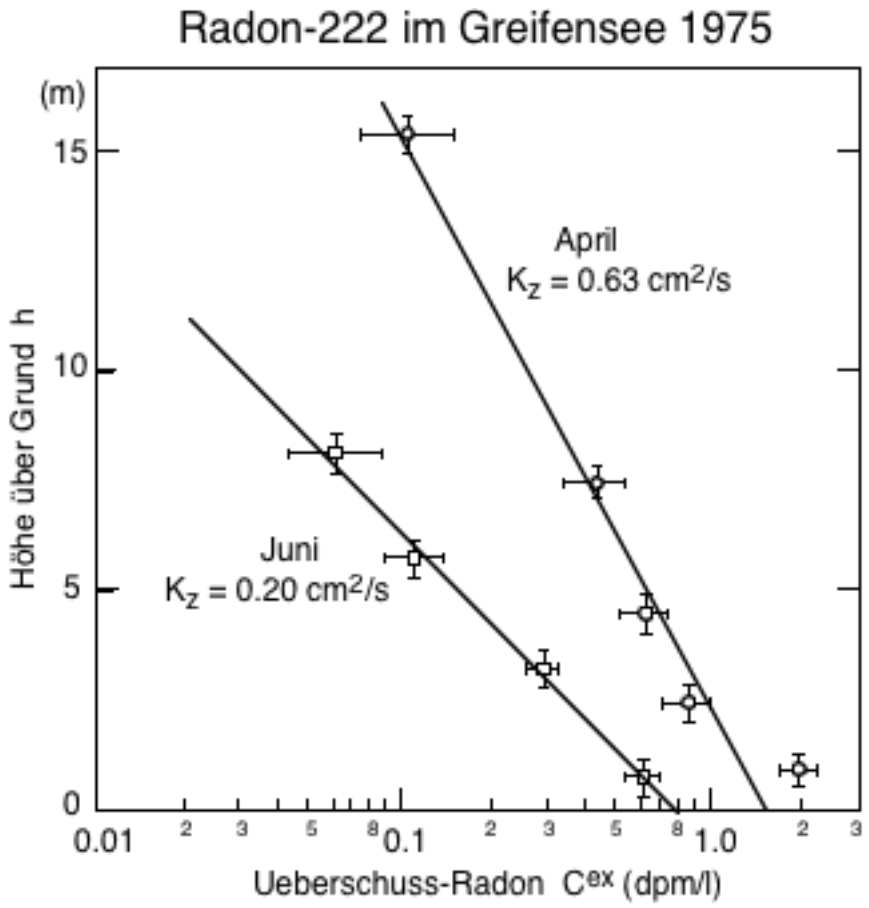

Abb. 3.5: *Ueberschuss-Radon im Hypolimnion des Greifensees. Die vertikale Diffusion sinkt von April bis Juni um den Faktor 3. (Nach Imboden und Emerson, 1978)*

Beispiel 2:

Helium-3, ein stabiles Isotop, zerfällt aus dem superschweren Wasserstoffkern Tritium. Tritium ist seit den Kernwaffenversuchen in der Atmosphäre im Wasser weit verbreitet. Solange Wasser in direktem Gasaustausch mit der Atmosphäre steht, entweicht das entstehende Helium-3 in die Luft (dort ist der natürliche Helium-3 Gehalt sehr klein). Wasser im Hypolimnion eines Sees akkumuliert das entstehende Helium-3. Aus gleichzeitiger Messung von Helium-3 und Tritium kann das sog. "Wasseralter" bestimmt werden, d.h. jene Zeit, die seit dem letzten Kontakt des Wassers mit der Atmosphäre verstrichen ist.

In Abb. 3.6 ist die zeitliche Entwicklung des Wasseralters im Baldeggersee dargestellt. Offenbar zirkuliert der See im Winter nicht vollständig, aber das Helium-Alter zeigt immerhin einen gewissen Wasseraustausch am Seegrund während des Winters.

