2.2 Kräfte

Dichte

83

$\rho = \dfrac{3M}{4\pi R^3}$; 1244 kg/m^3

84

a) $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m}{\pi \dfrac{d^2}{4} d} = \dfrac{4m}{\pi d^3}$; $21 \cdot 10^3$ kg/m^3

b) $d = \sqrt[3]{\dfrac{4m}{\pi \rho_{\text{Stahl}}}}$; 54 mm

85

$m = m_E + m_W + m_{Ö} = \rho_E V_E + \rho_W V_W + \rho_{Ö} V_{Ö}$; 0.43 kg

86

Es gilt $V = V_G + V_B = \dfrac{m_G}{\rho_G} + \dfrac{m_B}{\rho_B} = \dfrac{m_G}{\rho_G} + \dfrac{m - m_G}{\rho_B}$

und damit $m_G = \dfrac{\rho_G(\rho_B V - m)}{\rho_B - \rho_G}$; 242 g

87

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_G + V_K + V_S} = \frac{m}{\dfrac{m_G}{\rho_G} + \dfrac{m_K}{\rho_K} + \dfrac{m_S}{\rho_S}} = \frac{m}{\dfrac{0.75m}{\rho_G} + \dfrac{0.2m}{\rho_K} + \dfrac{0.05m}{\rho_S}} = \frac{1}{\dfrac{0.75}{\rho_G} + \dfrac{0.2}{\rho_K} + \dfrac{0.05}{\rho_S}};$$

$15.1 \cdot 10^3$ kg/m^3

88

Da $\rho = \dfrac{m}{v} = \dfrac{m_{\mathrm{N_2}} + m_{\mathrm{O_2}} + m_{\mathrm{Ar}}}{V} = \dfrac{\rho_{\mathrm{N_2}} V_{\mathrm{N_2}} + \rho_{\mathrm{O_2}} V_{\mathrm{O_2}} + \rho_{\mathrm{Ar}} V_{\mathrm{Ar}}}{V} = \dfrac{\rho_{\mathrm{N_2}} x\, V + \rho_{\mathrm{O_2}} y\, V + \rho_{\mathrm{Ar}} kV}{V}$,

wobei k das Volumenprozent von Argon, x von Stickstoff und y von Sauerstoff sind, folgt:

$\rho = x\, \rho_{\mathrm{N_2}} + y\, \rho_{\mathrm{O_2}} + k \rho_{\mathrm{Ar}}$ wobei $x + y + k = 1 \Rightarrow x = 78\%$ und $y = 21\%$

89

a) Die gesamte Masse soll mit den angegebenen Daten ausgerechnet werden.
Der Radius des Kernes r_K beträgt 6371 km – 2900 km = 3471 km.

Volumen der Kruste: $V_{\text{Kruste}} = \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - (R-d)^3\right);\ 1.02 \cdot 10^{19}\ \text{m}^3$

Volumen des Mantels: $V_{\text{Mantel}} = \frac{4}{3}\pi\left((R-d)^3 - r_K^3\right);\ 8.98 \cdot 10^{20}\ \text{m}^3$

Volumen des Kerns: $V_{\text{Kern}} = \frac{4}{3}\pi r_K^3;\ 1.75 \cdot 10^{20}\ \text{m}^3$

Mit den angegebenen mittleren Dichten lassen sich die verschiedenen Massen, dann die Gesamtmasse und die mittlere Dichte der Erde ausrechnen.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho_{\text{Kruste}}V_{\text{Kruste}} + \rho_{\text{Mantel}}V_{\text{Mantel}} + \rho_{\text{Kern}}V_{\text{Kern}}}{\frac{4}{3}\pi R^3};\ 5.5 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$$

b) $\rho \approx \rho_{\text{Mantel}} + \left(\rho_{\text{Kern}} - \rho_{\text{Mantel}}\right)\left(\frac{r_K}{R}\right)^3$

90

Die Flächendichte des Papiers ist $\sigma = \frac{m}{A}$.

Die Bedingung ist erfüllt bei $V\rho_{\text{Luft}} = 10 \cdot A\sigma$ oder $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{Luft}} = 40\pi r^2 \sigma$

$r = \frac{30m}{A\rho_{\text{Luft}}}$; 48 cm

91

Bei gleichem Volumen V gilt:

$$\bar{\rho}_V = \frac{m_1 + m_2}{2V} = \frac{V\rho_1 + V\rho_2}{2V} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\quad\text{(arithmetisches Mittel)}$$

Bei gleicher Masse m gilt:

$$\bar{\rho}_m = \frac{2m}{V_1 + V_2} = \frac{2m}{\frac{m}{\rho_1} + \frac{m}{\rho_2}} = \frac{2}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}} = \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\quad\text{(harmonisches Mittel)}$$

Es ist $\bar{\rho}_m \le \bar{\rho}_V$, was zu sehen ist, wenn die beiden Brüche gleichnamig gemacht und die Zähler verglichen werden: $(\rho_1 + \rho_2)^2 \ge 4\rho_1\rho_2 = (\rho_1 + \rho_2)^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2$

Die Gleichheit $\bar{\rho}_m = \bar{\rho}_V$ tritt offensichtlich nur ein, wenn auch $\rho_1 = \rho_2$ ist.

92

Das Volumen des verdrängten Wassers ist: $V = V_L + V_E$ (1)

Die Masse des Eiswürfels ist: $m = m_L + m_E$ (2)

Das Volumen der enthaltenen Luft lässt sich mit der Dichte von Eis und Luft ausrechnen.

Mit $\rho_E = \dfrac{m_E}{V_E}$ folgt aus (1) $V_L = V - \dfrac{m_E}{\rho_E}$.

Mit Vernachlässigung der Masse der eingeschlossenen Luft ist $m_E = m$.

Somit ist $V_L = V - \dfrac{m}{\rho_E}$; 0.83 cm³ (Mit 24.0 g und 27.0 cm³: 0.828 cm³)

Ohne Vernachlässigung der eingeschlossenen Luft ist mit (2) $V_L = V - \dfrac{m - m_L}{\rho_E}$.

