UMNW, Mathematik 1, Lösung Serie 5

Thomas Kuster

8. Dezember 2003

1

siehe serie5_loesung_aufgabe1_maple.pdf

2

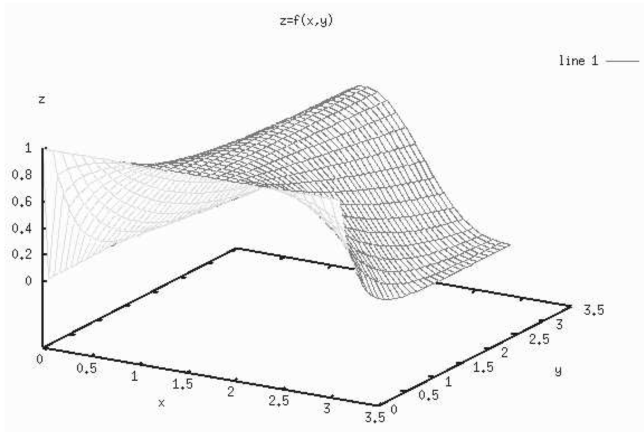
$$\begin{aligned}
\frac{\partial S(m,q)}{\partial q} &\stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\partial}{\partial q}\sum_{i=0}^{n}(mx_i+q-y_i)^2 &= 0 \\
\sum_{i=0}^{n}2(mx_i+q-y_i) &= 0 \\
m\sum_{i=0}^{n}x_i+nq-\sum_{i=0}^{n}y_i &= 0 \\
mn\bar{x}+nq-n\bar{y} &= 0 \\
m\bar{x}+q-\bar{y} &= 0 \\
q &= \bar{y}-m\bar{x} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S(m,q)}{\partial m} &\stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\partial}{\partial m}\sum_{i=0}^{n}(mx_i+q-y_i)^2 &= 0 \\
\sum_{i=0}^{n}2(mx_i+q-y_i)x_i &= 0 \\
2\sum_{i=0}^{n}(mx_i+\bar{y}-m\bar{x}-y_i)x_i &= 0 \\
\sum_{i=0}^{n}mx_i^2-m\bar{x}x_i+x_i\bar{y}-x_iy_i &= 0 \\
m\sum_{i=0}^{n}x_i^2-\bar{x}x_i+\sum_{i=0}^{n}x_i\bar{y}-x_iy_i &= 0 \\
m\sum_{i=0}^{n}x_i^2-\bar{x}x_i &= -\sum_{i=0}^{n}x_i\bar{y}-x_iy_i \\
m &= \frac{-\sum_{i=0}^{n}x_i\bar{y}-x_iy_i}{\sum_{i=0}^{n}x_i^2-\bar{x}x_i} \\
m &= \frac{\sum_{i=0}^{n}x_iy_i-x_i\bar{y}}{\sum_{i=0}^{n}x_i^2-\bar{x}x_i} \\
m &= \frac{\sum_{i=0}^{n}x_iy_i-\frac{x_iy_i}{n}}{\sum_{i=0}^{n}x_i^2-\frac{x_i^2}{n}} \\
m &= \frac{\sum_{i=0}^{n}nx_iy_i-x_iy_i}{\sum_{i=0}^{n}nx_i^2-x_i^2}
\end{aligned}$$

zu beweisen ist das $m = \frac{\sum_{i=0}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=0}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$ ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=0}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{(x_i-\bar{x})^2} &\stackrel{?}{=} \frac{\sum_{i=0}^{n} nx_iy_i - x_iy_i}{\sum_{i=0}^{n} nx_i^2 - x_i^2} \\
\frac{\sum_{i=0}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{(x_i-\bar{x})^2} &= m \\
\frac{\sum_{i=0}^{n} x_iy_i - x_i\bar{y} - \bar{x}y_i + \bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2} &= m \\
\frac{\sum_{i=0}^{n} x_iy_i - x_i\bar{y} - \bar{x}y_i + \bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2} &= m \\
\frac{\sum_{i=0}^{n} x_iy_i - \frac{2x_iy_i}{n} + \frac{x_iy_i}{n^2}}{\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \frac{2x_ix_i}{n} + \frac{x_i^2}{n^2}} &= m \\
\frac{n^2\sum_{i=0}^{n} n^2x_iy_i - 2nx_iy_i + x_iy_i}{n^2\sum_{i=0}^{n} n^2x_i^2 - 2nx_ix_i + x_i^2} &= m \\
\frac{\sum_{i=0}^{n}(n^2-2n+1)x_iy_i}{\sum_{i=0}^{n}(n^2-2n+1)x_i^2} &= m \\
\frac{\sum_{i=0}^{n}(n-1)^2x_iy_i}{\sum_{i=0}^{n}(n-1)^2x_i^2} &= m \\
\frac{(n-1)\sum_{i=0}^{n}(n-1)x_iy_i}{(n-1)\sum_{i=0}^{n}(n-1)x_i^2} &= m \\
\frac{\sum_{i=0}^{n} nx_iy_i - x_iy_i}{\sum_{i=0}^{n} nx_i^2 - x_i^2} &= \frac{\sum_{i=0}^{n} nx_iy_i - x_iy_i}{\sum_{i=0}^{n} nx_i^2 - x_i^2} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