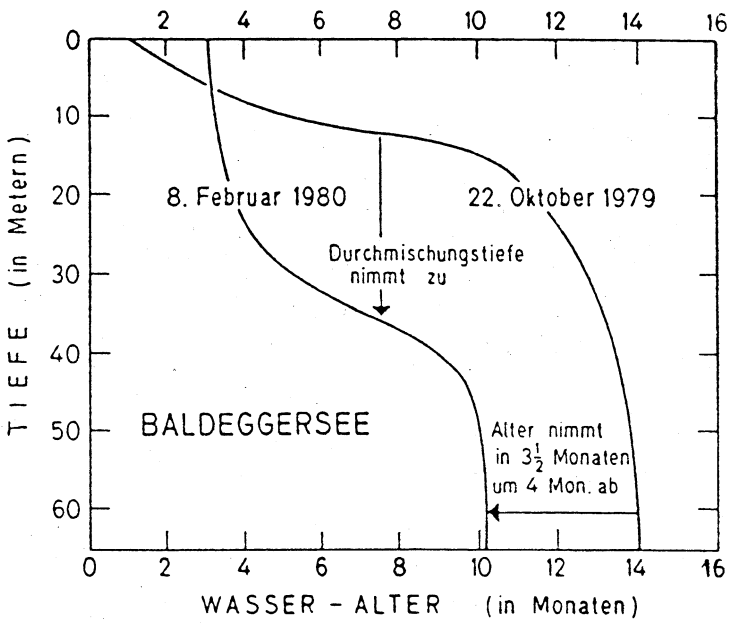

Abb. 3.6: *Das Isotop Helium-3 entsteht durch den radioaktiven Zerfall von Tritium im Wasser. Aus dessen Konzentration lässt sich das Wasseralter bestimmen. In den tiefen Schichten des Baldeggersees hat das Alter zwischen Oktober 1979 und Februar 1980 von 14 auf 10 Monate abgenommen; ein Teil des Wassers ist in dieser Zeit offenbar durch "junges" Wasser von der Oberfläche ersetzt worden.*

Tab. 3.2: Theorie des radioaktiven Zerfalls

(1) Zerfallskette $X_1 \xrightarrow{\lambda_1} X_2 \xrightarrow{\lambda_2} X_3 \xrightarrow{\lambda_3} \ldots\ldots \xrightarrow{\lambda_{n-1}} X_n$ (stabil)

λ_i: Zerfallskonstante des Isotops i

(2) Zusammenhang mit Halbwertszeit τ_i: $\tau_i = \frac{\ln 2}{\lambda_i}$

(3) Zerfallsgesetz $\frac{dX_i}{dt} = \lambda_{i-1} X_{i-1} - \lambda_i X_i$

X_i: Anzahl Kerne des Isotops i (bzw. Konzentration, d.h. Anzahl Kerne pro Volumen)
Lösung für $X_{i-1} = 0$: $X_i(t) = X_i(0) \cdot e^{-\lambda_i t}$

(4) Aktivitätseinheiten: $C_i \equiv \lambda_i X_i$

C_i: Anzahl Zerfälle des Isotopes i pro Zeit und Volumen, z.B. Bq m^{-3} oder dpm m^{-3}. Einheiten: 1 Bq = 1 Zerfall pro Sekunde. 1 dpm = 1 "decay per minute" = 1/60 Bq.

Umwandlung des Zerfallsgesetzes (3) in Aktivitätseinheiten

(5) $$\frac{dC_i}{dt} = \lambda_i (C_{i-1} - C_i)$$

Lösung für C_{i-1} = const.:

(6) $$C_i(t) = C_{i-1} + [C_i(0) - C_{i-1}]\, e^{-\lambda_i t}$$

Zerfallsgleichgewicht

(7) $$\frac{dC_i}{dt} = 0 \text{ für alle i, d.h. } C_1 = C_2 = \ldots$$

3.4 Energieinhalte und Energieflüsse im See

Auf ein Oberflächengewässer wirken sowohl **thermische** als auch **mechanische** Energieflüsse. Für stehende Gewässer (Seen) sind die wichtigsten mechanischen "Energielieferanten" der Wind und die Zuflüsse. In Fliessgewässern kommt die potentielle Energie dazu, welche in kinetische Energie umgewandelt wird, wenn der Fluss entlang seines geneigten Bettes zu Tale fliesst. Wir beschäftigen uns hier mit mechanischen Energieflüssen in Seen. Wenn diese auch um einige Zehnerpotenzen kleiner sind als der Wärmefluss (sie erreichen bei einem starken Sturm kaum je ein Watt pro m^2 (Abb. 3.7)), so stellen sie doch geordnete Bewegungen dar, welche Stoffe und Wärme im See über grössere Distanzen transportieren, die Partner für die chemischen und biologischen Prozesse zusammenführen und via Oberflächentemperatur den thermischen Energiehaushalt indirekt mitbeeinflussen.

Der **mechanische Energieinhalt** umfasst erstens das gesamte Spektrum von Bewegungsenergien (**kinetische Energie**), angefangen bei den grossräumigen Seeströmungen über lokale Wirbel bis hinunter zur kleinräumigen Turbulenz. Auch die Energie der Oberflächen- und internen Wellen ist dazu zu zählen. Zweitens gehört zum mechanischen Energiefluss die Veränderung der **potentiellen Energie** der Wassermassen, wie sie entweder als Folge der homogenen Dichteveränderung einer Wassermasse (Ausdehnung bzw. Kontraktion) oder als Folge vertikaler Mischung in einem geschichteten Medium auftritt.