Mit $\rho_L = \dfrac{m_L}{V_L}$ folgt $V_L = V - \dfrac{m - \rho_L V_L}{\rho_E}$. Auflösen nach V_L

$\Rightarrow V_L = \dfrac{\rho_E V - m}{\rho_E - \rho_L}$; 0.83 cm³ (Mit 24.0 g und 27.0 cm³: 0.829 cm³)

Gewichtskraft

93

Am Äquator haben Sie die um 0.306% kleinere Gewichtskraft. Am Nordpol ist Ihre Gwichtskraft um 0.204% grösser.

94

$g_{\text{Mars}} = \dfrac{F}{m}$; 3.73 N/kg oder 3.73 m/s²

95

a) $F_{G,\text{Mond}} = m g_{\text{Mond}}$; 180 N

Ja, die Gewichtskraft entspricht einer Masse von etwa 18 kg auf der Erde.

b) $F_{G,\text{Erde}} = m g_{\text{Erde}}$; 1.09 kN

96

Sie wägen einen geeichten Gewichtstein der Masse 300.000 g mit der Waage im Keller. Dabei stellen Sie die Waage so ein, dass sie tatsächlich die gewünschten 300.000 g anzeigt.

Die Gewichtskraft des Gewichtsteins im Keller ist somit $F_{G,K} = m g_K$; 2.941944 N

In 10 Meter Höhe beträgt sie nur noch $F_{G,H} = m g_H$; 2.941935 N

Die im Keller geeichte Präzisionswaage zeigt nun für den Gewichtsstein folgende Masse an:

$$m^* = \frac{F_{G,H}}{g_K} = m\frac{g_H}{g_K}; \quad 299.999 \text{ g}$$

Der Unterschied kann zwar knapp gemessen werden, liegt aber an der Grenze des Fehlerintervalls.

Federkraft

97

Weil die Längenänderung über einen bestimmten Bereich direkt proportional zur Kraft ist und dadurch eine lineare Skala möglich ist.

98

a) Aus der angegeben Masse liesse sich die Zugkraft berechnen. Jedoch bliebe die Längenausdehnung der Feder unbekannt. Diese müsste der Hersteller auch angeben.
b) Es müsste die Längenausdehnung bei vorgegebener Zugkraft gemessen werden.

99

Da beide Puffer gleich stark zusammengedrückt werden, erfahren beide Puffer die halbe Stosskraft. Sie werden zusammengedrückt um:

$$y = \frac{F}{2D}; \quad 7.0 \text{ cm}$$

100

a) Das Trampolintuch muss sich proportional zur einwirkenden Kraft senken.
b) $D = \frac{F_G}{y} = \frac{mg}{y}; \quad 4.4 \text{ kN/m}$
c) $m = \frac{Dy}{g}; \quad 54 \text{ kg}$

101

Die Zusatzlast sei auf alle Räder gleich verteilt. Daher wird jede Feder zusätzlich zusammengedrückt um:

$$F = \frac{mg}{4}; \quad 638 \text{ N}$$

Die Federkonstante eines Stossdämpfers ist demnach mindestens:

$$D = \frac{F}{y}; \quad 13 \text{ kN/m}$$

102

Es gilt: $\frac{1}{D}=\frac{1}{D_g}+\frac{1}{D_g}+\frac{1}{D_g}+\frac{1}{D_u}=\frac{3}{D_g}+\frac{1}{D_u}=\frac{3D_u+D_g}{D_uD_g}$

Also: $D=\frac{D_uD_g}{3D_u+D_g}$

103

Die Federkonstante der dünnen Seile beträgt: $D_1=\frac{F_F}{y_1}$; 238 N/m

Die Federkonstante des dicken Seiles beträgt: $D_2=\frac{F_F}{y_2}$; 400 N/m

Die Federkonstante der beiden dünnen Seile zusammen ist: $D_{//}=2D_1$

Für das 200 m lange Seil ist: $\frac{1}{D}=\frac{1}{2D_1}+\frac{1}{D_2}$

Die gesamte Verlängerung ist also: $y=\frac{F_G}{D}=mg\left(\frac{1}{2D_1}+\frac{1}{D_2}\right)$; 2.9 m

104

Die Formel für zwei aneinander hängende Federn lautet: $D=\frac{D_1D_2}{D_1+D_2}$

Wenn beide Federn gleich sind, wird die gesamte Federkonstante halbiert.
Somit ist die Federkonstante der Teilfeder doppelt so gross wie die Federkonstante der ursprünglichen Feder.

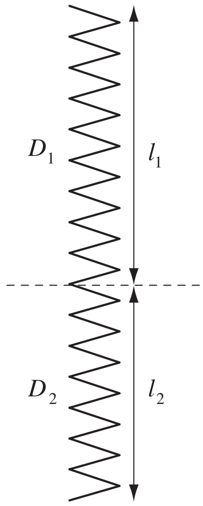
Die Federkonstante der nebeneinander zusammengesetzten Federn ist also viermal grösser: $D_{//}=2D+2D=4D$

105

Bei der Zeichnung ist darauf zu achten, dass sich die obere Feder bei a) um gleich viel verkürzt, wie sie sich bei b) verlängert. Das Gleiche gilt für die untere Feder. Die Verkürzung bzw. Verlängerung ist aber für beide Federn unterschiedlich. Sie sind also bei a) und b) nicht mehr gleich lang.

106

Sei l die Gesamtlänge der Feder. Gesucht ist die abgeschnittene Federlänge l_2. Wird die ganze Feder um y verlängert, verlängert sich l_1 um $y_1 = y\dfrac{l_1}{l}$.



Weil die Kraft in jedem Abschnitt der Feder gleich gross ist, gilt:

$$D_1 = \frac{F}{y_1} = \frac{Fl}{yl_1} = \frac{mgl}{yl_1}$$

$$\Rightarrow l_1 = \frac{mgl}{yD_1}$$

Die gesuchte Länge ist also:

$l_2 = l - l_1$; 7.7 cm

107

Parallel zusammengesetzte Federn entsprechen einer Vergrösserung der Querschnittsfläche des Seils. Wenn k gleiche Federn nebeneinander angehängt werden, ist die gesamte Federkonstante k-mal grösser. Die Federkonstante ist also proportional zur Querschnittsfläche.
Aneinander gehängte Federn entsprechen einer Verlängerung des Seiles. Wenn k gleiche Federn aneinander gehängt werden, ist die gesamte Federkonstante k-mal kleiner. Die Federkonstante ist also umgekehrt proportional zur Länge.

