

UWIS, Mathematik 1, Lösung Serie 9

Thomas Kuster

20. Januar 2004

1

1.1

siehe Abbildung 1

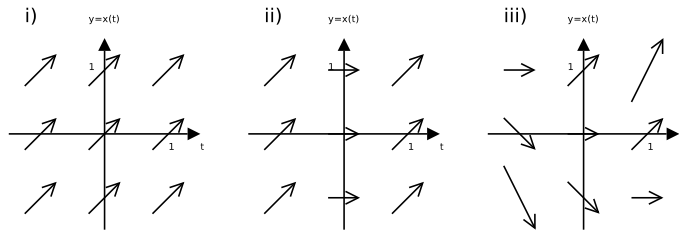


Abbildung 1: Richtungsfeld auf dem Einheitsgitter

1.2

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t) + t \\ x(t+h) &\approx x(t) + h \underbrace{(x(t) + t)}_{f(x,t)=x(t)}\end{aligned}$$

$h = \frac{2}{4}$, da 4 Schritte bis 2 und der Anfangswert von 0 bekannt ist.

$$\begin{aligned}t=0 \quad x\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 + \frac{1}{2}(0+0) = 0 \\ t=\frac{1}{2} \quad x(1) &= 0 + \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \\ t=1 \quad x\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{7}{8} \\ t=\frac{3}{2} \quad x(2) &= \frac{7}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{8} + \frac{3}{2}\right) = \frac{33}{16} = 2.1\end{aligned}$$

zum Vergleich die exakte Lösung:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t) + t \\ x_{hom}(t) &= ce^t \\ x_{par}(t) &= At + B \\ A &= At + B + t \\ 0 &= A + 1 \quad t^1 \\ A &= -1 \\ A &= B \quad t^0 \\ B &= -1 \\ x_{par}(t) &= -t - 1 \\ x_{hom}(t) + x_{par}(t) &= ce^t - t - 1 = x(t) \\ x(0) &= ce^0 - 0 - 1 = 0 \Rightarrow c = 1 \\ x(t) &= e^t - t - 1 \\ x(2) &= e^2 - 2 - 1 = 4.4\end{aligned}$$

2

2.1

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= -x(t) + t \\
 x_{hom}(t) &= ce^{-t} \\
 x_{par}(t) &= At + B \\
 A &= -At - B + t \\
 0 &= -A + 1 \quad t^1 \\
 A &= 1 \\
 A &= -B \quad t^0 \\
 B &= -1 \\
 x_{par}(t) &= t - 1 \\
 x_{hom}(t) + x_{par}(t) &= ce^{-t} + t - 1 = x(t)
 \end{aligned}$$

2.2

$$\begin{aligned}
 x(t) &= ce^{-t} + t - 1 \\
 x(0) &= x_0 \\
 x_0 &= ce^{-0} + 0 - 1 \\
 x_0 &= c - 1 \\
 c &= x_0 + 1 \\
 x(t) &= (x_0 + 1)e^{-t} + t - 1
 \end{aligned}$$

2.3

$$\begin{aligned}
 x_0 = x_0 & \quad x(t) = (x_0 + 1)e^{-t} + t - 1 \\
 x_0 = -1 & \quad x(t) = 0e^{-t} + t - 1 = t - 1 \\
 x_0 = 0 & \quad x(t) = e^{-t} + t - 1 \\
 x_0 = 1 & \quad x(t) = 2e^{-t} + t - 1 \\
 x_0 = -2 & \quad x(t) = -e^{-t} + t - 1
 \end{aligned}$$

2.4

Obwohl $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t}$ konvergieren würde divergiert die DGL bei allen AWP da $+t$ dazugezählt wird. Von der langsamsten zur schnellsten divergierenden für $t \rightarrow \infty$: $x_0 = -1$ (hier ist die DGL linear), $x_0 = 0$, $x_0 = -2$, $x_0 = 1$.

3

3.1

Annahme F ist immer grösser als 0 und kann nicht negativ sein.
Falls die Fischpopulation klein ist wird $\frac{x(t)}{1+x(t)} \approx 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(t)}{1+x(t)} = 0$$

Somit wird auch $F \frac{x(t)}{1+x(t)} \approx 0$ egal wie gross F ist.

Falls die Fischpopulation gross ist wird $\frac{x(t)}{1+x(t)}$ gegen 1 streben.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(t)}{1+x(t)} = 1$$

Somit hängt die Abnahme des Fischbestandes beinahe nur von F ab ($F \frac{x(t)}{1+x(t)}$ wird zu F).

3.2

3.3

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= x(t) \left(1 - \frac{1}{2}x(t) \right) - F \frac{x(t)}{1+x(t)} \\
 \dot{x}(t) &= 0 \left(1 - \frac{1}{2}0 \right) - F \frac{0}{1+0} \\
 \dot{x}(t) &= -F \frac{0}{1+0} = 0
 \end{aligned}$$

3.4