Als Beispiel für den zweiten Prozess stelle man sich eine Wassersäule der Höhe h vor, welche je zur Hälfte aus Wasser der Temperatur von 10°C (unten) und 20°C (oben) besteht (Abb. 3.8a). Infolge der Konzentrierung des schweren (10°C) Wassers in der unteren Hälfte liegt der Massenschwerpunkt S_M unterhalb des Volumenschwerpunktes S_V. Wird die Wassersäule vollständig durchmischt, so steigt S_M der jetzt durchgehend 15°C warmen Wassermasse auf die Höhe S_V an: Als Folge der Durchmischung hat sich die potentielle Energie der Wassermasse vergrössert; die entsprechende Energie ist dem kinetischen Energieinhalt entzogen worden. Befindet sich hingegen zu Beginn das kältere (also schwerere) Wasser in der oberen Schicht - etwa als Folge einer Abkühlung an der Oberfläche - so liegt S_M über S_V (Abb. 3.8b). Die Durchmischung läuft spontan ab, wobei sich die frei werdende potentielle Energie in kinetische Energie (Konvektion, Turbulenz) umwandelt.

Die Dichte von Wasser hängt in nichtlinearer Weise von der Temperatur ab. Mischt man zwei gleich grosse Wassermassen unterschiedlicher Temperatur, hat das Mischwasser zwar eine dem Mittelwert entsprechende Temperatur, nicht aber die mittlere Dichte. (Beispiel: Wasser von 2°C und 6°C hat ungefähr gleiche Dichte; die Dichte des Mischwassers (4°C) ist aber grösser als diejenige beider Ausgangsmassen!). Daher ist es nicht trivial, die mit einem endlichen Mischungsereignis verbundene Veränderung der potentiellen Energie, ΔE_{pot}, zu berechnen.

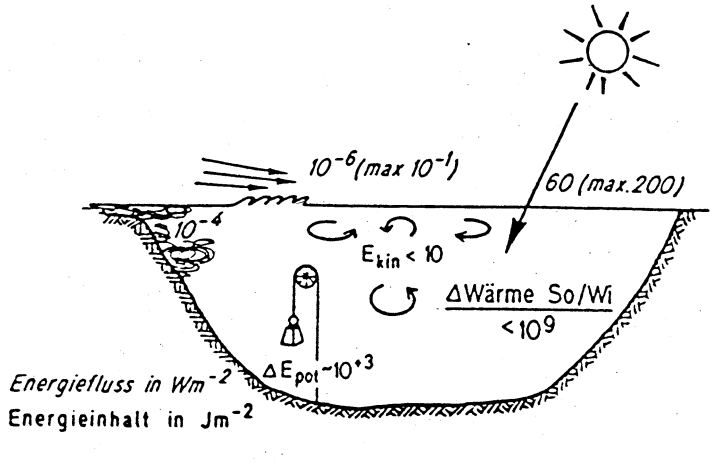

Abb. 3.7: *Typische Grösse von Energieinhalt und -flüssen in einem See. Die thermische Energievariation (ΔE_{th}) bedeutet die jährliche Wärmeinhalts-Variation zwischen Sommer und Winter. In Salzseen kann die in der Schichtung enthaltene potentielle Energie E_{pot} um 2 bis 3 Zehnerpotenzen grösser sein als der hier angegebene Wert.*

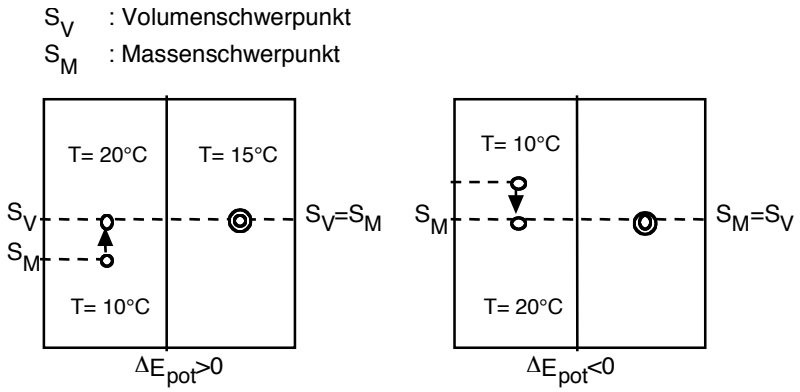

Abb. 3.8: *a) Veränderung der potentiellen Energie (ΔE_{pot}) als Folge der vertikalen Durchmischung einer stabil geschichteten Wassermasse. b) ΔE_{pot} als Folge der spontanen Durchmischung einer instabilen Wassermasse. Beachte: Wegen der besondere Form der Zustandsgleichung, insbesondere von $\rho(T)$, nimmt das totale Volumen beim Mischungsprozess ab. Der Volumenschwerpunkt S_V wandert somit nach unten, so dass die Veränderung der potentiellen Energie (quantifiziert durch die Differenz $S_V - S_M$) in Wirklichkeit kleiner ist als in obiger Darstellung.*