108

Das Seil würde reissen.
25 Personen ziehen auf jeder Seite. Dies ergibt eine Zugkraft von 30 kN.

Das Seil hält folgende Zugkraft aus: $F_{\text{Seil}} = \left(\dfrac{d_{\text{Seil}}}{d_{\text{Faden}}}\right)^2 F_{\text{Faden}}$; 12 kN

Es dürfen also höchstens 10 Personen auf jeder Seite ziehen.

Reibungskraft

109

Es sei $k = 0.6$.

$F_{R,\max} = kmg\mu_H$; 5.6 kN

Wenn diese Kraft überschritten wird, würden die Räder durchdrehen.

110

a) Um den Kleiderschrank zu verschieben, müssen sie die Haftreibungskraft überwinden. Diese ist aber von der Normalkraft abhängig, die ihrerseits von der Masse des Schrankes abhängt. Ein leerer Schrank lässt sich demnach leichter verschieben.

b) $F_R = \mu_H F_N = \mu_H mg$; 0.19 kN

c) Die Gleitreibungszahl ist im Allgemeinen kleiner als die Haftreibungszahl. Sobald der Kleiderschrank in Bewegung ist, muss eine geringere Kraft aufgewendet werden, um die Gleitreibungskraft zu überwinden. Der Schrank lässt sich leichter verschieben.

111

Die Reibungszahl kann grösser als 1 sein! Das würde nur bedeuten, dass die Reibungskraft grösser ist als die Normalkraft. Dies ist bei glatten Oberflächen kaum denkbar. Anders beispielsweise bei einem Klettverschluss oder gar bei einer Stubenfliege auf der Windschutzscheibe: Hier wird man sich schnell überzeugen können, dass so etwas tatsächlich möglich ist.

112

Blockieren die Räder, gleiten die Räder auf der Strasse und hinterlassen so genannte Bremsspuren. Da die Gleitreibung aber stets geringer ist als die Haftreibung, verringert sich dabei die Lenkbarkeit des Fahrzeugs. Das ABS-System sorgt dafür, dass zwischen Rad und Strasse stets Haftreibung auftritt und somit der Fahrer oder die Fahrerin eine bessere Kontrolle über das Fahrzeug behält.

113

a) Die Haftreibung zwischen den Rädern der Lok und den Schienen ist die Kraft, die den ganzen Zug antreibt. Die Haftreibung an den Rädern der Waggons führt dazu, dass diese sich zu drehen beginnen und nicht gleiten. Die Rollreibung an allen Rädern des Zuges bremst die Bewegung des Zuges.

b) Die maximale Haftreibung zwischen den Rädern der Lok und den Schienen muss grösser als die Rollreibung aller Räder des Zuges sein. Das ist trotz des höheren Gesamtgewichts des Zuges gegenüber der Lok in der Regel der Fall, weil die Rollreibungszahl viel kleiner als die Haftreibungszahl ist.

114

$F_Z = \mu_H \, m_{\text{tot}} \, g$; 61 kN
Traktor 1 vorne: $F_{12} = \mu_H \cdot m_1 \cdot g$; 23 kN
Traktor 2 vorne: $F_{21} = \mu_H \cdot m_2 \cdot g$; 38 kN

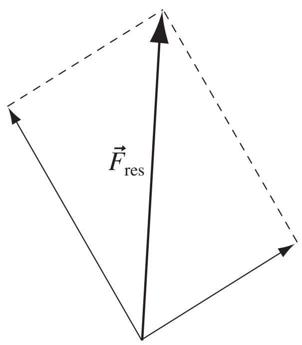
115

a) Die beiden Zeigefinger halten am Schluss den Besen unter dem Schwerpunkt, da der Besen stets im Gleichgewicht sein muss. Würde er neben dem Schwerpunkt gestützt, würde er kippen.

b) Laut Hebelgesetz übt der Zeigefinger, der näher beim Schwerpunkt ist, die grössere Normalkraft auf den Besen aus. Da die Haftreibungskraft proportional zur Normalkraft ist, wird sich stets derjenige Finger bewegen, der den grösseren Abstand zum Schwerpunkt aufweist.
Beispiel: Der rechte Zeigefinger sei näher beim Schwerpunkt. Der linke Finger wird sich also als Erster bewegen. Er wird dies so lange tun, bis seine Gleitreibungskraft grösser wird als die Haftreibungskraft zwischen dem Zeigefinger der rechten Hand und dem Besenstiel. Dann bleibt der linke Finger stehen und der rechte setzt sich in Bewegung. Dieses wiederholte Haften und Gleiten erfolgt, bis beide Zeigefinger unter dem Schwerpunkt des Besens zusammentreffen.

Ebenes Kräftegleichgewicht

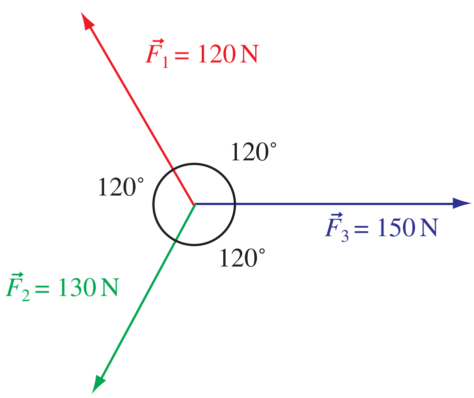
116



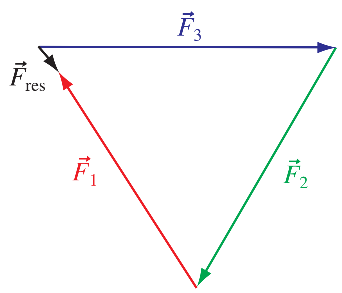
$F_{\text{res}} \approx 66$ N

117

Lageplan

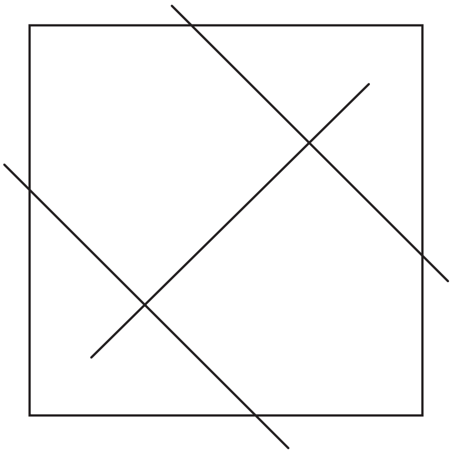


Kräfteplan



118

a)



b) An jedem Auflagepunkt wirkt die Kraft $\frac{F_G + 3F_B}{4}$; 0.22 kN.

