UMNW, Mathematatik 1, Lösung Serie 7

Thomas Kuster

14. Dezember 2003

1

1.1

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Füllhöhe (in Meter) zur Zeit } t \text{ (in Minuten)} \\ x(0) &= 10 \\ x(120) &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t+\Delta t) &= x(t) + \alpha x(t)\Delta t \\ \frac{x(t+h)-x(t)}{\Delta t} &= \alpha x(t) \\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} &= \alpha x(t) \\ \dot{x}(t) &= \alpha x(t) \\ \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} &= \alpha \\ \ln x(t) &= \alpha t + c_1 \\ x(t) &= ce^{\alpha t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c\underbrace{e^{\alpha 0}}_{1} &= 10 \\ \Rightarrow c &= 10 \\ 10 \cdot e^{\alpha 120} &= 5 \\ e^{\alpha 120} &= \frac{1}{2} \\ \alpha 120 &= \ln \frac{1}{2} \\ \alpha &= \frac{\ln \frac{1}{2}}{120} \\ \alpha &= -\frac{\ln 2}{120} \end{aligned}$$

1.2

$$\begin{aligned} y(t) &= tb \\ y(0) &= 0 \\ y(200) &= 10 \\ 200b &= 10 \\ b &= \frac{1}{20} \end{aligned}$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \underbrace{\alpha x(t)\Delta t}_{\text{Ausfluss } V_2} + \underbrace{y(\Delta t)}_{\text{Einlauf } V_1}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \alpha x(t) + b \\ \frac{\dot{x}(t)}{\alpha x(t) + b} &= 1 \\ \frac{\alpha \dot{x}(t)}{\alpha x(t) + b} &= \alpha \\ \ln \alpha x(t) + b &= \alpha t + c_1 \\ \alpha x(t) + b &= c_2 e^{\alpha t} \\ x(t) &= ce^{\alpha t} - \frac{b}{\alpha} \end{aligned}$$

α ist aus 1 bekannt, b ist auch bekannt und mit der Anfangsbedingung $x(0) = 2$ kann c berechnet werden:

$$\begin{aligned} x(0) &= ce^{-\frac{\ln 2}{120}0} - \frac{\frac{1}{20}}{-\frac{\ln 2}{120}} = 2 \\ c &= 2 + \frac{\frac{1}{20}}{-\frac{\ln 2}{120}} \\ c &= 2 - \frac{6}{\ln 2} \end{aligned}$$

Gesucht ist die Füllhöhe nach 2 Stunden:

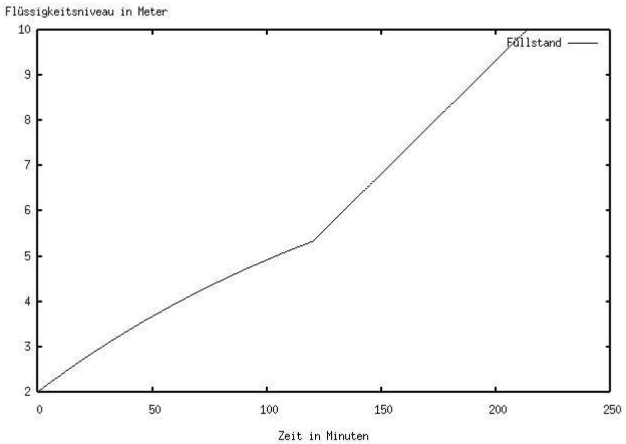
$$\begin{aligned} x(t) &= \left(2 - \frac{6}{\ln 2}\right) e^{-\frac{\ln 2}{120}t} + \frac{6}{\ln 2} \\ x(120) &= \left(2 - \frac{6}{\ln 2}\right) e^{-\frac{\ln 2}{120}120} + \frac{6}{\ln 2} \\ x(120) &= 1 + \frac{3}{\ln 2} \end{aligned}$$

Die noch zu füllende Höhe beträgt somit: $10 - \left(1 + \frac{3}{\ln 2}\right)$

$$
\begin{aligned}
y(t_f) &= 10 - \left(1 + \frac{3}{\ln 2}\right) \\
\frac{1}{20} t_f &= 9 - \frac{3}{\ln 2} \\
t_f &= 180 - \frac{60}{\ln 2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t^* &= 120 + 180 - \frac{60}{\ln 2} \\
t^* &= 300 - \frac{60}{\ln 2} \\
t^* &= 213.44 \\
t^* &= 3h\ 33'\ 26''
\end{aligned}
$$

1.3



Würden beide Ventile offen gelassen werden, würde sich ein Flüssigkeitsniveau von $\frac{6}{\ln 2} = 8.66$ Meter einstellen.

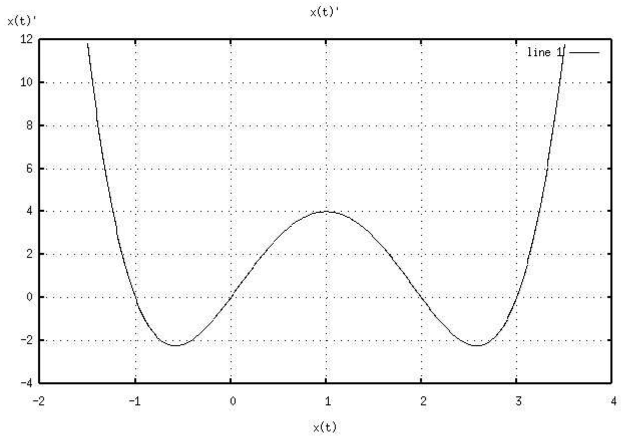
2

Zu Ordnung der Differtialgleichungen zu den Richtungsfeldern

h) $\dot{x} = tx^2 + t^2$	c) $\dot{x} = x - t$	f) $\dot{x} = -\frac{t}{x}$
i) $\dot{x} = \frac{x}{x-t}$	d) $\dot{x} = x$	b) $\dot{x} = t$
e) $\dot{x} = \frac{x}{t}$	g) $\dot{x} = \frac{x-2}{t-1}$	a) $\dot{x} = 2$

3

$$\dot{x}(t) = (x(t)+1)x(t)(x(t)-2)(x(t)-3) = 4x(t)^3 + 6x(t)^2 + 2x(t) + 6$$



3.1

Gesucht sind die Nullstellen von $\dot{x}(t)$, diese sind: $\{-1, 0, 2, 3\}$.

-1	stabil
0	instabil
2	stabil
3	instabil

3.2

?

3.3

Interval	konvergiert gegen
$(-\infty, -1)$	-1
$(-1, 0)$	-1
$(0, 2)$	2
$(2, 3)$	2
$(3, \infty)$	∞

3.4