Für den Fall einer homogenen Dichteveränderung der Grösse $\Delta\rho$ sind die Verhältnisse einfacher. Wir betrachten eine homogene Wassersäule der Tiefe h_{mix} und berechnen ΔE_{pot} für eine Dichteänderung $\Delta\rho$ (Bemerkung: Im folgenden sind alle Grössen immer auf die Einheitsfläche (m^2) bezogen!).

Da die Masse nicht ändert, gilt $h_{mix}\rho = m = \text{const.}$ (m: Masse pro Fläche), also

(3.22) $$\frac{\Delta h_{mix}}{h_{mix}} = -\frac{\Delta\rho}{\rho}$$

Falls die Tiefe der Wassermasse sich um Δh_{mix} ändert, verschiebt sich der Massenschwerpunkt entsprechend um $\Delta h_{mix}/2$. Also ist mit Gl. (3.22):

(3.23) $$\Delta E_{pot} = g\,m\frac{\Delta h_{mix}}{2} = -\frac{1}{2}\,g\,h_{mix}^2\,\Delta\rho \qquad [\mathrm{J\,m^{-2}}]$$

Man kann dies auch als zeitlichen Gradienten schreiben:

(3.24) $$\frac{dE_{pot}}{dt} = -\frac{1}{2}\,g\,h_{mix}^2\,\frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{2}\,\rho\,h_{mix}\,J_b^o \qquad [\mathrm{W\,m^{-2}}]$$

J_b^o ist der sog. **Oberflächenauftriebsfluss**, d.h. (bis auf den Faktor 2) die Veränderungsrate der potentiellen Energie pro Wassermasse in der Oberflächenschicht:

(3.25) $$J_b^o = -\frac{2}{\rho\,h_{mix}}\,\frac{dE_{pot}}{dt} = \frac{g\,h_{mix}}{\rho}\,\frac{d\rho}{dt} \qquad [\mathrm{Wkg^{-1}}]$$

Das Vorzeichen von J_b^o wurde so gewählt, dass ein positives J_b^o mit einer Abnahme (Freisetzung) von potentieller Energie verbunden ist.

Falls sich ρ aufgrund der Temperaturveränderung als Folge eines Wärmeflusses an der Oberfläche, H_{tot}, ändert, so gilt (vgl. Gl. 1.3)

(3.26) $$\frac{d\rho}{dt} = -\alpha\,\rho\,\frac{dT}{dt} = -\frac{\alpha}{c_p\,h_{mix}}\,H_{tot}$$

c_p: spezifische Wärme von Wasser bei konstantem Druck

Einsetzen in (3.24) ergibt:

(3.27) $$\frac{dE_{pot}}{dt} = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha\,g\,h_{mix}}{c_p}\,H_{tot} \qquad [\mathrm{W\,m^{-2}}]$$

Ein Teil des an der Wasseroberfläche einfallenden Wärmeflusses H_{tot} wird also tatsächlich für eine Erhöhung der potentiellen Energie verwendet. Allerdings ist der relative Anteil sehr gering:

(3.28) $$\eta = \frac{\frac{dE_{pot}}{dt}}{H_{tot}} = \frac{1}{2}\frac{\alpha\, g\, h_{mix}}{c_p}$$

Für h_{mix} = 10 m, $\alpha = 2.1 \cdot 10^{-4}\ K^{-1}$ (entspricht T = 20°C), c_p = 4180 J $kg^{-1}K^{-1}$, ergibt sich $\eta = 2.5 \cdot 10^{-6}$.