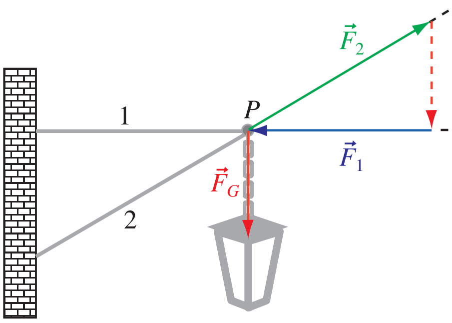
119

a) $l_{\text{Seil}} = \sqrt{h^2 + d^2}$; 7.81 m; $F_{\text{Seil}} = F_{\text{Kabel}} \cdot \frac{l_{\text{Seil}}}{d}$; 2.8 kN

b) $F_{\text{Mast}} = F_{\text{Kabel}} \cdot \frac{h}{d}$; 2.2 kN

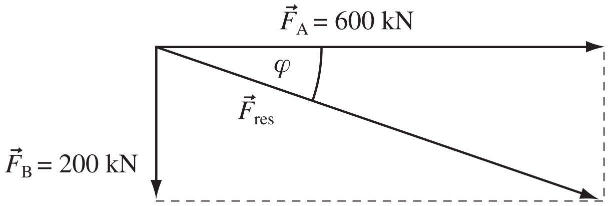
120

a)



b) $F_1 = F_G \frac{l_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}}$; 181 N. $F_2 = F_G \frac{l_2}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}}$; 217 N

121



$F_{res} = \sqrt{F_A^2 + F_B^2}$; 632 kN $\tan(\varphi) = \frac{F_B}{F_A}$; 18.4°

122

Winkel zwischen der Vertikalen und dem Band: $\alpha = 59°$

$F = \frac{mg}{2\cos\alpha}$; 0.11 kN

ohne Trigonometrie: $F = \frac{F_G}{2} \cdot \frac{\sqrt{h^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}}{h}$

123

α ist der Winkel zwischen den Seilen und der Vertikalen; l der Pfostenabstand und h der Durchhang des Seils.

$\tan\alpha = \frac{l}{2h}$; $F = \frac{F_G}{2\cos\alpha}$; 0.44 kN

124

Kräfte am Keil.

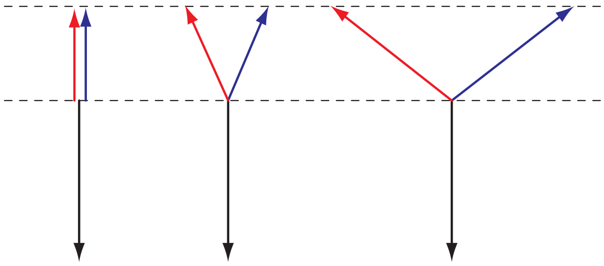
F_G ist die Gewichtskraft eines Holzklotzes.

a) Die Kraft auf die unteren Nachbarn: $F = \frac{F_G}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; 2.2 N

b) Die Kraft gegeneinander: $F_W = \frac{F_G}{\tan\frac{\alpha}{2}}$; 1.9 N

125

a)

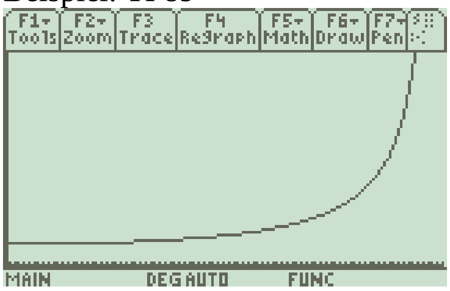


b) 100 N 115 N 200 N

c) Die Kraft im Arm ist grösser als die Gewichtskraft der Tasche. In dem Fall wäre es besser, die Tasche allein zu tragen.

d) $F = \dfrac{F_G}{2\cos\alpha}$

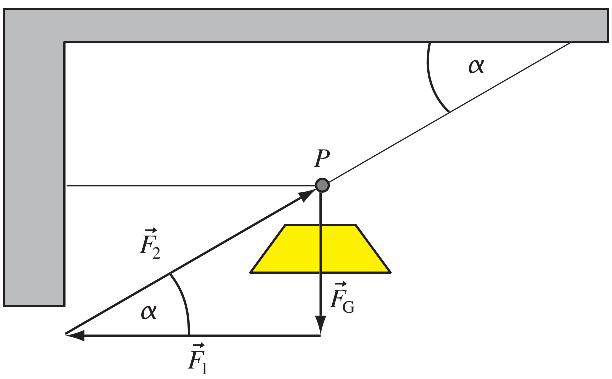
e) Beispiel: TI 89



Die Kraft geht für $\alpha \to 90°$ gegen unendlich.

126

a)



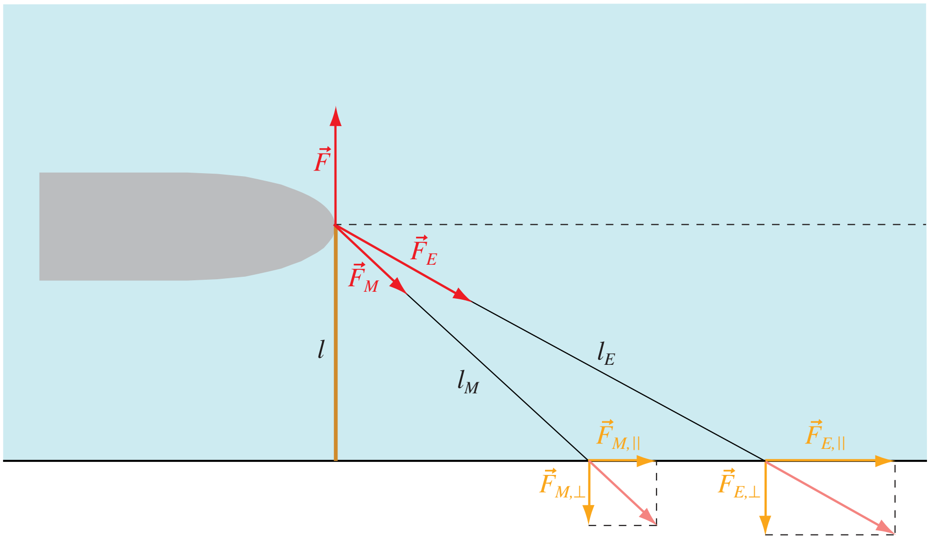
b) $F_1 = \dfrac{F_G}{\tan\alpha}$; 0.69 kN; 1.1 kN; 2.3 kN und

