UWIS, Mathematik 1, Lösung Serie 9

Thomas Kuster

20. Januar 2004

1

1.1

siehe Abbildung 1

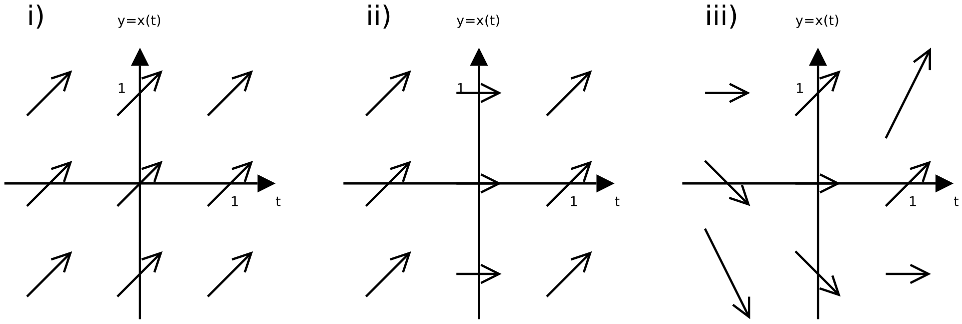

Abbildung 1: Richtungsfeld auf dem Einheitsgitter

1.2

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t) + t \\ x(t+h) &\approx x(t) + h\underbrace{(x(t)+t)}_{f(x,t)=\dot{x}(t)}\end{aligned}$$

$h = \frac{2}{4}$, da 4 Schritte bis 2 und der Anfangswert von 0 bekannt ist.

$$\begin{array}{ll}
t = 0 & x\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{1}{2}\left(0+0\right) = 0 \\
t = \frac{1}{2} & x\left(1\right) = 0 + \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \\
t = 1 & x\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{7}{8} \\
t = \frac{3}{2} & x\left(2\right) = \frac{7}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{8} + \frac{3}{2}\right) = \frac{33}{16} = 2.1
\end{array}$$

zum Vergleich die exakte Lösung:

$$\begin{array}{rcl}
\dot{x}(t) & = & x(t) + t \\
x_{hom}(t) & = & ce^t \\
x_{par}(t) & = & At + B \\
A & = & At + B + t \\
0 & = & A + 1 \qquad t^1 \\
A & = & -1 \\
A & = & B \qquad t^0 \\
B & = & -1 \\
x_{par}(t) & = & -t - 1 \\
x_{hom}(t) + x_{par}(t) & = & ce^t - t - 1 = x(t) \\
x(0) & = & ce^0 - 0 - 1 = 0 \Rightarrow c = 1 \\
x(t) & = & e^t - t - 1 \\
x(2) & = & e^2 - 2 - 1 = 4.4
\end{array}$$

2

2.1

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -x(t) + t \\
x_{hom}(t) &= ce^{-t} \\
x_{par}(t) &= At + B \\
A &= -At - B + t \\
0 &= -A + 1 \qquad t^1 \\
A &= 1 \\
A &= -B \qquad t^0 \\
B &= -1 \\
x_{par}(t) &= t - 1 \\
x_{hom}(t) + x_{par}(t) &= ce^{-t} + t - 1 = x(t)
\end{aligned}$$

2.2

$$\begin{aligned}
x(t) &= ce^{-t} + t - 1 \\
x(0) &= x_0 \\
x_0 &= ce^{-0} + 0 - 1 \\
x_0 &= c - 1 \\
c &= x_0 + 1 \\
x(t) &= (x_0 + 1)e^{-t} + t - 1
\end{aligned}$$

2.3

$$\begin{array}{rl}
x_0 = x_0 & \quad x(t) = (x_0+1)e^{-t} + t - 1 \\
x_0 = -1 & \quad x(t) = 0e^{-t} + t - 1 = t - 1 \\
x_0 = 0 & \quad x(t) = e^{-t} + t - 1 \\
x_0 = 1 & \quad x(t) = 2e^{-t} + t - 1 \\
x_0 = -2 & \quad x(t) = -e^{-t} + t - 1
\end{array}$$

2.4

Obwohl $\lim_{t\to\infty} e^{-t}$ konvergieren würde divergiert die DGL bei allen AWP da $+t$ dazugezählt wird. Von der langsamsten zur schnellsten divergierenden für $t \to \infty$: $x_0 = -1$ (hier ist die DGL linear), $x_0 = 0$, $x_0 = -2$, $x_0 = 1$.

3

3.1

Annahme F ist immer grösser als 0 und kann nicht negativ sein.

Falls die Fischpopulation klein ist wird $\frac{x(t)}{1+x(t)} \approx 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(t)}{1 + x(t)} = 0$$

Somit wird auch $F\frac{x(t)}{1+x(t)} \approx 0$ egal wie gross F ist.

Falls die Fischpopulation gross ist wird $\frac{x(t)}{1+x(t)}$ gegen 1 streben.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x(t)}{1 + x(t)} = 1$$

Somit hängt die Abnahme des Fischbestandes beinahe nur von F ab ($F\frac{x(t)}{1+x(t)}$ wird zu F).

3.2

3.3

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= x(t)\left(1 - \frac{1}{2}x(t)\right) - F\frac{x(t)}{1 + x(t)} \\
\dot{x}(t) &= 0\left(1 - \frac{1}{2}0\right) - F\frac{0}{1 + 0} \\
\dot{x}(t) &= -F\frac{0}{1 + 0} = 0
\end{aligned}$$

3.4