EAWAG

ETH

Strömungen & Mischungsprozesse

- Überblick Stofftransport
- Anwendung auf Impuls: Strömungen
- Intertialwellen
- Ekman Strömung
- Geostrophe Strömung
- Mischungsprozesse in Seen

...und alles in wenigen Stunden.... → Crashkurs !

EPAS / Hydrosphäre

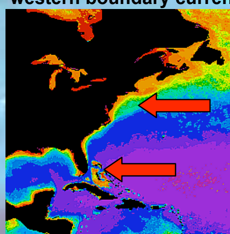
WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

Ziel: Qualitatives Verständnis u.a. für...

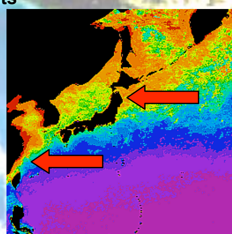
ETH

Wind & Strömung

'western boundary currents'

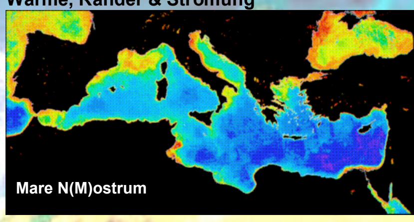


NA, Karibik



Japan

Wärme, Ränder & Strömung



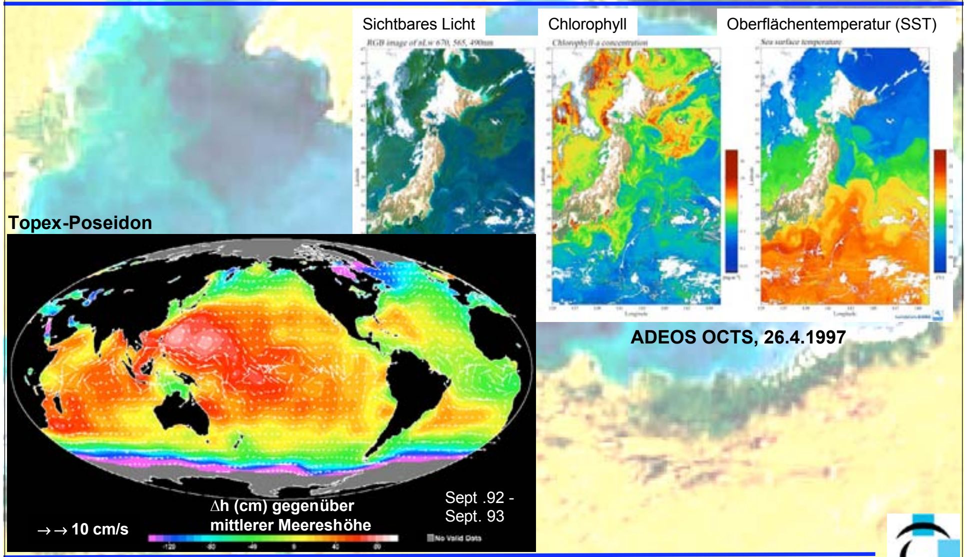
EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

EAWAG

Ziel: Qualitatives Verständis u.a. für..., 2

ETH



EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

EAWAG

Stofftransport & Flux ('Fluss'): 1. Fick'sche Gesetz

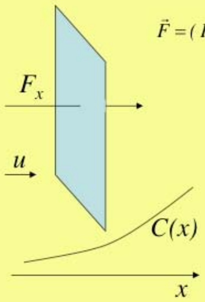
ETH

Wodurch kommt 'Stofftransport' zu stande?

Stofffluss F: Advektion und 1. Ficksches Gesetz

F = Transport von Masse pro Fläche und Zeit

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$



$$\boxed{F_x = u \cdot C - D\frac{\partial C}{\partial x}}$$

EPAS, Hydrosphäre

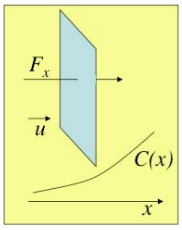
WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

EAWAG

Stofftransport bei Fluktuationen

ETH

Wo liegt das Problem?
(Stoff) Fluktuationen !
i. Heterogenität
ii. Turbulenz



Fluss: $F_x = u \cdot C - D \cdot \frac{\partial C}{\partial x}$

Advektion mol. Diffusion

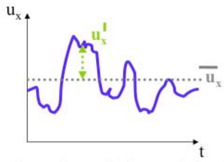
Separation: $u = \bar{u} + u'$, $C = \bar{C} + C'$

Mittlerer Fluss

$\bar{F}_x = \overline{u \cdot C} + \overline{u' \cdot C'} - D \cdot \frac{\partial C}{\partial x}$

$\bar{F}_x = \overline{u \cdot C} - E \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} - D \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}$

mittl. Advektion turb. Diffuson mol. Diffusion



Separation: Mittelwert-Fluktuation

$\bar{F}_x = \overline{u \cdot C} - K \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}$

mittl. Advektion Diffusion (turb. + mol.)

Übergang zu K & mittleren Grössen
→ 'Krampf' **(durch Praxis gerechtfertigt)**

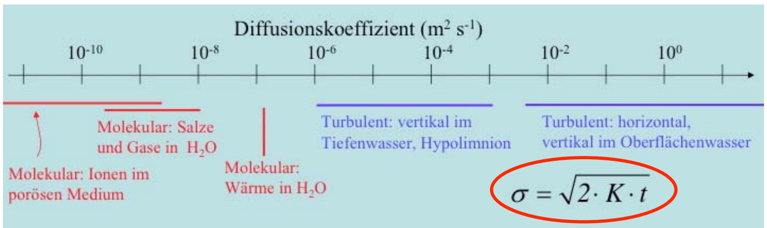
EPAS, Hydrosphäre WS 2004 / 05 Imboden / Herfort / Kipfer EAWAG

Stofftransport & Turbulenz

ETH

Turbulente Mischung ist:

1. Eigenschaft des Strömungsfeldes, nicht des sich ausbreitenden Stoffes
   1-dim. turbulenter Flux: $\overline{u' \cdot C'} = -K_x \cdot \frac{\partial C}{\partial x}$
   Unabhängig vom **Stoff**, sondern nur vom entsprechenden **Konzentrationsgradienten**
2. Gross gegenüber molekularer Diffusion

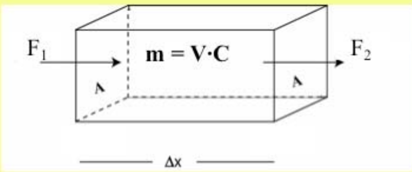


EPAS, Hydrosphäre WS 2004 / 05 Imboden / Herfort / Kipfer EAWAG

Stofftransport & Massenerhaltung: 2 Fick'sche Gesetz

ETH

Massenbilanz: **2. Ficksches Gesetz**



$$\boxed{\frac{\partial m}{\partial t} = F_1 \cdot A - F_2 \cdot A}$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial (V \cdot C)}{\partial t} = \frac{\partial (A \cdot \Delta x \cdot C)}{\partial t} = A \cdot (F_1 - F_2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{(F_2 - F_1)}{\Delta x}$$

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial F_x}{\partial x}}$$

3-Dimensionen $\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial y} - \frac{\partial F_z}{\partial z} = -\vec{\nabla} \vec{F}$

3-Dimensionen:
x: Ost **u**
y: Nord **v**
z: 'oben' **w**

EAWAG

EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

Allgemeine Gleichung für den Stofftransport

ETH

$$\left. \begin{aligned} F_x &= u \cdot C - K_x \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= -\frac{\partial F_x}{\partial x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial (u \cdot C)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \cdot \frac{\partial C}{\partial x}\right)}$$

'Advektion'

'Turbulenz / Diffusion / Dispersion'

3 Dimensionen

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial (u \cdot C)}{\partial x} - \frac{\partial (v \cdot C)}{\partial y} - \frac{\partial (w \cdot C)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \cdot \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \cdot \frac{\partial C}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \cdot \frac{\partial C}{\partial z}\right)}$$

Beschreibt den Stofftransport

- in der Atmosphäre
- im Ozean
- in Seen
- in Flüssen
- im Grundwasser

kompressibel

$$\left.\right\} \; inkompressibel: \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

inkompressibel

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} = -u\frac{\partial C}{\partial x} - v\frac{\partial C}{\partial y} - w\frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial C}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial C}{\partial z}\right)}$$