$F_2 = \dfrac{F_G}{\sin\alpha}$; 0.80 kN; 1.2 kN; 2.3 kN

c) Offensichtlich ist die Kraft F_2 entscheidend, weil sie immer grösser als F_1 ist.

$\sin\alpha = \dfrac{F_G}{F_2}$; 24°

127



(Skizze nicht massstabsgetreu!)

a) Idealerweise steht der Matrose so nahe wie möglich am Befestigungspunkt der Seile, aber auch möglichst nahe zum Ufer.

l : Stangenlänge 4.0 m
l_E : Seillänge Esel 40 m
l_M : Seillänge Mann 32 m

Indizes: $\perp$: senkrecht zum Ufer; $\parallel$: parallel zum Ufer

Esel:

$$F_{E,\perp} = F_E \frac{l}{l_E} \qquad F_{E,\parallel} = F_E \frac{\sqrt{l_E^2 - l^2}}{l_E}$$

Mann:

$$F_{M,\perp} = F_M \frac{l}{l_M} \qquad F_{M,\parallel} = F_M \frac{\sqrt{l_M^2 - l^2}}{l_M}$$

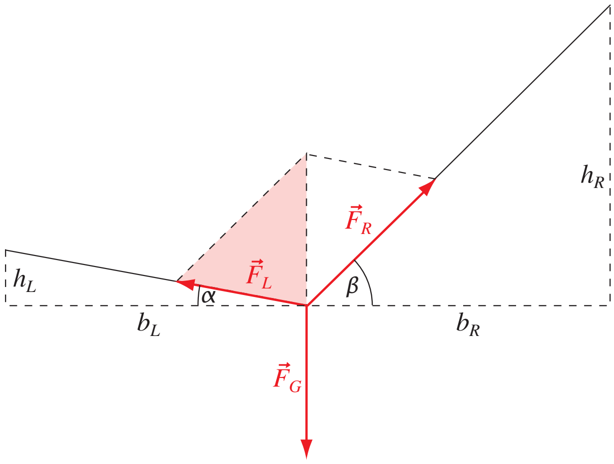
b) $F = F_{E,\perp} + F_{M,\perp}$; 50 N

c) $F_{\text{res}} = F_{E,\parallel} + F_{M,\parallel}$; 0.48 kN

128

$h_L = 1.00$ m

$h_R = b_L = b_R = 5.00$ m



Mit Kräfteparallelogramm:

$\tan\alpha = \dfrac{h_L}{b_L}$ und $\tan\beta = \dfrac{h_R}{b_R}$

folgt

$\alpha = 11.3°$ und $\beta = 45.0°$

Mit Sinussatz am schraffierten Dreieck und mit den Winkeln $\alpha + \beta$ und $90° - \alpha$ und $90° - \beta$ ergibt sich:

$$\frac{F_G}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{F_L}{\sin(90°-\beta)} = \frac{F_R}{\sin(90°-\alpha)}$$

in den Seilen: $F_L = 119$ N; $F_R = 165$ N

129

a) $F_{\text{Band}} = F_G \sin\alpha$; 51 N

b) $F_N = F_G \cos\alpha$; 0.14 kN

130

a) $\tan\alpha = 0.15$; $F = F_H - \mu_H F_N = mg\sin\alpha - \mu_H mg\cos\alpha$; 0.35 kN;
Ja, wenn Sie selber genügend Halt am Boden oder anderswo finden.

b) $\tan\alpha = 0.15$; $F = F_H + \mu_G F_N = mg\sin\alpha + \mu_G mg\cos\alpha$; 2.9 kN

131

a) Der Schlitten mit der geringeren Reibung: Anders Celsius.

b) $F_{HA} + F_{HB} = F_{RA} + F_{RB} \Rightarrow m_A \sin\varphi + m_B \sin\varphi = m_A\mu_A\cos\varphi + m_B\mu_B\cos\varphi$

$\Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{m_A\mu_A + m_B\mu_B}{m_A + m_B}$; 4.3° oder 7.5%

c) $F_S = F_{RB} - F_{HB} = m_B g(\mu_B\cos\varphi - \sin\varphi)$
oder
$F_S = F_{HA} - F_{RA} = m_A g(\sin\varphi - \mu_A\cos\varphi)$; 7.7 N

132

$$\frac{F_R}{F_Z} = \frac{F_R}{F_R + F_H} = \frac{\mu_R \cos\varphi}{\mu_R \cos\varphi + \sin\varphi}; \quad 0.18 = 18\%$$

133

a) $F = mg \dfrac{\sin\alpha}{\cos(\beta - \alpha)}; \quad 0.26 \text{ kN}$

b) $F = mg \dfrac{\sin\alpha + \mu_G \cos\alpha}{\cos(\beta - \alpha) + \mu_G \sin(\beta - \alpha)}; \quad 0.32 \text{ kN}$

c) $F = mg \dfrac{\sin\alpha - \mu_H \cos\alpha}{\cos(\beta - \alpha) - \mu_H \sin(\beta - \alpha)}; \quad 0.15 \text{ kN}$

134

a) $\tan\alpha = \mu_H; \quad \alpha = 27°$

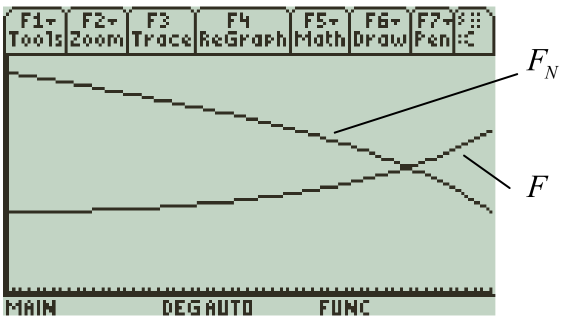
b) $F = F_G(\mu_H \cos\alpha - \sin\alpha); \quad 41 \text{ N}$

c) $F = F_G(\sin\alpha - \mu_H \cos\alpha); \quad 41 \text{ N}$

135

a) $F = \dfrac{F_G \cdot \sin\alpha}{\cos\beta}; \quad F_N = \dfrac{F_G \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta)}{\cos\beta}$

b)



c) Parallelverschiebung abwärts.
Schnittpunkt Wirkungslinie von F_G mit schiefer Ebene.