3



$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= (\sin x)^y \\
f(x,y) &= e^{\ln((\sin x)^y)} \\
f(x,y) &= e^{y \ln \sin x}
\end{aligned}
$$

3.1 Definitionsbereich $\mathbb{D}$ für $f(x,y) \in \mathbb{R}$

Betrachte zuerst die Funktion $g(a,b) = a^b$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D} &\supset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \text{ da Wurzeln von Zahlen } < 0 \notin \mathbb{R} \\
\mathbb{D} &\supset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ falls } b < 0 \text{ gilt } \frac{1}{a}^{-b} \in \mathbb{Q}
\end{aligned}
$$

nun gilt $a = \sin x$ und $b = y$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D} &\supset 2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi \times \mathbb{R} \qquad k \in \mathbb{Z} \\
\mathbb{D} &\supset x = k2\pi - \frac{\pi}{2} \times \mathbb{Z} \qquad k \in \mathbb{Z} \\
\Rightarrow \mathbb{D} &= \{2k\pi < x < (2k+1)\pi | k \in \mathbb{Z}\} \times \mathbb{R} \qquad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

3.2 Partielle Ableitungen

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= y \sin x^{y-1} \cos x \\
\\
f_y(x,y) &= e^{y \ln \sin x} \ln \sin x \\
f_y(x,y) &= (\sin x)^y \ln \sin x \\
\\
f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} y(\sin x)^{y-1} \cos x \\
f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} y e^{(y-1)\ln \sin x} \cos x \\
f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} y e^{y \ln \sin x - \ln \sin x} \cos x \\
f_{xy}(x,y) &= e^{(y-1)\ln \sin x} \cos x + y \left(e^{(y-1)\ln \sin x} \ln(\sin x) \cos x + 0 \right) \\
f_{xy}(x,y) &= (\sin x)^{y-1} \cos x + y(\sin x)^{y-1} \ln(\sin x) \cos x \\
\\
f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} (\sin x)^y \ln \sin x \\
f_{yx}(x,y) &= y(\sin x)^{y-1} \cos x \ln \sin x + (\sin x)^y \frac{1}{\sin x} \cos x \\
\Rightarrow f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y)
\end{aligned}$$

3.3 Punkt $(x,y) = (\frac{\pi}{6}, 2)$

$$\begin{aligned}
f_{xy} = f_{yx} &= (\sin x)^{y-1} \cos x + y(\sin x)^{y-1} \ln(\sin x) \cos x \\
f_{xy} = f_{yx} &= (\sin \frac{\pi}{6})^{2-1} \cos \frac{\pi}{6} + 2(\sin \frac{\pi}{6})^{2-1} \ln(\sin \frac{\pi}{6}) \cos \frac{\pi}{6} \\
f_{xy} = f_{yx} &= \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} + 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} \ln(\sin \frac{\pi}{6}) \\
f_{xy} = f_{yx} &= \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} (1 + 2 \ln(\sin \frac{\pi}{6})) \\
f_{xy} = f_{yx} &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + 2 \ln \frac{1}{2}) \\
f_{xy} = f_{yx} &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \ln 2
\end{aligned}$$

4

x_A ist die Funktion von Anna (gepunktet) und x_B die Funktion von Beat (ausgezogen). Die Funktionen sind symetrisch mit der Symetrieachse $t = 5$.

Bei der Funktion von Beat handelt es sich um zwei Geraden mit Steigungen 10 bzw. -10. Ich nehme an, dass die Funktion von Anna eine Parabel ist $\Rightarrow at^2 + bt + c = y$ mit folgenden gegebenen Werten: $x_A(0) = 0$, $x_A(5) = 50$ und $x_A(10) = 0 \Rightarrow x_A(t) = -2t^2 + 20t$.

4.1

$x_A(10) = x_B(10)\checkmark \Rightarrow$ beide sind gleichschnell.

4.2

$$\begin{aligned}
\max|x_A(t) - x_B(t)| &\Rightarrow \dot{x}_A(t) - \dot{x}_B(t) = 0 \Rightarrow \\
\dot{x}_A(t) &= \dot{x}_B(t) \\
-4t + 20 &= 10 \\
t &= \frac{5}{2} \Rightarrow \text{ zum Zeitpunkt } t = \frac{5}{2} \text{ und } t = 5 + \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

4.3

$$\begin{aligned}
|\dot{x}_A(t)| &= |-4t + 20| \text{ mit } t = \{2, 7\} \Rightarrow \{12, 8\} \\
|\dot{x}_B(t)| &= |\pm 10| \text{ mit } t = \{2, 7\} \Rightarrow \{10, 10\}
\end{aligned}$$

4.4

$|\dot{x}_B(t)| < |\dot{x}_A(t)| \Rightarrow 0 \leqslant t < \frac{5}{2}$ und $10 - \frac{5}{2} < t \leqslant 10$