Auch die interne Umlagerung von Wassermassen verschiedener Dichten hat einen potentiellen Energiefluss zur Folge. Betrachten wir noch einmal das Austauschmodell in Abb. 3.1 und benützen zur Charakterisierung die Dichte ρ anstelle der Konzentration C. Der Dichtefluss eines Austauschprozesses ist

$$F_\rho = -Q_{ex}\, L \frac{\partial \rho}{\partial z} = -K_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \qquad [kg\ m^{-2}s^{-1}]$$

Die entsprechende Veränderung der potentiellen Energie pro Wassermasse ist

(3.29) $$J_b = -\frac{g}{\rho} F_\rho = +K_z \frac{g}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} = -K_z N^2 \qquad [W\ kg^{-1}]$$

J_b ist der sog. (volumetrische) Auftriebsfluss. Das Vorzeichen ist wiederum so gewählt, dass ein positiver J_b-Wert die Umsetzung von potentieller in kinetische Energie bezeichnet. $N^2 = -\frac{g}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z}$ ist die Brunt-Väisälä-Frequenz (siehe Kapitel 1, Gl. 1.34 und Tab. 1.9 für typische Werte). Ihre Bedeutung wird im Kap. 3.5 weiter diskutiert. *Hinweis*: Wegen der Orientierung der z-Achse (positiv aufwärts) ist der Dichtegradient für eine stabile Schichtung negativ, d.h. es gilt $N^2 > 0$ und $J_b < 0$.

Der wichtigste Motor für den Eintrag von **kinetischer Energie** in einen See ist der Wind. Dieser erzeugt an der Wasseroberfläche eine sog. **Schubspannung** τ_o (Kraft pro Fläche parallel zur Wasseroberfläche, Einheit Nm^{-2} bzw. Pa). Die Schubspannung ist innerhalb einer bestimmten Grenzschicht, welche sich von der Wasseroberfläche sowohl in die Luft als auch ins Wasser erstreckt, konstant. Es ist schwierig, τ_o direkt zu messen. Ueblicherweise wird τ_o mittels der horizontalen Windgeschwindigkeit W_{10} (10 m oberhalb der Wasseroberfläche gemessen) parametrisiert:

(3.30) $$\tau_o = C_{10}\ \rho_L\ W_{10}^2 \qquad [N\ m^{-2}]$$

ρ_L: Dichte von Luft (~ 1.2 kg m^{-3} bei 20°C),
C_{10}: Windschubkoeffizient (dimensionslos)

C_{10} liegt typischerweise zwischen 0.001 ($W_{10} < 7$ m s^{-1}) und 0.0025 ($W_{10} > 20$ m s^{-1}) und erreicht für grössere W_{10} -Werte eine Sättigung.

Der Windschub τ_o bewirkt einen Fluss von kinetischer Energie von der Atmosphäre ins Wasser. Dieser ist 10 m oberhalb der Wasseroberfläche gegeben durch

(3.31) $$P_{10} = \tau_o W_{10} = \rho_L C_{10} W_{10}^3 \qquad [\mathrm{W\ m^{-2}}]$$

Von P_{10} wird nur der kleine relative Anteil χ von 1% bis 2% als kinetische Energie ins Wasser eingetragen $\left(P_{kin}^W\right)$; der Rest geht in der Schicht konstanter Schubspannung via Reibung als mechanische Energie verloren:

(3.32) $$\left(P_{kin}^W\right) = \chi\rho_L C_{10} W_{10}^3 = \eta_W W_{10}^3 \qquad [\mathrm{W\ m^{-2}}]$$

Der Koeffizient $\eta_W = \chi\rho_L C_{10}$ liegt typischerweise zwischen 1×10^{-5} und 5×10^{-5} kg m^{-3}.

3.5 Geschichtete Wassersäule: Potentielle Energie, Stabilität und Turbulenz

Turbulente Mischung in einem stabilgeschichteten Medium ist mit Produktion von potentieller Energie verbunden. Die Energieproduktion pro Zeit und Masse, J_b, ist bereits im Abschnitt 3.4 (Gl. 3.29) besprochen worden. Entsprechend ist die Energieproduktion pro Volumen:

(3.33) $$W_{pot} = g\, F_\rho = -\, g\, K_z \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_{stab} \qquad [\mathrm{W\ m^{-3}}]$$

$$\text{mit } F_\rho = -\, K_z \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_{stab} \text{: turbulenter Massenfluss} \qquad [\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}\ s^{-1}}]$$

Der Auftriebsfluss J_b beschreibt den Beitrag der potentiellen Energieveränderung an die Produktion von turbulenter kinetischer Energie (TKE). Turbulente Mischung in einem stabil geschichteten Medium ist mit einem negativen Auftriebsfluss verbunden; dem turbulenten Strömungsfeld wird Energie entzogen. Für den Fall einer instabil geschichteten Wassersäule ($N^2 > 0$) ist der Auftriebsfluss positiv; die Turbulenz wird durch die frei werdende potentielle Energie angetrieben (**konvektive Turbulenz**).