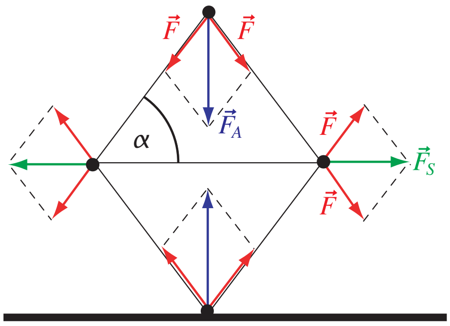
136

a)

Aus $F = \dfrac{F_A}{2\sin\alpha}$

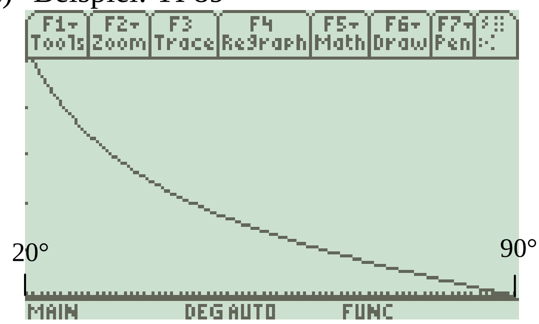
und $F_S = 2F\cos\alpha$

folgt $F_S = \dfrac{F_A}{\tan\alpha}$



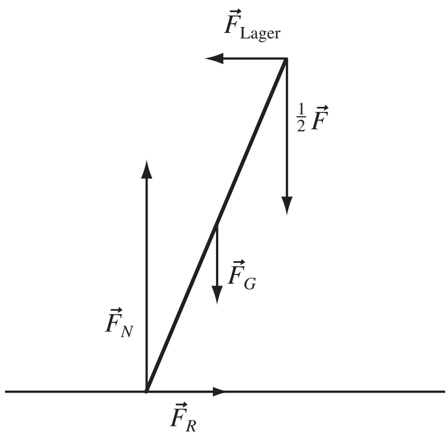
b) 4.5 kN bzw. 1.4 kN

c) Beispiel: TI 89



Die Kraft geht für $\alpha \to 90°$ gegen Null und für $\alpha \to 0°$ gegen unendlich.

137



a) $\tan\alpha = \mu_H$

b) $\tan\alpha = 2\mu_H$

c) Kräftegleichgewicht:

$F_R = F_{\text{Lager}}$ und $F_N = F_G + \dfrac{1}{2}F$

somit folgt: $F_R = \mu F_N = \mu\left(F_G + \dfrac{1}{2}F\right)$

Drehmomentgleichgewicht:

$$F_N l \sin\alpha - F_G \frac{l}{2}\sin\alpha = F_G l \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \left(F_G + \frac{F}{2}\right)\sin\alpha - \frac{F_G}{2}\sin\alpha = \mu\left(F_G + \frac{F}{2}\right)\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \left(\frac{F_G}{2} + \frac{F}{2}\right)\sin\alpha = \mu\left(F_G + \frac{F}{2}\right)\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \mu_H \frac{2F_G + F}{F_G + F}$$

138

a) Die Komponente von F_{Zug} in Richtung von Seil 1 muss der «Hangabtriebskraft» $mg\sin\alpha_1$ entsprechen. $F_{\text{Zug}} = \dfrac{mg\sin\alpha_1}{\cos(\alpha_1-\alpha_2)}$; 2.2 kN

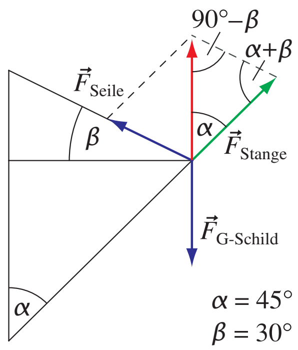
b) Das Hauptproblem ist, dass sich der Winkel zwischen den Seilen vergrössert, wenn der Wagen oben ankommt. Dadurch ist eine zunehmende Kraft nötig, um den Wagen zu ziehen oder zu halten. Am wenigsten Kraft wird benötigt, wenn beide Seile parallel verlaufen. Dazu könnte man die Rolle 3 weiter nach oben versetzen.

Kräftegleichgewicht in drei Dimensionen

139

$\sin\alpha = \dfrac{100\ \text{cm}}{141\ \text{cm}}$ $\tan\beta = \dfrac{58\ \text{cm}}{100\ \text{cm}}$

$$\frac{F_{\text{G-Schild}}}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{F_{\text{Stange}}}{\sin(90^\circ-\beta)} = \frac{F_{\text{Seile},\perp}}{\sin\alpha};$$



F_{Stange} = 158 N;

$F_{\text{Seile},\perp}$ = 129 N

$F_{\text{Seile},\perp}$ verteilt sich auf zwei gleich grosse Kräfte F_{Seile}: $\sin\gamma = \dfrac{40\ \text{cm}}{122\ \text{cm}}$;

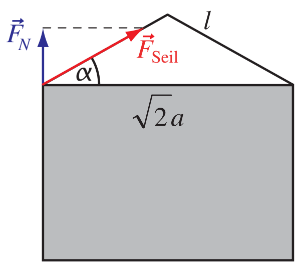
wobei γ der halbe Öffnungswinkel zwischen den Seilen ist.

$$F_{\text{Seile}} = \frac{F_{\text{Seile},\perp}}{2\cdot\cos\gamma}; \quad 68\ \text{N}$$