EAWAG

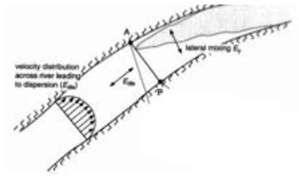
EPAS, Hydrosphäre

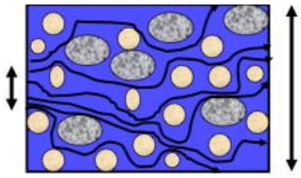
WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

Zusammenfassung Stofftransport

Offene Fragen:
Diffusivitäten bzw. Dispersivitäten K entstehen durch Fluktuationen

1. **Turbulenz** (Ozean, See, Fluss)
2. **Dispersion** (horizontale Mischung, Fluss)
3. **Bodenmatrix, Porenraum** (Grundwasser, ungesättigte Zone)





Geschwindigkeiten u (x-Richtung), v (y) und w (z)

1. **Hydrodynamik** (Ozean, See, Fluss)
2. **Darcy Gesetz**; Porenraum (Boden, Grundwasser)

Strömungen: 'Transport' von Energie & Impuls

- Mitbewegter versus ortsfester Beobachter
- Kräfte auf ein Wasserpaket ('Wassermasse')
- Linearisierung der mittleren Strömungsgleichung
- Vereinfachungen
  $\mathbf{v}_{horizontal} > \mathbf{v}_{vertikal}$, $\mathbf{Turbulenz}_{horizontal} > \mathbf{Turbulenz}_{vertikal}$, aber jeweils konstant

Mitbewegt (Lagrange) versus ortsfest (Euler)

Totale Änderung einer durch Strömung
mitbewegten Grösse f(x, y, z, t), z.B. Eigenschaft, Masse

$$\frac{Df(x,y,z,t)}{Dt} = \boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z,t}\cdot\frac{dx}{dt} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,z,t}\cdot\frac{dy}{dt} + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x,y,t}\cdot\frac{dz}{dt}} + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{x,y,z}$$

$$\frac{Df}{Dt} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot v + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot w} + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{x,y,z}$$

Lagrange **Euler**

Beliebige skalare Grösse (pro Masse)

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = \text{mol.Diffusion} + \text{Reaktion, Transformation}$$

Geschwindigkeit (Impuls / Masse)

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \text{mol.Diffusion} + \text{Kräfte/Masse}$$

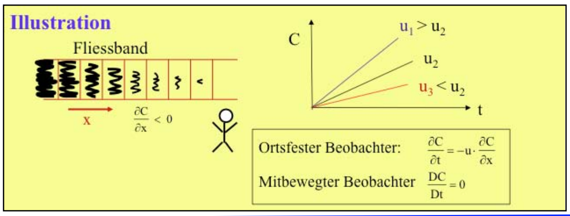
Mitbewegt (Lagrange) versus Ortsfest (Euler)

Totale Änderung einer durch Strömung
mitbewegten Grösse f(x, y, z, t), z.B. Eigenschaft, Masse

$$\frac{Df(x,y,z,t)}{Dt} = \boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z,t}\cdot\frac{dx}{dt} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,z,t}\cdot\frac{dy}{dt} + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x,y,t}\cdot\frac{dz}{dt}} + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{x,y,z}$$

$$\frac{Df}{Dt} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot v + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot w} + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{x,y,z}$$

Lagrange **Euler**



Mitbewegt (Lagrange) versus Ortsfest (Euler), 2

Totale Änderung einer durch Strömung mitbewegten Grösse f(x, y, z, t), z.B. Eigenschaft, Masse

$$\frac{Df(x,y,z,t)}{Dt} = \boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z,t} \cdot \frac{dx}{dt} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,z,t} \cdot \frac{dy}{dt} + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x,y,t} \cdot \frac{dz}{dt}} + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{x,y,z}$$

$$\frac{Df}{Dt} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot v + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot w} + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{x,y,z}$$

Lagrange **Euler**

Beliebige skalare Grösse (pro Masse)

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = \text{mol.Diffusion} + \text{Reaktion, Transformation}$$

Geschwindigkeit (Impuls / Masse)

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \text{mol.Diffusion} + \text{Kräfte/Masse}$$

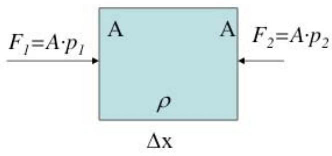
Kräfte auf ein Wasserpaket

- **Gravitation**

$F_z = -m \cdot g$, $a_z = \frac{F_z}{m} = \frac{Dw}{Dz} = -g$

- **Druckgradienten**

$$p_1 = \frac{F_1}{A}$$



$$p_2 = \frac{F_2}{A}$$

$$F = m\cdot\frac{Du}{Dt} = |F_1| - |F_2| = A\cdot p_1 - A\cdot p_2 = -A\cdot(p_2 - p_1)$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{m}A\cdot(p_2 - p_1) = -\frac{1}{\rho\cdot A\cdot \Delta x}A\cdot(p_2 - p_1) = -\frac{1}{\rho}\frac{p_2 - p_1}{\Delta x}$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};\quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};\quad \frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

Kräfte auf ein Wasserpaket, 2

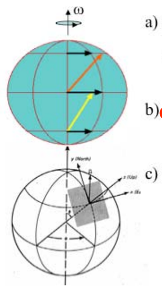
ETH

- **und sie bewegt sich doch... Coriolisbeschleunigung**

Du/Dt = f·v, **N**-Strömung → **E**-Ablenkung

Dv/Dt = - f·u, **W**-Strömung → **N**-Ablenkung

f: Coriolisparameter **f = 2ω·sinΘ**



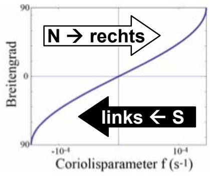
a) ω: Umdrehung der Erde (Winkelgeschwindigkeit)

$$\omega = 2\pi \cdot \left(1 + \frac{1}{365.24}\right) d^{-1} = 7.252 \cdot 10^{-5}\ s^{-1}$$

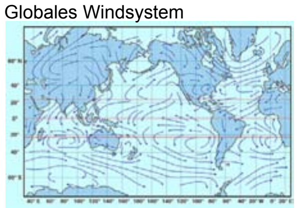
b) Θ: Breitengrad (Krümmung)

c) Werte für **f**

- Nordhalbkugel positiv
- Südhalbkugel negativ
- Äquator: $f = 0$



Globales Windsystem



Ozeanströmungen

EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

EAWAG

Bewegungsgleichungen

ETH

Advektion | Druck | 'Erddrehung' | Diffusion / 'Turbulenz'

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \cancel{f \cdot v + w \cdot 2\omega \cdot \cos\phi} + \text{Reibung}-x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \cancel{f \cdot u} + \text{Reibung}-y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} - g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \cancel{u \cdot 2\omega \cdot \cos\phi} + \text{Reibung}-z$$

Reynolds Ansatz & $A_h >> A_z$

Vereinfachung 1:

a. Vertikale Geschwindigkeiten sind klein
 w << u, v; vertikale Corioliseffekte ~ 0

b. Nichtlinearitäten zu vereinfachen:
 Reynolds Separation: f = Mittelwert (f) + Fluktuation (f')
 u = u+u', v = v +v', w = w+w'

c. Einführen der 'turbulenten' Diffusionskoeffizienten
 horizontal: $A_x = A_y = A_h$ = **konstant**
 vertikal: A_z = **konstant** << A_h

EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

EAWAG

Bewegungsgleichungen, 2: mittlere (horizontale) Geschwindigkeiten

ETH

Advektion | Druck | 'Erd-drehung' | Diffusion / 'Turbulenz'

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \cancel{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + f \cdot v + A_h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \cancel{u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - f \cdot u + A_h\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$\cancel{\frac{\partial w}{\partial t} = u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \quad g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + A_h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + A_z\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}$$