Für den Fall der turbulenten Mischung im geschichteten Medium ($J_b < 0$) stellt sich die Frage, inwieweit die Produktion von potentieller Energie dem turbulenten kinetischen Energiefeld soviel Energie zu entziehen vermag, dass schliesslich die Turbulenz verschwindet. Die sog. **Gradienten Richardson-Zahl R_i**

(3.34) $$R_i = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \qquad [-]$$

(eine dimensionslose Zahl) ist ein Mass für die relative Stärke von Schichtung (ausgedrückt durch die Stabilitätsfrequenz N^2) und Produktion von turbulenter kinetischer Energie (TKE), ausgedrückt durch das Quadrat des vertikalen Geschwindigkeitsgradienten $(\partial u/\partial z)^2$. Ueberschreitet R_i einen gewissen kritischen Wert, wird Turbulenz nicht auftreten. Mit andern Worten: Je stärker die Schichtung, desto grösser die tolerierbaren Geschwindigkeitsgradienten, ohne dass es zu Turbulenz kommt.

An dieser Stelle kommen wir auf die bereits im Kap. 3.3 gemachte Vermutung über den Zusammenhang zwischen Dichteschichtung und turbulenter vertikaler Diffusion zurück. Tatsächlich müsste man auch noch die Scherung, $(\partial u/\partial z)$,einbeziehen, das heisst K_z als Funktion der Gradienten Richardson-Zahl R_i untersuchen. Da aber die Messung des Geschwindigkeitsgradienten *in situ* aufwendig ist und dementsprechend nur wenig Daten vorhanden sind, wird oft der (rudimentärere) Zusammenhang zwischen K_z und N^2 untersucht, etwa in der Form

(3.35) $$K_z = a \cdot (N^2)^{-b}$$

Der empirische Parameter b liegt typischerweise zwischen 0.5 und 1, der Parameter a beschreibt das allgemeine "Turbulenz-Niveau". Der Ansatz basiert auf theoretischen Ueberlegungen von P. Welander, wonach R_i in einfacher Art von N^2 abhängt. In Abb. 3.9 ist als Beispiel die Anwendung von Gl. (3.35) auf den Gersauersee (Becken des Vierwaldstättersees) dargestellt.

In einer etwas andern, aber oft sehr nützlichen Betrachtungsweise wird das Verhältnis der relevanten Energieflüsse an der **Wasseroberfläche** verglichen. Wie wir bereits gesehen haben, ist die Ausdehnung der Wasserschicht der Dicke h_{mix} mit einer Veränderung der potentiellen Energie verbunden. Diese kann gemäss Gl. (3.25) durch den Oberflächenauftriebsfluss J_b^o ausgedrückt werden, wobei in Anlehnung zur Definition von J_b (Gl. (3.29)) das Vorzeichen J_b^o so gewählt ist, dass die Abnahme von potentieller Energie ($d\rho/dt > 0$) mit einem positiven Auftriebsfluss verbunden ist. Der konkurrenzierende Energiefluss, d.h. jener Fluss, der allfällig produzierte Schichtungen zerstört, wird durch den Input von kinetischer Energie durch das Windfeld ausgedrückt. Nach Gl. (3.31) ist dieser Beitrag proportional zur 3. Potenz der Windgescheindigkeit W_{10}. Normieren wir diesen Energiefluss ebenfalls auf die Wassermasse, so können wir folgende dimensionslose Zahl definieren:

(3.36) $$R_{fi} = \frac{\frac{dE_{pot}}{dt}}{P_{kin}^{W}} = -\frac{1}{2}\frac{\rho\, h_{mix}\, J_b^o}{P_{kin}^{W}} \qquad [-]$$

R_{fi} ist - bis auf einen numerischen Faktor - die sog. **Integrale Flux Richardson Zahl**. Sie ist positiv für $J_b^o < 0$, d.h. falls $d\rho/dt < 0$ ist.

R_{fi} ist ein Mass für die relative Stärke der schichtungserhaltenden Kraft im Vergleich zum schichtungszerstörenden Einfluss. Bei gegebenem Auftriebsfluss J_b^o und Windgeschwindigkeit W_{10} hängt R_{fi} noch von der momentanen Mischungstiefe h_{mix} ab. Je grösser h_{mix}, desto grösser R_{fi} und desto stärker der Einfluss der schichtungserhaltenden Energieflüsse im Vergleich zur Turbulenz. Die **Monin-Obukhov Länge** L_M gibt jene Tiefe an, bis zu welcher der Wind eine Wasserschicht gegen die stabilisierende Wirkung eines negativen Auftriebsflusses ($J_b^o < 0$) mischen kann. Sie wird durch einen gewissen kritischen Wert von R_{fi} definiert, d.h. durch $R_{fi} = R_{fi}^0$. Auflösen von Gl. (3.36) nach $h_{mix} \equiv L_M$ ergibt