140

Es ist l = Länge des Seiles und a = Kantenlänge des Würfels.
Schnitt durch die obere Flächendiagonale:

$$F_{\text{Seil}} = \frac{F_N}{\sin\alpha} = \frac{F_G}{4\sin\alpha}$$



$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{l^2-a^2/2}}{l} = \sqrt{1-\frac{a^2}{2l^2}}$$

$$F_{\text{Seil}} = \frac{F_G}{4\sqrt{1-\dfrac{a^2}{2l^2}}}; \quad 3.8\ \text{kN}$$

Schwerpunkt

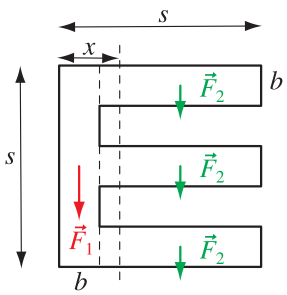
141

Der Schwerpunkt liegt auf der Symmetrieachse der Figur, 4.3 cm unter der obersten Kante.

142

$S_A(3.0\text{ cm}|2.0\text{cm})$; $S_B(6.3\text{ cm}|6.3\text{cm})$; $S_C(0|2.1\text{cm})$; $S_D(7.3\text{ cm}|2.7\text{cm})$

143



Mit dem Drehgleichgewicht folgt: $F_1\left(x-\frac{b}{2}\right)=3F_2\left(\frac{s-b}{2}-(x-b)\right)$

Die Gewichtskräfte sind proportional zur Fläche der Buchstabenteile, somit folgt:

$$sb\left(x-\frac{b}{2}\right)=3(s-b)b\left(\frac{s-b}{2}-(x-b)\right) \Rightarrow x=\frac{3s^2+sb-3b^2}{8s-6b};\quad 4.5\text{ cm}$$

Für $b = 0$ ist $x=\frac{3}{8}s$; 3.75 cm und gleicht einem dünnen E.

Für $b=\frac{s}{3}$ ist $x=\frac{s}{2}$; 5 cm und gleicht einem Quadrat.

144

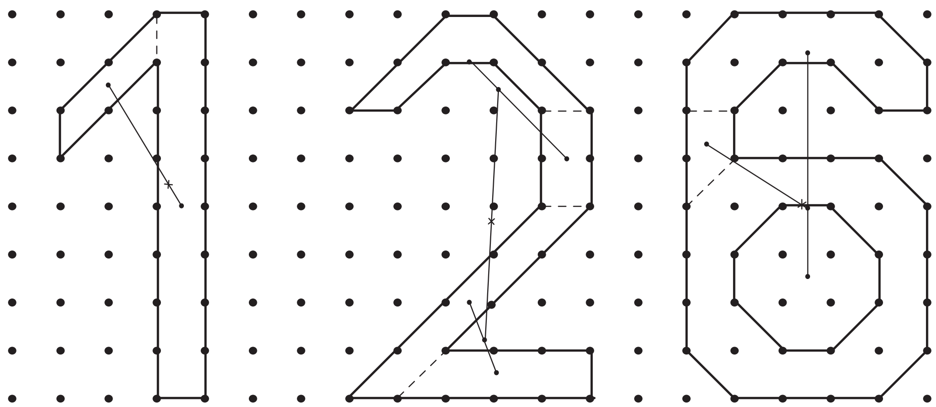
Sei x der gesuchte Abstand vom Erdmittelpunkt bis zum Schwerpunkt, m_1 die Masse der Erde, m_2 die Masse des Mondes und d der Abstand Erde – Mond.

$$x=\frac{m_2}{m_1+m_2}d$$

a) x = 4671 km vom Erdmittelpunkt entfernt. Das ist noch innerhalb der Erdkugel. Kurt hat also Recht.

b) x = 449.3 km vom Sonnenmittelpunkt entfernt. Das ist praktisch im Sonnenmittelpunkt

145



146

a) Sei m die Masse eines Quaders.

$3m \cdot 1.5h + 2.5m \cdot 0.5h = 5.75m \cdot h < 2m \cdot 0.5h + 1.5m \cdot 1.5h + m \cdot 2.5h + 0.5m \cdot 3.5h = 7.5m \cdot h$

Der Schwerpunkt liegt oberhalb der Linie.

b) Der Schwerpunkt liegt oberhalb der Linie, obwohl sich mehr Masse unterhalb der Linie befindet.

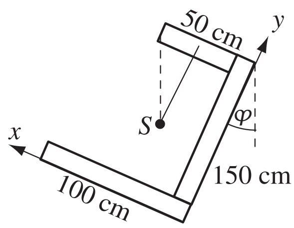
147

a) $x = \frac{b}{2} + \frac{b}{4} = \frac{3b}{4}$

b) Schwerpunkt gemessen von Q bei $\frac{5b}{6}$ in x-Richtung und $\frac{3h}{2}$ in y-Richtung.

148

Die Absolutbeträge der Massen der Stäbe spielen keine Rolle, solange die Stäbe homogen sind. Es kann also ein beliebiger Proportionalitätsfaktor gewählt werden, zum Beispiel: 1 kg pro dm. Damit wäre m_{50} = 5 kg, m_{100} = 10 kg und m_{150} = 15 kg.



Der Schwerpunkt des 50 cm Stabes in cm ist: $(x_{50}|y_{50})$ = (35|155)
Der Schwerpunkt des 150 cm Stabes in cm ist: $(x_{150}|y_{150})$ = (5|85)
Der Schwerpunkt des 100 cm Stabes in cm ist: $(x_{100}|y_{100})$ = (50|5)
Die Aufhängung ist in cm bei: $(x_A|y_A)$ = (60|155)

$$x_S = \frac{m_{50} \cdot x_{50} + m_{150} \cdot x_{150} + m_{100} \cdot x_{100}}{m_{50} + m_{150} + m_{100}}; \; 25 \text{ cm}$$

$$y_S = \frac{m_{50} \cdot y_{50} + m_{150} \cdot y_{150} + m_{100} \cdot y_{100}}{m_{50} + m_{150} + m_{100}}; \quad 70 \text{ cm}$$