Vereinfachung 2:

a. Vertikale Geschwindigkeiten sind klein
Produkte aus mittleren Gew. & Gradienten von mittlern Gew. sind klein: **$u \cdot \partial u / \partial x \sim 0$**

b. nur horizontale Komponenten (2-D)
mittlere vertikale Geschwindigkeiten sind klein

EPAS, Hydrosphäre | WS 2004 / 05 Imboden / Herfort / Kipfer | EAWAG

Linearisierte Bewegungsgleichung für die Horizontale

ETH

Druck | Coriolis | Reibung: 'Turbulenz'

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + f \cdot v + A_h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - f \cdot u + A_h\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Vorgehen beim Lösen:
Weiteres Vereinfachen & Lösen der 'Spezialfälle':
- ***Inertial- oder Trägheitsströmung***
- ***Ekman Strömung***
- ***Geostrophe Strömung***

EPAS, Hydrosphäre | WS 2004 / 05 Imboden / Herfort / Kipfer | EAWAG

Spezialfall 1: Trägheitsströmung

Druck | Coriolis | Reibung: 'Turbulenz'

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \cancel{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}} + f \cdot v + \cancel{A_h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \cancel{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}} - f \cdot u + \cancel{A_h\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}$$

Annahmen
- **Keine Druckgradienten**
- **Reibungsfrei**

Lösung

→ $\frac{\partial u}{\partial t} = +f \cdot v \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -f \cdot u$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = +f \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = -f^2 \cdot u$$

→ u(t) = A · sin(f · t), v(t) = A · cos(f · t)

$$|\vec{v}_H| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

→ Kreisbewegung als Funktion von f

EPAS, Hydrosphäre — WS 2004 / 05, Imboden / Herfort / Kipfer — ETH — EAWAG

Spezialfall 1: Trägheitsströmung, 2

→ u(t) = A · sin(f · t), v(t) = A · cos(f · t)

$$|\vec{v}_H| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

→ Kreisbewegung als Funktion von f

1. Kreisbewegung mit konstanter v_H
   Nordhalbkugel: **rechts**herum (f > 0)
   Südhalbkugel: **links**herum (f < 0)

2. (Trägheits) Periode: $T_0 = 2\pi / f$
   → hängt nur Breite ab !

3. Radius der Trägheitsbewegung

$$R_0 = \frac{v_H}{2\pi} \cdot T_0 = \frac{v_H}{f}$$

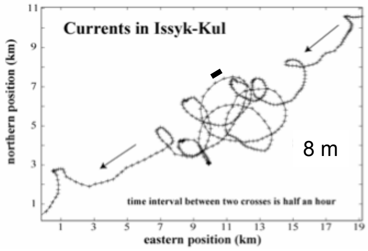
Beispiele: $f = 2\omega \cdot \sin\Theta$

45° N: $f \sim 10^{-4}\ s^{-1}$,	$T_0 \sim 17$ h
$v_H \sim 10$ cm/s	$R_0 \sim 1000$ m
Pol:	$T_0 \sim 12$ h

EPAS, Hydrosphäre — WS 2004 / 05, Imboden / Herfort / Kipfer — ETH — EAWAG

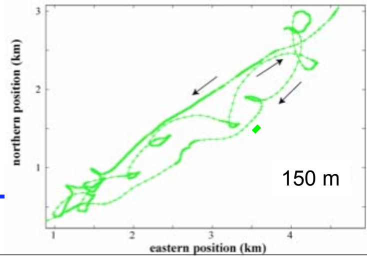
Spezialfall 1: Trägheitsströmung, 3

Rotierende Strömungen im Lake Issyk-Kul (42.5 ºN)
Gemessene Strömungen



'-': 30 Min.

Festellungen:
- $v_8 >> v_{150}$
- $T_8 = T_{150}$
- $T = 2\pi/f$
- → **17.8 h**



EAWAG

Spezialfall 2: Ekman: *Strömung / Transport*

ETH

Annahmen:
- **Stationär $\partial/\partial t = 0$**

Druck | **Coriolis** | **Reibung: 'Turbulenz'**

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} = \cancel{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}} + f \cdot v + \cancel{A_h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)} + A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}} = \cancel{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}} - f \cdot u + \cancel{A_h\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)} + A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

- **Keine Druck-gradienten**
- **Horizontal: reibungsfrei**

Energie Eintrag an der Oberfläche (Vertikale Turbulenz) ?

Wind !!!

Ekman Gleichungen

$$f \cdot u_S = +A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$f \cdot v_S = -A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Weitere Annahmen
- keine Ränder
- unendlich tiefer Ozean
- homogenes Wasser, horizontale Oberfläche
- gleichmässiger Wind
- A_z & f konstant

EAWAG

EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

Spezialfall 2: Ekman, 2: *Windkopplung*

Kinetische Energie?

- **WW**: **Oberflächenwasser ⇔ Wind**

Windschub (Scherspannung)

$$\vec{\tau} = \rho_L \cdot C_d \cdot \vec{V}_{Wind,10} \cdot \left|\vec{V}_{Wind,10}\right|$$

mit:
ρ_L: Dichte Luft [1 kg/m^3] C_d: Windschubkoeffizient [$\rho_L / \rho_W \sim 10^{-3}$]
V_{10}: Windgeschwindigkeit

Diffusiver Flux der Gewindigkeit ins Gewässer & Turbulenz

$$\frac{\tau_x}{\rho} = A_z \frac{\partial u}{\partial z} \rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_x}{\partial z} = A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\tau_y}{\rho} = A_z \frac{\partial v}{\partial z} \rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_y}{\partial z} = A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Im stationären Fall an der Wasseroberfläche

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{\vec{\tau}}{\rho \cdot A_z} = \frac{\rho_L}{\rho \cdot A_z} \cdot C_d \cdot \vec{V}_{Wind,10} \cdot \left|\vec{V}_{Wind,10}\right|$$

$\vec{v}$: Wassergeschwindigkeit an Oberfläche

EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

EAWAG

Spezialfall 2: Ekman, 3: *Lösung*

Ekman Gleichungen

$$f \cdot u_s = +A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$f \cdot v_s = -A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Lösungsweg:
2 x differenzieren nach z & einsetzen

$$f \cdot \frac{\partial^2 v_s}{\partial^2 z} = \boxed{\frac{f^2}{A_z} u_s = -A_z \frac{\partial^4 u_s}{\partial z^4}}$$

$$-f \cdot \frac{\partial^2 u_s}{\partial^2 z} = -\boxed{\frac{f^2}{A_z} v_s = +A_z \frac{\partial^4 v_s}{\partial z^4}}$$

Lösung:

$$u_s = \pm\left|\vec{v}_0\right| \cdot e^{-bz} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + bz\right) \qquad \left|\vec{v}_0\right| = \frac{\tau}{\rho \cdot \sqrt{|f| \cdot A_z}}$$

$$v_s = \left|\vec{v}_0\right| \cdot e^{-bz} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + bz\right) \qquad b = \sqrt{\frac{|f|}{2 \cdot A_z}}$$

EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

EAWAG

Spezialfall 2: Ekman, 4: *Lösung*

ETH

Lösung:

$$u_S = \pm\left|\vec{v}_0\right| \cdot e^{-bz} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + bz\right) \qquad \left|\vec{v}_0\right| = \frac{\tau}{\rho \cdot \sqrt{|f| \cdot A_z}}$$

$$v_S = \left|\vec{v}_0\right| \cdot e^{-bz} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + bz\right) \qquad b = \sqrt{\frac{|f|}{2 \cdot A_z}}$$

2. Oberflächen Strömungsgeschwindigkeit

$$\left|\vec{v}_0\right| = \frac{|\tau|}{\rho \cdot \sqrt{|f| \cdot A_z}} = C_d \frac{\left|\vec{V}_{wind,10}\right|^2}{\sqrt{|f| \cdot A_z}} \frac{\rho_L}{\rho}$$

Bemerkungen.