(3.37) $$L_M = -R_{fi}^0 \frac{2 P_{kin}^{W}}{\rho\, J_b^o} \qquad [m]$$

Für den Fall, dass J_b^o eine Folge eines Wärmeflusses an der Wasseroberfläche ist, gilt nach Gl. (3.25) und (3.27)

(3.38) $$L_M = 2 R_{fi}^0 \frac{c_\rho}{\alpha\, g} \frac{P_{kin}^{W}}{H_{tot}}$$

Die kritische Richardsonzahl R_{fi}^0 liegt bei ungefähr 0.1. Dies bedeutet in Kombination mit dem Faktor des relativen Energieinputes durch den Wind, $\chi = 0.01$ bis 0.02 (siehe Gl. 3.32), dass vom Energiefluss in 10 m Höhe über der Wasseroberfläche, P_{10}, der Anteil χR_{fi}^0 = (1 bis 2) x 10^{-3} in potentielle Energie umgewandelt wird. Ein Beispiel für die Grösse von J_b^o, P_{kin}^{W} und L_M findet sich in Tabelle 3.3.

In Abb. 3.10 ist die **Monin-Obukhov Länge für den Vierwaldstättersee berechnet**. Die Periode mit positivem L_M (März bis August) zeigt an, wann der See thermisch stabil ist. Zwar wird die oberste Wasserschicht durch den Wind beeinflusst, doch ist **im Durchschnitt** die Windwirkung sehr klein. Natürlich kann während einzelner meteorologischer Episoden (Sturm) L_M vorübergehend bedeutend grösser werden! Auch Tag/Nacht-Unterschiede sind nicht berücksichtigt. Vom September bis

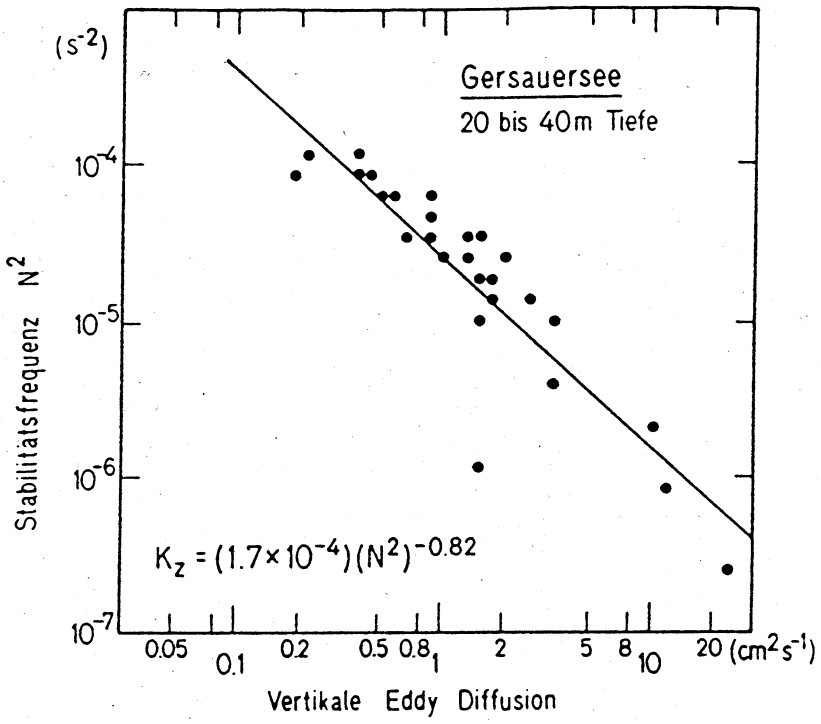

Abb. 3.9: *Korrelation zwischen Stabilitätsfrequenz N^2 und vertikaler Diffusion K_Z im Gersauersee nach Gl. (3.35)*

Februar ist L_M negativ, was thermische Instabilität und das Vorherrschen von konvektiver Turbulenz bedeutet. In dieser Zeit sinkt die Sprungschicht ab, bis im ganzen See homotherme Verhältnisse herrschen. Allerdings kann daraus noch nicht auf eine jährliche Vollzirkulation des Sees geschlossen werden; der positive Wert von α zeigt nämlich an, dass die Oberflächentemperatur **im 10-jährigen Mittel** nie unter 4°C sinkt. In **einzelnen** Jahren ist aber **das Auftreten** einer inversen Schichtung im Gersauersee durchaus möglich ($L_M > 0$ mit $H_{tot} < 0$ und $\alpha < 0$). Ein Beispiel für Tagesvariationen von L_M findet man in Abb. 3.11.

