UMNW, Mathematik 1, Lösung Serie 8

Thomas Kuster

4. Januar 2004

1

$$\begin{aligned} x(t+h) &\approx x(t) - 0.03hx(t) \\ x(t) &= 100e^{-0.03t} \end{aligned}$$

1.1

$$\begin{aligned} x(t+h) &\approx x(t) - 0.03hx(t) \\ x(t+h) &\approx x(t)(1-0.03h) \\ x(t+2h) &\approx x(t+h)(1-0.03h) \\ x(t+2h) &\approx x(t)(1-0.03h)^2 \\ x(t+nh) &\approx x(t)(1-0.03h)^n \\ x(0+10\cdot 1) &\approx \underbrace{x(0)}_{100}(1-0.03\cdot 1)^{10} \\ x(10) &\approx 73.7424 \end{aligned}$$

1.2

$$\begin{aligned} x(t+nh) &\approx x(t)(1-0.03h)^n \\ x(0+600\cdot\frac{1}{60}) &\approx 100(1-0.03\cdot\frac{1}{60})^{600} \\ x(10) &\approx 74.0763 \end{aligned}$$

zum Vergleich das genau Resultat:

$$\begin{aligned} x(10) &= e^{-0.03\cdot 10} \\ x(10) &= 74.0818 \end{aligned}$$

Dies ergibt einen Fehler von $< 5‰$ für 1.1 bzw. von $< 0.08‰$ für 1.2.

1.3

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) - 0.03hx(t) + 0.05\cdot 12h \\ x(t+h) &= x(t)\underbrace{(1-0.03h)}_{a} + \underbrace{0.05\cdot 12h}_{b} \\ x(t+2h) &= x(t+h)a+b \\ x(t+2h) &= (x(t)a+b)\,a+b \\ x(t+3h) &= [(x(t)a+b)\,a+b]\,a+b \\ x(t+3h) &= x(t)a^3+a^2b+ab+b \\ x(t+nh) &= x(t)a^n + b\sum_{k=0}^{n-1}a^k \\ x(t+nh) &= x(t)a^n + b\frac{a^n-1}{a-1} \\ x(t+nh) &= x(t)(1-0.03h)^n + 0.05\cdot 12h\frac{(1-0.03h)^n-1}{(1-0.03h)-1} \end{aligned}$$

mit $h=1$, $n=10$ und $x(t=0)=100$:

$$x(10) = 78.99$$

mit $h=\frac{1}{60}$, $n=600$ und $x(t=0)=100$:

$$x(10) = 79.26$$

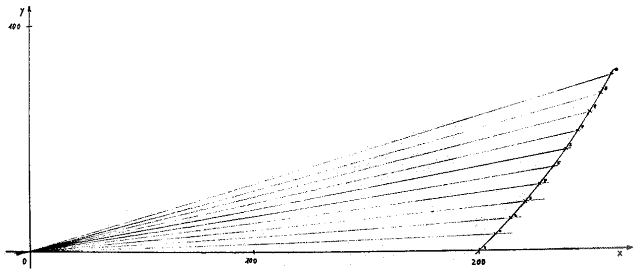
zum Vergleich das genau Resultat:

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) - 0.03hx(t) + 0.05\cdot 12h \\ \lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h} &= -0.03x(t) + 0.05\cdot 12 \\ \dot{x}(t) &= -0.03x(t) + 0.05\cdot 12 \\ x(t) &= c_1\cdot e^{-0.03\cdot t} + 0.05\cdot 12\cdot t + c_2 \quad c_1 = 100 \Rightarrow c_2 = 0 \\ x(10) &= 100\cdot e^{-0.03\cdot 10} + 0.05\cdot 12\cdot 10 \\ x(10) &= 80.08 \end{aligned}$$

Macht einen Fehler von: $< 1.4\%$ bzw. $< 1.1\%$.

2

2.1



2.2

Siehe serie8_maple.pdf
Beweis von:

```
pos[k+1]:=
 pos[k]+evalf((h/sqrt(2*(pos[k][1]^2+pos[k][2]^2)))*
  [pos[k][1]-pos[k][2],pos[k][1]+pos[k][2]);
```

verständlich geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \frac{h}{\sqrt{2\left(x_k^2 + y_k^2\right)}} \begin{pmatrix} x_k - y_k \\ x_k + y_k \end{pmatrix}$$

Variablenbezeichnung wie folgt: $\alpha = \frac{\pi}{4}$ konstante Auslenkung gegenüber der Verbindungsstrecke (Roboter Nullpunkt), β Winkel zwischen der Verbindungsstrecke und der x-Achse.

$$\begin{aligned}
\frac{x_{k+1} - x_k}{h} &= \cos(\alpha + \beta) \\
\frac{x_{k+1} - x_k}{h} &= \underbrace{\cos\alpha}_{\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}} \cos\beta - \underbrace{\sin\alpha}_{\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}} \sin\beta \\
x_{k+1} - x_k &= \frac{h}{\sqrt{2}} (\cos\beta - \sin\beta) \\
x_{k+1} &= x_k + \frac{h}{\sqrt{2}} (\cos\beta - \sin\beta)
\end{aligned}$$

ebenso für y:

$$\begin{aligned}
\frac{y_{k+1} - y_k}{h} &= \sin(\alpha + \beta) \\
\frac{y_{k+1} - y_k}{h} &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{\sqrt{2}} (\cos\beta + \sin\beta)
\end{aligned}$$