1. Strömungsrichtung an der Oberfläche ($v_0 = v_{wind}(z = 0)$)

NHK (**+**: $f > 0$)	SHK (**-**: $f < 0$)
$u = v_0 \cdot \cos(\mathbf{45}°)$	$u = -v_0 \cdot \cos(\mathbf{45}°)$
$v = v_0 \cdot \sin(\mathbf{45}°)$	$v = -v_0 \cdot \cos(\mathbf{45}°)$

→ ***45°*** **gegenüber Windrichtung !**

3. Eindringtiefe /Ekman Tiefe

- **Exponentielle Abnahme** v_{wasser} mit der Tiefe
  $v_{wasser} = v_0 \cdot e^{-bz}$, max. bei $z = 0$, mit $b = (|f|/(2 \cdot A_z))^{0.5}$
- **Spiralbewegung**
  Ekman Tiefe: $\vec{v}(z)$ entgegengesetzt zu $\vec{v}(0)$
  bei $b \cdot |z| = \pi$, $z = \pi \cdot (2 \cdot A_z/|f|)^{0.5}$
- $z \to \infty$, $v \to 0$

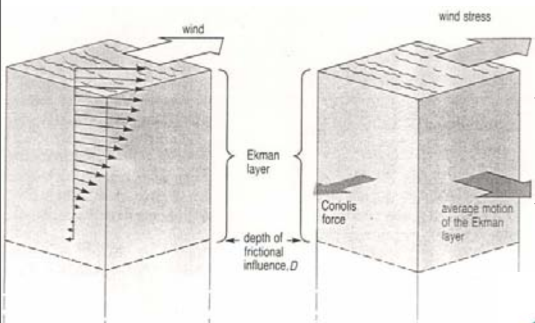
EPAS, Hydrosphäre

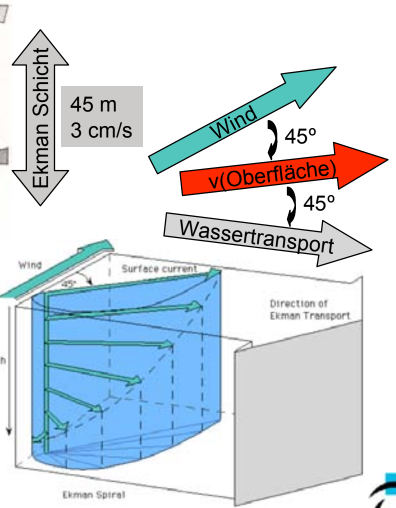
WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

EAWAG

Spezialfall 2: Ekman, 5: *Zusammenfassung*

ETH





Beispiel:

45° Breite N, $A_z \sim 10^{-2}$ m²/s
$V_{wind}/v_0 \sim 1$ %
$V_{wind} \sim 10$ m/s, $v_0 \sim 0.1$ m/s

$f \sim 10^{-4}$, Eindringtiefe ~ 45 m
$v_{ET} \sim 0.004$ m/s, $\bar{v} \sim v_0/\pi \sim 0.03$ m/s

Breite einer Windfront ~ 50 km
Massentransport ~ $70 \cdot 10^3$ m³/s

EPAS, Hydrosphäre

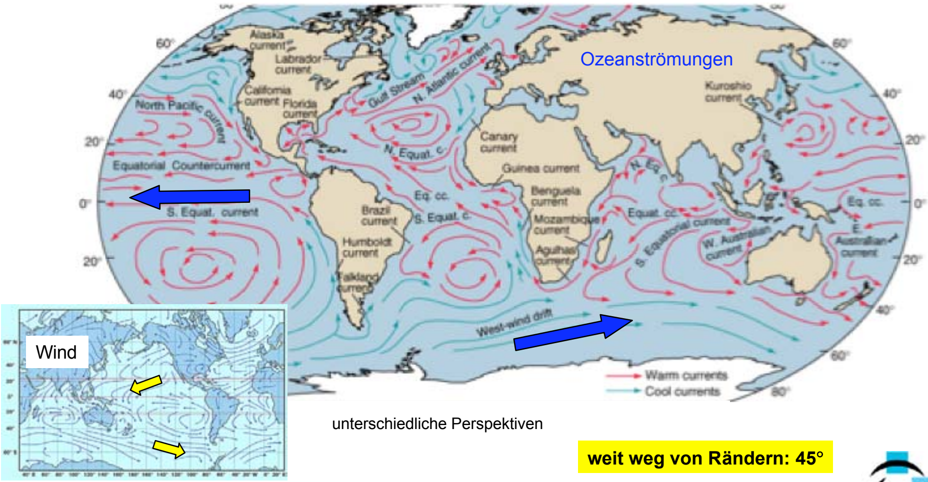
WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

EAWAG

Spezialfall 2: Ekman, 6: *Zusammenfassung Ozeanströmungen*

ETH

Oberflächenströmungen im Ozean

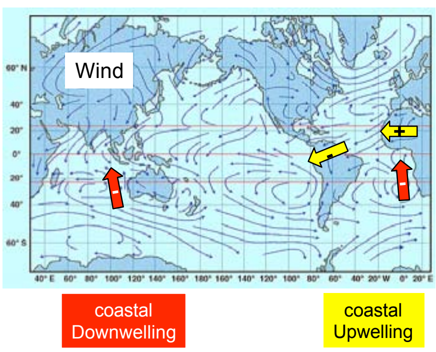


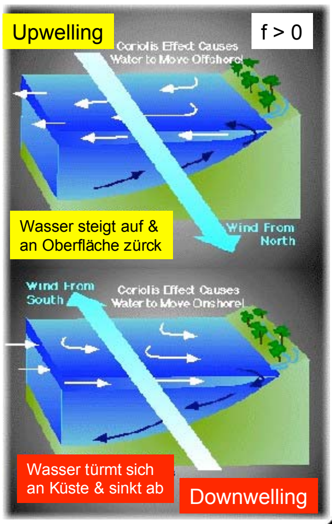
EPAS, Hydrosphäre — WS 2004 / 05 — Imboden / Herfort / Kipfer — EAWAG

Spezialfall 2: Ekman, 7: *Zusammenfassung 'Coastal Upwelling'*

ETH

'Up- & Down-Welling' an Küsten





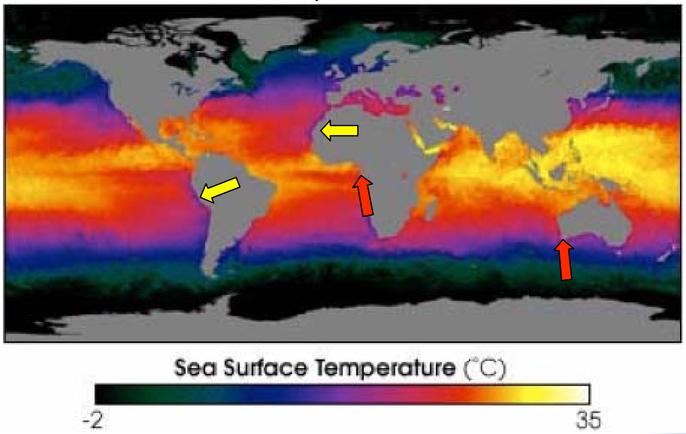
EPAS, Hydrosphäre — WS 2004 / 05 — Imboden / Herfort / Kipfer — EAWAG