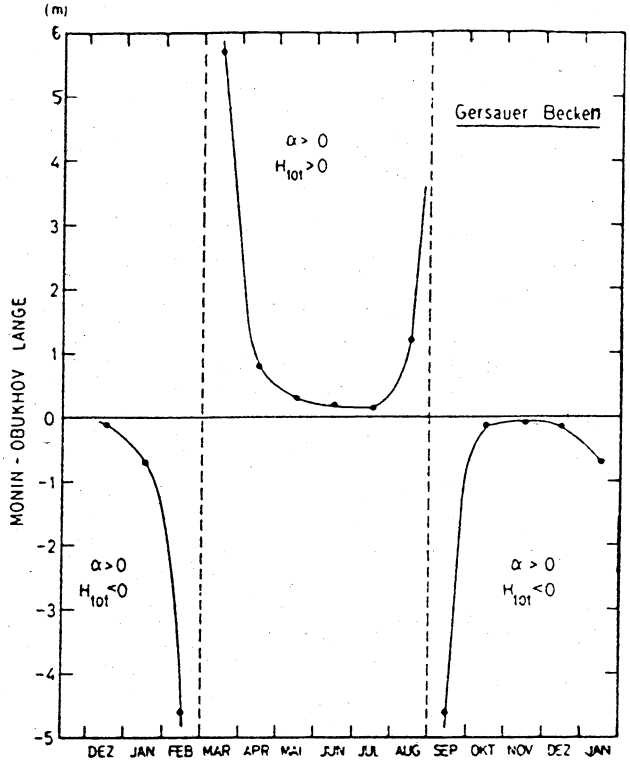

Abb. 3.10 *Jahreszeitlicher Verlauf der Monin-Obukhov Länge im Gersauersee, aus über 10 Jahren gemitteltem jährlichem Temperaturverlauf berechnet.*

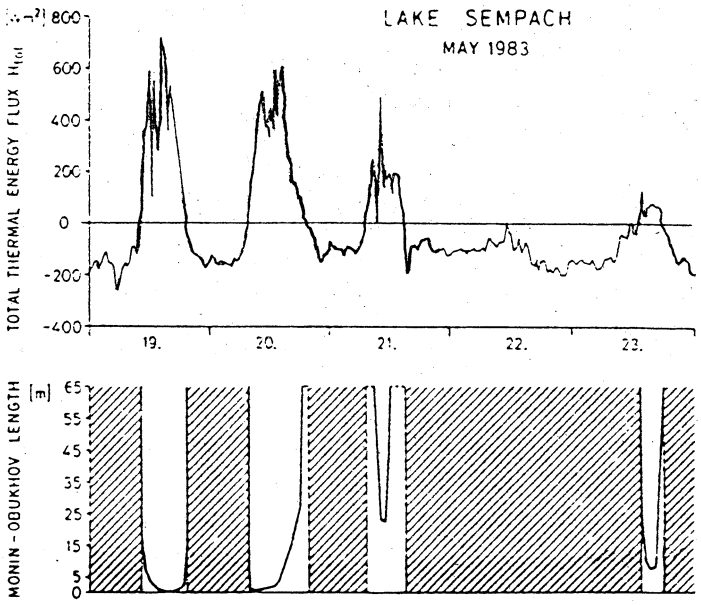

Abb. 3.11: *Tagesvariation von Wärmefluss und Monin-Obukhov-Länge im Sempachersee (nach Marti und Imboden, 1986)*

Tab. 3.3: Zahlenbeispiel für Energieflüsse von Wind und Wärme

ρ = 1000 kg m^{-3}, ρ_L = 1.2 kg m^{-3}, $C_{10} = 1 \cdot 10^{-3}$
c_p = 4180 J kg^{-1} K^{-1}, g = 9.81 m s^{-2} $\chi = 10^{-2}$
H_{tot} = 100 W m^{-2} (Sommer)
α = $2.07 \cdot 10^{-4}$ K^{-1} (Wasser bei T = 20°C) $R^0_{fi} = 0.1$

Daraus folgt: (W_{10}: Windgeschwindigkeit 10 m oberhalb Wasseroberfläche)

	W_{10} = 1 ms^{-1}	W_{10} = 5 ms^{-1}
$J^o_b = -\frac{\alpha g}{c_p \rho}$	- $4.9 \cdot 10^{-8}$ W kg^{-1}	
$P^W_{kin} = \chi \rho_L c_{10} W^3_{10}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$ W m^{-2}	$1.5 \cdot 10^{-3}$ W m^{-2}
$L_M = -2 R^0_{fi} \frac{P^W_{kin}}{\rho J^o_b}$	0.03 m	4.0 m