UMNW, Mathematik 1, Lösung Serie 2

Thomas Kuster

11. November 2003

1

siehe serie2_loesung_aufgabe1_maple.pdf

2

$$\begin{aligned}
B(0) &= 5000 \text{ Schulden zum Zeitpunkt } t = 0 \\
R &= 870 \text{ monatliche Rate} \\
n &= 6 \text{ Anzahl Monate} \\
q &= \text{monatlicher Zins}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(0) &= 5000 \\
B(1) &= 5000q - R \\
B(1) &= B(0)q - R \\
B(2) &= (B(0)q - R)\, q - R \\
&\vdots \\
B(n) &= B(0)q^n - R\sum_{k=0}^{n-1} q^k \\
B(n) &= B(0)q^n - R\frac{q^n - 1}{q - 1} \\
B(n) &\stackrel{!}{=} 0 \\
0 &= B(0)q^n - R\frac{q^n - 1}{q - 1}
\end{aligned}$$

Lösen mit Maple


```
> B:= 0 = B_0*q^n-R*(q^n-1)/(q-1);
                                                  n
                                           n   R (q  - 1)
                         B := 0 = B_0 q  - ----------
                                                 q - 1

> B_0 := 5000;
                                  B_0 := 5000

> R := 870;
                                   R := 870

> n := 6;
                                    n := 6

> q := fsolve(B,q);
                               q := 1.012443209

> q^12;
                                  1.159973480

> (q-1)*100; # in %
                                   1.2443209

> (q^12-1)*100; # Jahreszins in %
                                  15.9973480
```

3

$$\begin{aligned}
x(0) &= 100kg \text{ Salz im Tank zum Zeitpunkt } t = 0 \\
A &= 12l \text{ Ausflussmenge pro } t \\
T &= 400l \text{ Tankinhalt} \\
\Delta t &= \text{ kleiner Zeitabschnitt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(0+\Delta t) &= x(0) - \frac{A\Delta t}{T}x(0) \\
x(t+\Delta t) &= x(t) - \frac{A\Delta t}{T}x(t) \\
x(t+\Delta t) - x(t) &= -\tfrac{A\Delta t}{T}x(t) \\
\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} &= -\tfrac{A}{T}x(t) \\
\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} &= -\tfrac{A}{T}x(t) \\
\dot{x}(t) &= -\frac{A}{T}x(t)
\end{aligned}$$

Ansatz e^{t+c}

$$\begin{aligned}
\underbrace{-\frac{A}{T}e^{-\frac{A}{T}t+c}}_{\dot{x}(t)} &= -\frac{A}{T}\underbrace{e^{-\frac{A}{T}t+c}}_{x(t)} \\
x(t) &= e^{-\frac{A}{T}t+c} \\
x(t) &= e^{c}e^{-\frac{A}{T}t}
\end{aligned}$$

Anfangsbedingung

$$\begin{aligned}
\underbrace{x(0)}_{100} &= e^{c}\underbrace{e^{-\frac{A}{T}0}}_{1} \\
x(t) &= 100\cdot e^{-\frac{A}{T}t}
\end{aligned}$$