Spezialfall 2: Ekman, 8: *Zusammenfassung 'Coastal Up & Downwelling'*

ETH

Upwelling: z.B. Südamerika, Nord-Westafrika **!!**

Downwelling: z.B. Australien, Zentral-Westafrika **??**



EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

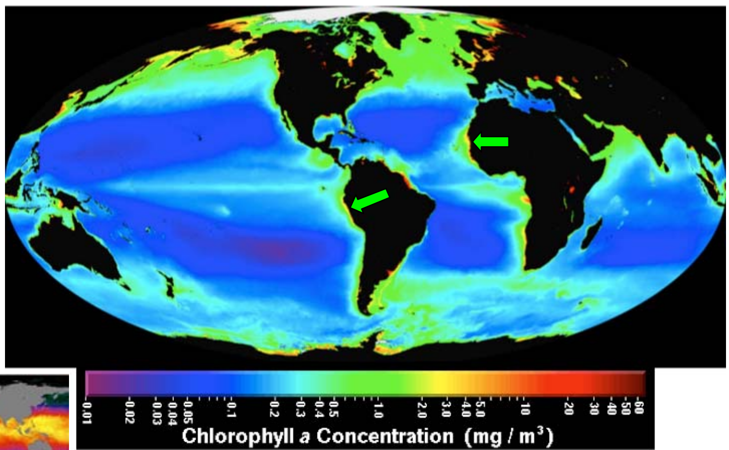
EAWAG

Spezialfall 2: Ekman, 9: *Zusammenfassung Primärproduktion an Küsten*

ETH

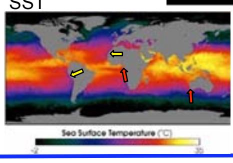
Coastal **Up**welling
& Chlorophyll

Nährstoffreiches Wasser steigt auf



http://seawifs.asfc.nasa.gov/SEAWIFS.html

SST



EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

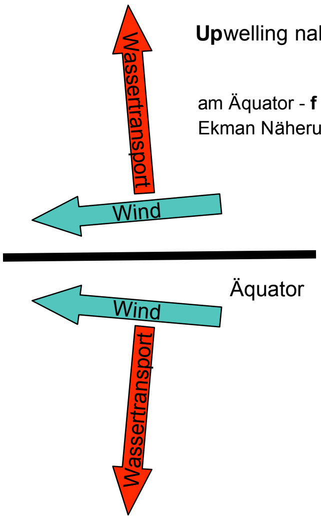
EAWAG

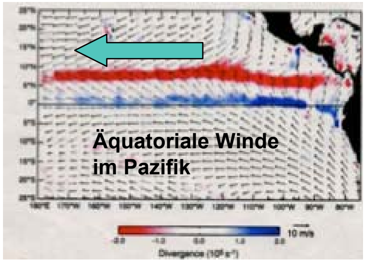
Spezialfall 2: Ekman, 10: *Zusammenfassung Äquatoriales Upwelling*

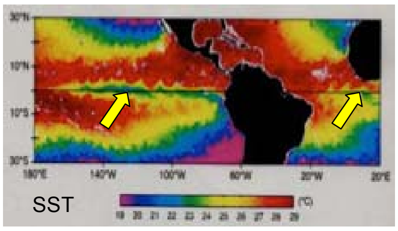
ETH

Upwelling nahe am Äquator

am Äquator - **f = 0** - gilt
Ekman Näherung **nicht**







Upwelling im äquatorialen Pazifik

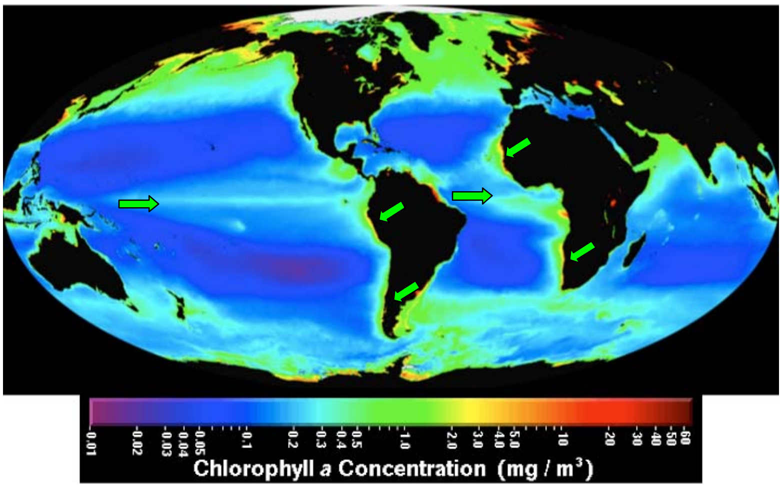
EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

EAWAG

Spezialfall 2: Ekman, 11: *Zusammenfassung Primärproduktion im Ozean*

ETH



http://seawifs.asfc.nasa.gov/SEAWIFS.html

EPAS, Hydrosphäre

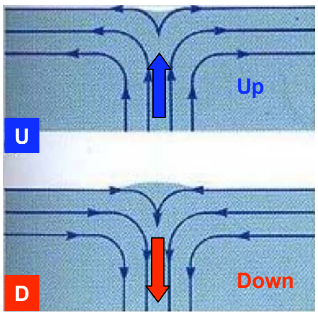
WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

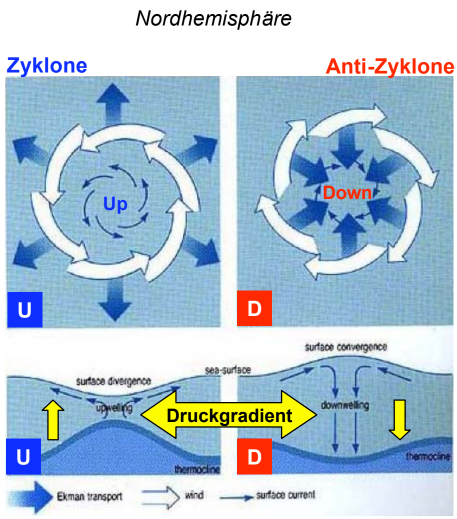
EAWAG

Spezialfall 2: Ekman, 11 *Ekman pumping*

Problem...

- **Strömung ⇔ Druckgradienten**
- **Ekman → Up oder Downwelling**



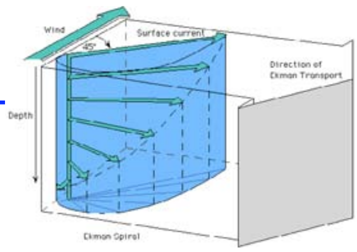


EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

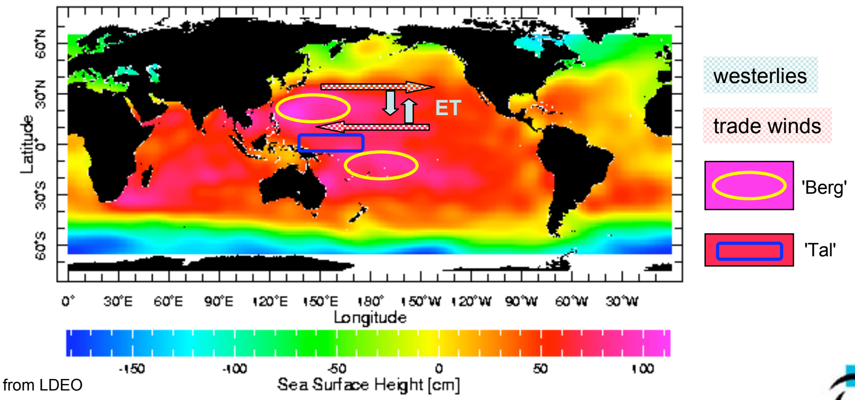
EAWAG

Wind & Meerspiegelhöhe



Der Wind...

- Ekman Transport verschiebt Oberflächenwasser
- erzeugt ein Wasserrelief von einigen dm



from LDEO

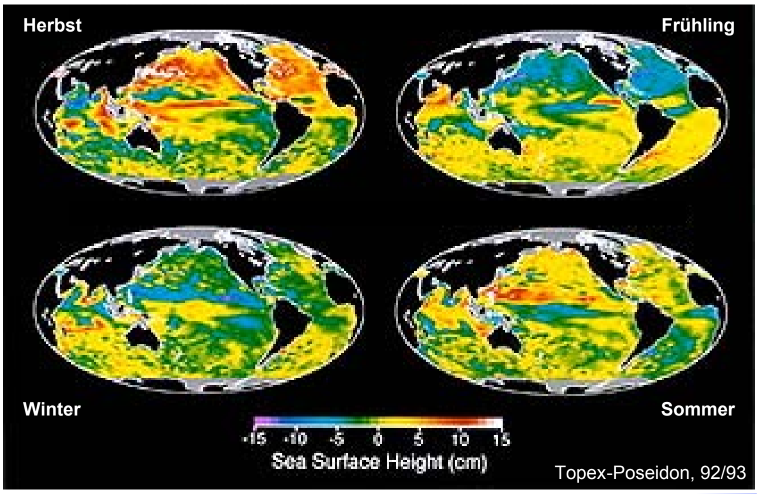
EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

EAWAG

Wind & Meerspiegelhöhe, 2

Meereshöhen im Verlauf der Jahreszeiten



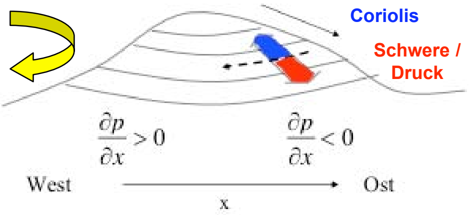
EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

Indirekte Windwirkung: *Geostrophe Strömung*

Der Wind wirkt auch 'indirekt'...