Da die Hypotenuse des Dreiecks $\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ ist folgt für β:

$$\begin{aligned}
\beta &= \arccos\left(\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}\right) \\
\beta &= \arcsin\left(\frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}\right)
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichungen für x_{n+1}:

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + \frac{h}{\sqrt{2}} \left(\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} - \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}\right) \\
x_{k+1} &= x_k + \frac{h(x_n - y_n)}{\sqrt{2(x_n^2 + y_n^2)}} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

ebenso für y_{n+1}:

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{\sqrt{2}} \left(\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} + \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}\right) \\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h(x_n + y_n)}{\sqrt{2(x_n^2 + y_n^2)}} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.3

Der Winkel der Bewegungsrichtung (γ) als Funktion der Zeit (t) ist gesucht, oder auch nicht?

Wenn ich den Winkel in Abhängigkeit der Zeit kenne, kenne ich aber immer noch nicht die Position des Roboters. Eigentlich möchte ich den Ortsvektor des Roboters als Funktion der Zeit berechnen können. Mein Ansatz (für den x-Wert die Funktion f und für den y-Wert die Funktion g):

$$\begin{aligned}
\underbrace{x_{k+1}}_{f(t+h)} &= \underbrace{x_k}_{f(t)} + \frac{h(x_n - y_n)}{\sqrt{2(x_n^2 + y_n^2)}} \\
\frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \frac{h(f(t) - g(t))}{\sqrt{2(f(t)^2 + g(t)^2)}} \quad \text{mit } \lim_{h \to 0} \\
\dot{f}(t) &= \frac{h(f(t) - g(t))}{\sqrt{2(f(t)^2 + g(t)^2)}}
\end{aligned}$$

für y_{k+1}:

$$\dot{g}(t) = \frac{h(f(t) + g(t))}{\sqrt{2(f(t)^2 + g(t)^2)}}$$

2.4

Jeder Schritt des Roboters entspricht einem Eulerschritt, der Roboterschritt entspricht dem h, um die Differentialgleichung zu erhalten wird $\lim_{h\to 0}$ berechnet (siehe 2.3).

Werte von 0 bis 200 sind uninteressant da der Roboter bei $x = 200$ startet. Da der Fehler grösser wird je mehr Schritte berechnet werden müssen und die Funktion steil ansteigt, würde der Graph bei x-Werten grösser 300 sehr wahrscheinlich in y-Richtung gestaucht, dadurch würde der Fehler weniger gut sichtbar.

2.5

Der Wert der DGL zur Zeit $t = 10$ wird mit der Euler-Methode berechnet. Mit 10 Schritten und einer Schrittweite von einer Minute bzw. mit 600 Schritten und einer Schrittweite von einer Sekunde. Um das Problem mit einer genügend grossen Genauigkeit für die Praxis zu lösen, reicht es sehr wahrscheinlich aus eine Schrittweite von einer Minute zu wählen und 60 mal weniger zu rechnen.

3

$$\begin{aligned}
t_0 &= \text{Beginn des Schneefalls (in h ab } 00^{00}) \\
S(t) &= \text{Schneehöhe zur Zeit } t \text{ in m (ohne zu Schaufeln)} \\
S_* &= \text{Schneefallmenge in } \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{h}} = \text{konstant} \\
A &= \text{Schaufelleistung in } \tfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}} = \text{konstant} \\
b &= \text{Breite des Trottoirs in m} = \text{konstant} \\
l &= \text{Trottoirlänge in m} = \text{konstant}
\end{aligned}$$

Wieviele m^3 muss ich von 9^{00} bis 11^{00} wegschaufeln. Geometrisch: schaufle einen Keil auf einem Quader weg. Das Volumen dieses Körpers ist gegeben durch die Breite b die Länge $2 \cdot l$ (schaffe zwei Blocks) und den beiden Höhen ($S(9)$ und $S(11)$):

$$\frac{S(9) + S(11)}{2} \cdot 2 \cdot l \cdot b \tag{1}$$

Wieviele m^3 sind es von 11^{00} bis 13^{00}. Die Länge ist nun $1 \cdot l$ (schaffe nur 1 Block):

$$\frac{S(11) + S(13)}{2} \cdot l \cdot b \tag{2}$$

(1) und (2) müssen gleich sein da meine Schaufelleistung konstant ist:

$$\begin{aligned}
\frac{S(9) + S(11)}{2} \cdot 2 \cdot l \cdot b &= \frac{S(11) + S(13)}{2} \cdot l \cdot b \\
(S(9) + S(11)) \cdot 2 &= S(11) + S(13) \\
2S(9) + S(11) - S(13) &= 0
\end{aligned}$$

Um 9^{00} hat es $9 - t_0$ Stunden geschneit $\Rightarrow S(t) = S_*(t - t_0)$ und somit:

$$\begin{aligned}
2(9 - t_0)S_* + (11 - t_0)S_* - (13 - t_0)S_* &= 0 \\
18 - 2t_0 + 11 - t_0 - 13 + t_0 &= 0 \\
16 - 2t_0 &= 0 \\
8 &= t_0
\end{aligned}$$

Also hat es um 8^{00} zu schneien angefangen.