- Ekman Transport 'türmt' Wasser 'auf' oder 'schiebt' es 'weg'



- Erzeugt Druckgradienten im Ozean (See)
- Wie in Atmosphäre: Kräftegleichgewicht zwischen Druck- und Corioliskraft

→ Geostrophe Strömung

EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

Geostrophe Strömung

ETH

Druck | Coriolis | Reibung: 'Turbulenz'

Annahmen:
- **Stationär** $\partial/\partial t = 0$

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + f\cdot v + \cancel{A_h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$

$$\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - f\cdot u + \cancel{A_h\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}$$

- **Reibungsfrei**

Woher stammen die Druckgradienten?

Geostrophe Strömungsgleichung

$$u_g = -\frac{1}{f\cdot\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}\ ,\quad v_g = \frac{1}{f\cdot\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$p(x,y,z) = g\cdot\int_{\text{Tiefe } z}^{\text{OF } z=0} \rho\ (x,y,z')\cdot dz'$$

Allgemein gilt:
- Strömung immer $\perp$ Druckgradienten
- NH: Grosser Druck in Strömungsrichtung rechts
- SH: Grosser Druck in Strömungsrichtung links

NH: $f > 0$ nach rechts !!!
$p_{Ost} > p_{West}$: N-Strömung
$p_{Nord} > p_{Süd}$: W-Strömung

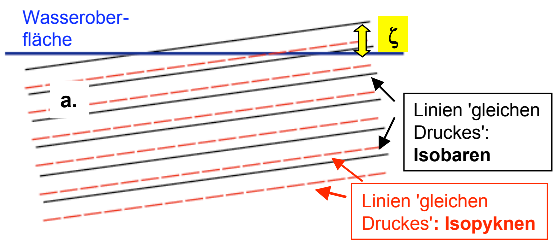
EPAS, Hydrosphäre | WS 2004 / 05 Imboden / Herfort / Kipfer | EAWAG

Geostrophe Strömung, 2: Druckgradienten

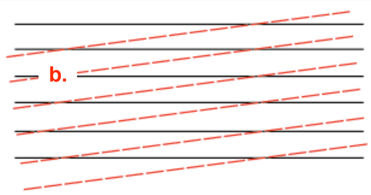
ETH

2 'Arten' Druckgradienten

a. **barotrop** (*'Wind'*)
- Auslenkung (ζ) an Oberfläche
- Isopyknen | | Isobaren



b. **baroklin** (*'Wassermassen'*)
- Horizontale Dichtegradienten
- Isopyknen **schneiden** Isobaren



- Ozean: barotrope & barokline Näherungen in Strömungsmodellen
- Seen: baroklin ('Seiching')

EPAS, Hydrosphäre | WS 2004 / 05 Imboden / Herfort / Kipfer | EAWAG

Geostrophe Strömung, 3: Druckgradienten

Geostrophe Strömungsgleichung

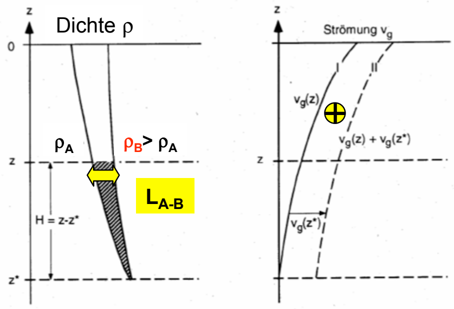
$$u_g = -\frac{1}{f\cdot\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} \quad , \quad v_g = \frac{1}{f\cdot\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}$$

Annahmen
- ρ variabel, aber keine Oberflächen-auslenkung
- Bei Ref.-Tiefe (z = -H) Druck konstant

$$p(x,y,z) = g\cdot\int_{z}^{0}\rho(x,y,z')\cdot dz'$$

$$= g\cdot\int_{-H}^{0}\rho\cdot dz' - g\cdot\int_{-H}^{z}\rho\cdot dz' = p(-H) - g\cdot\int_{-H}^{z}\rho\cdot dz'$$

$$\Delta p = p_B - p_A = -g\cdot\int_{-H}^{z}\left(\rho_B(z') - \rho_A(z')\right)\cdot dz'$$



Annahmen
- Profile in Ost-Westrichtung
- $\rho_B > \rho_A$ → Strömung nach Süden

$$v_g = -\frac{1}{f\cdot\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} \sim -\frac{g}{f\cdot\rho\cdot L_{A-B}}\cdot\int_{-H}^{z}\left(\rho_B(z') - \rho_A(z')\right)\cdot dz'$$

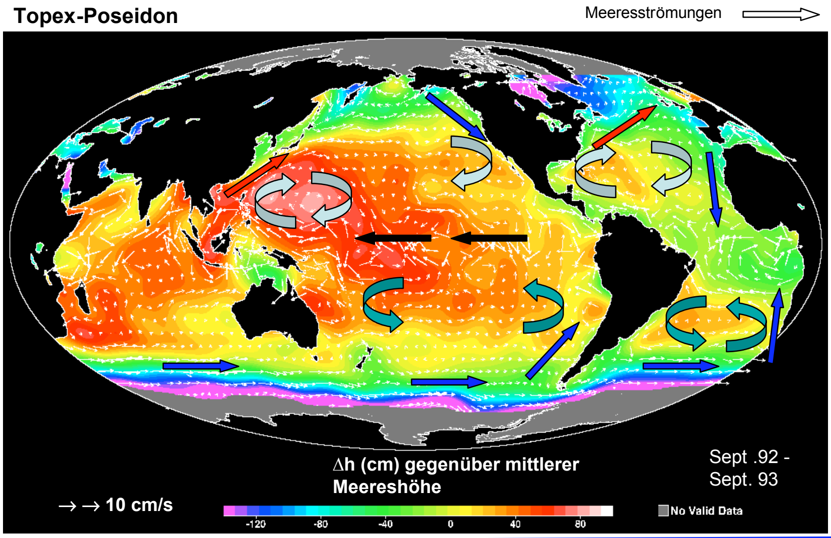
EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

EAWAG

Geostrophe Strömung, 4: Ozean-Becken weite Wirbel & Strömungen

Topex-Poseidon

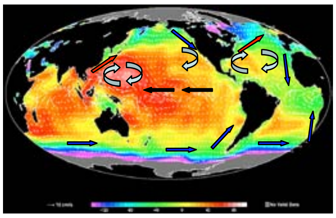


EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

EAWAG

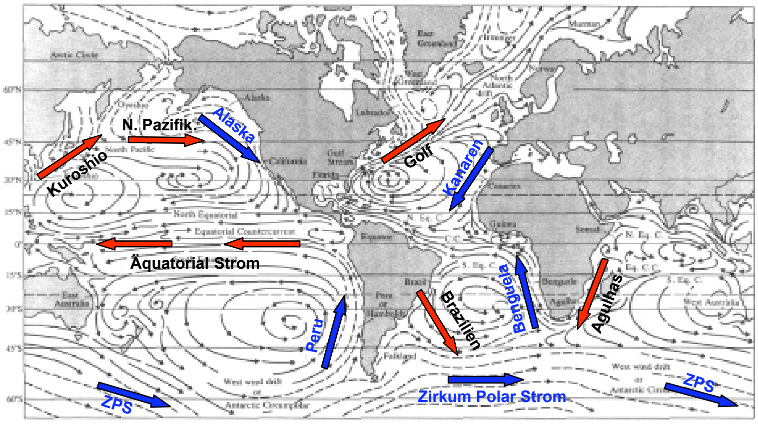
Geostrophe Strömung, 5: Ozean-Becken weite Wirbel & Strömungen



Meeresströmungen

warm

kalt



EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

EAWAG

Zusammenfassung, 1

Stationär	Druck	Coriolis	Reibung/ Wind	Typ
-	-	+	-	Inertialströmung
+	-	+	+	Ekman Strömung
+	+	+	-	Geostrophe Strömung
				Tiefenwasserbildung

Was fehlt?
→ **Dichteunterschiede:** Wasser- und Stoff-austausch & -transport in der **Vertikalen (z)**
→ Tiefenwasserbildung: **Nordatlantik & Weddelsee**

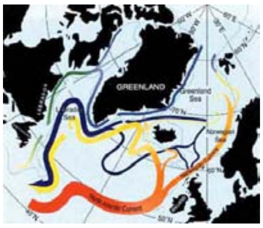
→ Conveyerbelt

EPAS, Hydrosphäre

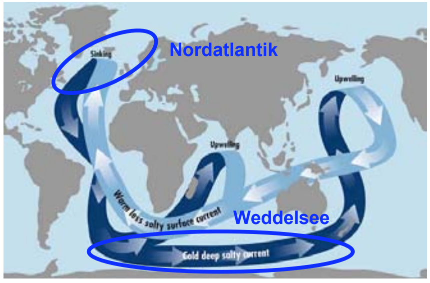
WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

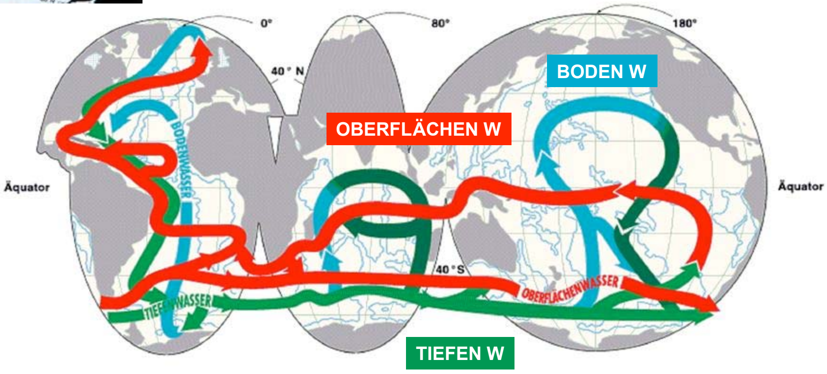
EAWAG

Zusammenfassung, 2
Globaler Conveyer Belt

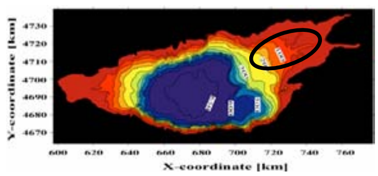


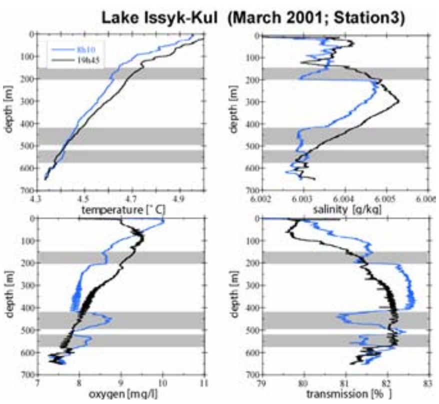
Warum Nordatlantik & Weedelsee ?
- **kalt & salzig**



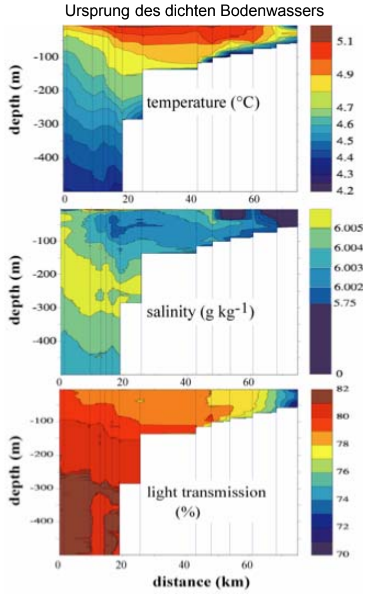


Zusammenfassung, 3
Lake Issyk-Kul



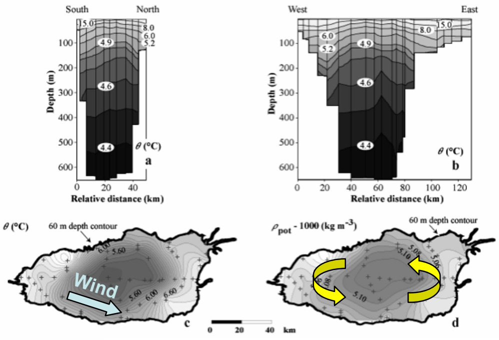


Ursprung des dichten Bodenwassers



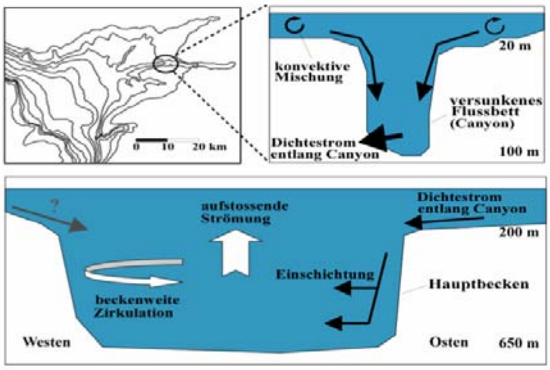
EAWAG

Zusammenfassung, 4
Lake Issyk-Kul



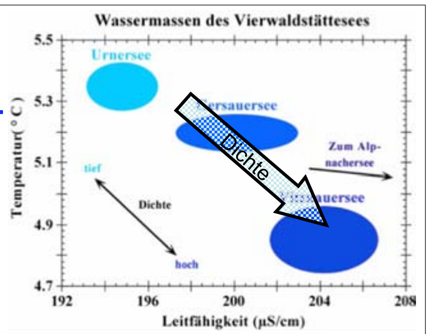
Upwelling im Zentrum

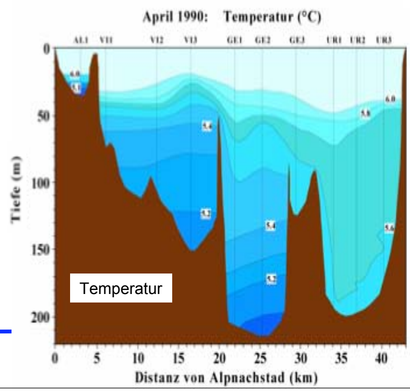
Konzept der Mischung

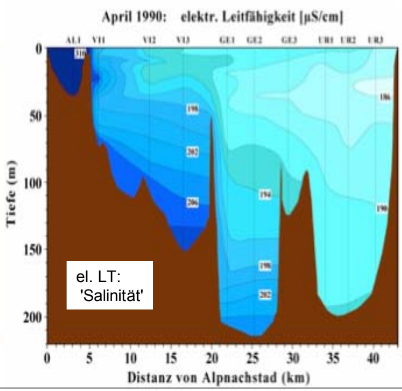


EAWAG

Zusammenfassung, 5 *VWS-See als helvetischer Ozean*

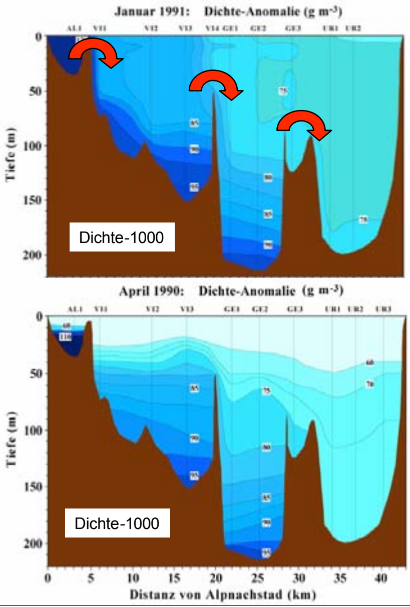


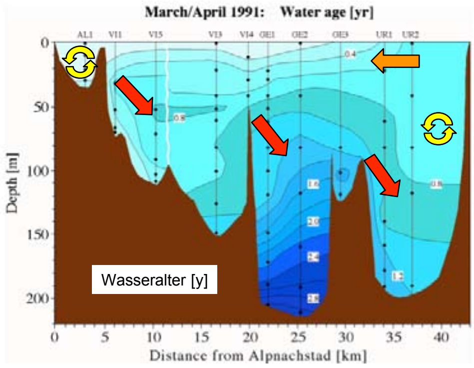




EAWAG

Zusammenfassung, 6 *Vierwaldstättersee als helvetischer Ozean*





WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

Wind und Turbulenz

Energieeintrag durch Wind

Wind erzeugt eine Schubspannung τ [N/m^2] an der Wasseroberfläche

$$\vec{\tau} = \rho_L \cdot C_d \cdot \vec{V}_{Wind,10} \cdot \left|\vec{V}_{Wind,10}\right|$$

mit
ρ_L: Dichte von Luft [kg/m^3],
C_d: Windschubkoeffizient [-]

Wind-Leistung p_{10} [W/m^2]

p_{10} = Kraft · Weg / Zeit
= $\rho_L \cdot C_d \cdot V^3_{Wind,10}$

Nur $\chi \sim 1$ - 2 % als kinetische - gerichtete - Energie ins Wassers: $\mathbf{p^W_{kin}}$ [W/m^2].
Rest direkt in Wärme umgewandelt.

$p^W_{kin} = \chi \cdot \rho_L \cdot C_d \cdot V^3_{Wind,10}$

Wind mischt → 'zerstört' Schichtung

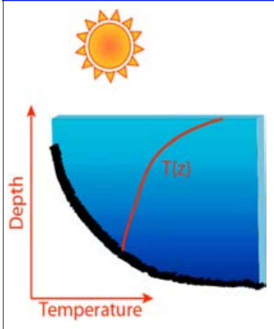
Woher kommt Schichtung?

- Wärmefluss an Oberfläche
- Allgemeiner: Auftriebsfluss J^0_B

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

Wind und Turbulenz, 2

Veränderung der potentiellen Energie



'+' Nettowärmefluss
→ Erwärmung der Oberflächenschicht
- Dichte nimmt ab
- Schichtdicke nimmt zu
- Schwerpunkt des Systems erhöht sich
- **Erhöht potentielle Energie**

Massenerhaltung.

$m/F = m' = h_{mix} \cdot \rho = \text{const.}$ [kg/m²]

$m' = h_{mix} \cdot \rho = h'_{mix} \cdot \rho' = (h_{mix} + \Delta h_{mix}) \cdot (\rho + \Delta\rho)$

$\Delta h_{mix} / h_{mix} = \Delta\rho / \rho$

Verschiebung des Schwerpunktes.

→ ΔE_{pot} wegen Δh_{mix}

$\Delta E_{pot} = g \cdot m' \cdot \Delta h_{mix} / 2 = -g / 2 \cdot h^2_{mix} \cdot \Delta\rho$

$$\frac{dE_{pot}}{dt} = -\frac{g}{2} \cdot h^2_{mix} \cdot \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{2} \cdot h_{mix} \cdot J^0_B \quad [\mathrm{W/m^2}]$$

mit:
J^0_B: Oberflächenauftriebsfluss [W/kg]

EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

EAWAG

Wind und Turbulenz, 3

Oberflächenauftriebsfluss J^0_B [W/kg]
Änderung von E_{pot} bezogen auf Masse der durchmischten Schicht

$$J^0_B = -\frac{2}{\rho \cdot h_{mix}} \frac{dE_{pot}}{dt} = \frac{g \cdot h_{mix}}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

Wärmezufuhr (-fluss **H**$_{tot}$) an Oberfläche

$$\frac{d\rho}{dt} = -\alpha \cdot \rho \frac{dT}{dt} = -\frac{\alpha}{c_p \cdot h_{mix}} H_{tot}$$

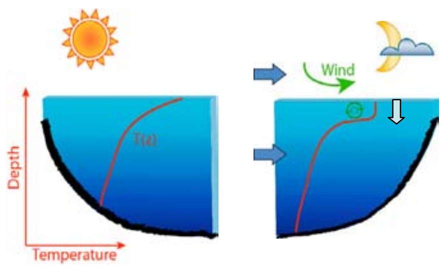
$$H_{tot} = \frac{c_p \cdot \rho}{h_{mix}} \frac{dT}{dt}$$

J^0_B wegen H_{tot} an Oberfläche

$$J^0_B = -\frac{\alpha \cdot g}{c_p \cdot \rho} H_{tot}$$

Veränderung von **E**$_{pot}$ **wegen H**$_{tot}$

$$\frac{dE_{pot}}{dt} = -\frac{\rho \cdot h_{mix}}{2} J^0_B = \frac{\alpha \cdot g}{2 \cdot c_p} \cdot h_{mix} \cdot H_{tot}$$



Ausbildung der durchmischten Oberflächschicht
- wegen **Wind**
- wegen **Konvektion**

EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

EAWAG

Wind und Turbulenz, 4: *Durchmischungstiefe & Energiebilanz*

ETH

Kann die Dicke der durchmischten Oberflächenschicht ('Epilimnion') durch Windwirkung vergrössert werden?
Vergleich von:
- **schichterhaltend:** **Eintrag E_{pot}**, z.B. wegen Wärmeeintrag
- **schichtzerstörend:** **Eintrag E_{kin}**, z.B. wegen Wind

Integrale Flux Richardson Zahl R_{fi}

$$R_{fi} = \frac{\frac{dEpot}{dt}}{p^W_{kin}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho\cdot h_{mix}\cdot J^0_B}{p^W_{kin}}$$

Monin-Obukhov Länge $\mathbf{L_M}$
- Tiefe bis zu der Wind durchmischen kann
- ~ 10% von p^W_{kin} (1‰ von p_{10}) werden zu E_{pot} umwandelt
- → R^0_{fi} ~ 0.1

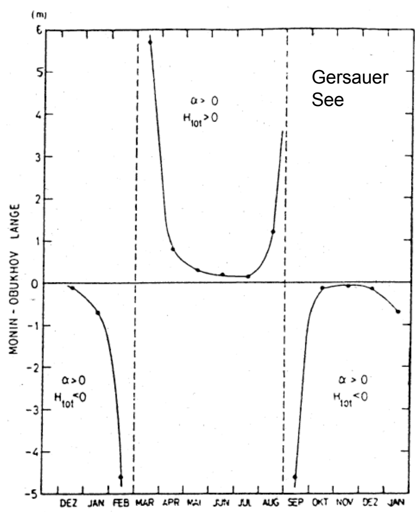
$$L_M = h^{crit}_{mix} = -R^0_{fi}\cdot\frac{2\cdot p^W_{kin}}{\rho\cdot J^0_B}$$

EPAS, Hydrosphäre — WS 2004 / 05 Imboden / Herfort / Kipfer — EAWAG

Wind und Turbulenz, 4: *Monin-Obukhov Länge L_M*

ETH

Jahreszeitliche Eintwicklung der Monin-Obukhov Länge L_M
(10 jähriges Mittel)

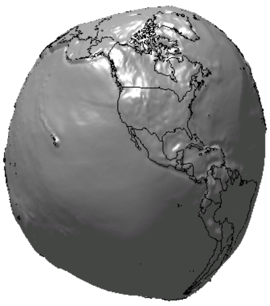


EPAS, Hydrosphäre — WS 2004 / 05 Imboden / Herfort / Kipfer — EAWAG

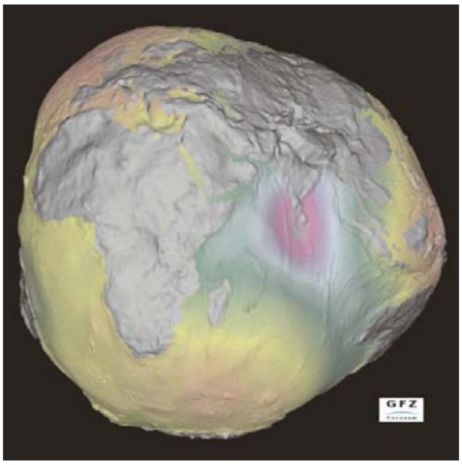
'Mittlere Meerhöhe': *Geoid*

Was ist die mittlere Meereshöhe?

→ Äquipotentialfläche von 'g'



Physikalisch Technische Bundesanstalt
Braunschweig, BRD



EPAS, Hydrosphäre

WS 2004 / 05
Imboden / Herfort / Kipfer

EAWAG