$$\tan\varphi = \frac{x_A - x_S}{y_A - y_S} \Rightarrow \varphi = 22°$$

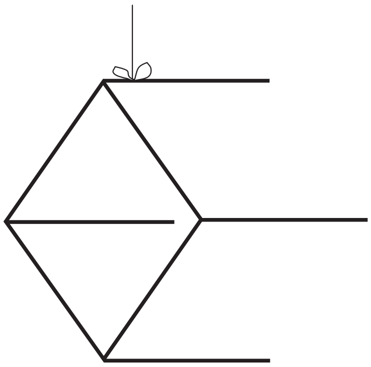
149

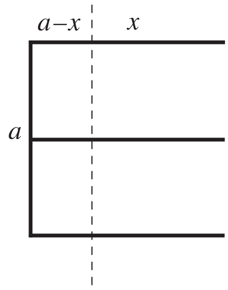
Wir hängen den Tisch an einem Tischbein auf. Nach dem Drehmomentgleichgewicht folgt:

$$4F\cdot(a-x)=4\cdot F\left(\frac{a}{2}-(a-x)\right),$$

wobei F die Gewichtskraft der Stäbe und x die gesuchte Höhe ist. Nach x auflösen:

$x=\frac{3}{4}a$; 0.75 m



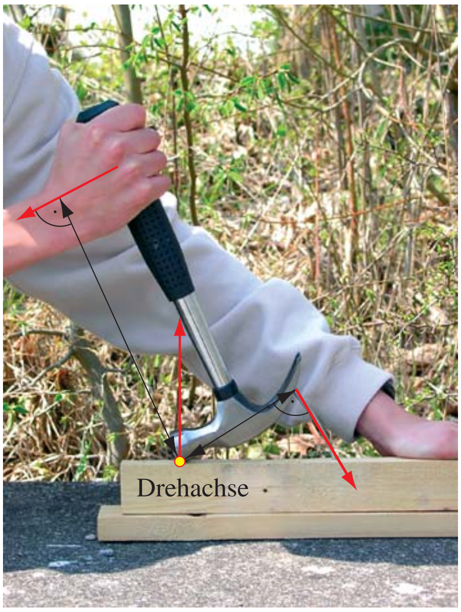


Seitenansicht: die beiden Tischbeine in der Mitte überlappen sich, ebenso die vier Stäbe der Deckplatte.

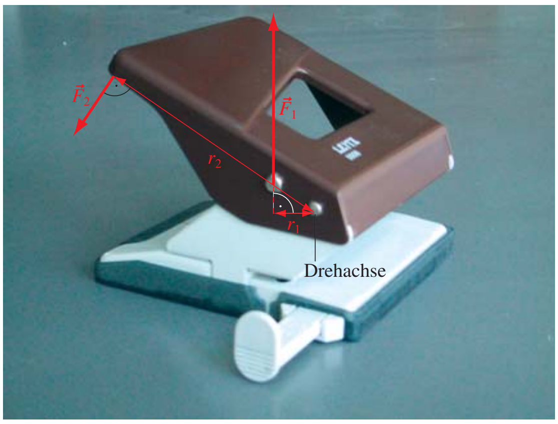
Drehmoment, Hebel

150

a) Da der Kraftarm zum Nagel kürzer ist als der Kraftarm zum Angriffspunkt der Hand, muss die Kraft auf den Nagel entsprechend grösser sein.
b) Die Kraftarme verhalten sich wie 1:2. Daher ist die Kraft auf den Nagel 0.17 kN.



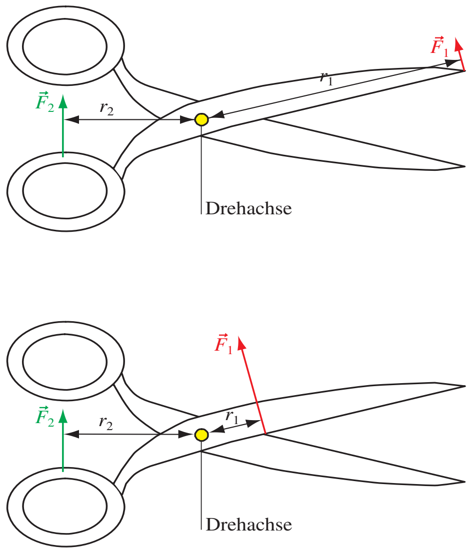
151



Im Bild sind die Grössen für das Drehmoment eingezeichnet. (Die Kräfte durch die Drehachse spielen keine Rolle, da sie kein Drehmoment erzeugen. Vernachlässigt wurde auch die Gewichtskraft des Drückers.) Es fällt sofort auf, dass der Kraftarm r_1 zu den Stiften kürzer ist als der Kraftarm r_2. Im Gleichgewicht muss somit die Kraft F_1 grösser sein als die Kraft F_2, mit der ich auf den Locher drücke.
Dadurch kann ich die Stifte leichter durchs Papier bohren.

152

Wenn ich die Schere jeweils mit der konstanten Kraft F_2 zusammendrücke, bewirke ich ein konstantes rechtsdrehendes Drehmoment. Der Halbkarton führt im Gleichgewicht zu einem ebenso grossen, linksdrehenden Drehmoment. Bei der Scherenspritze ist die Kraft hierfür klein, da der Kraftarm gross ist. Halbkarton schneiden Sie daher mit Vorteil nahe an der Drehachse, wo die Kraft am grössten ist.

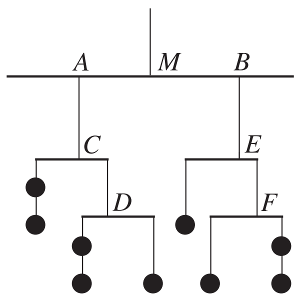


153

$$400x + 800(x-10) + 500(x-20) + 300(x-40) + 200(x-70) = 0 \quad \Rightarrow x = 20 \text{ cm}$$

154

A wird nicht verschoben
B wird so verschoben, dass $\overline{AM} : \overline{MB} = 4:5$
C teilt seinen Balken im Verhältnis 3 : 2
D teilt seinen Balken im Verhältnis 1 : 2
E teilt seinen Balken im Verhältnis 3 : 1
F teilt seinen Balken im Verhältnis 2 : 1



155

a) $F_{\text{Hand}} = F_G \dfrac{r_S}{r_{\text{Hand}}}$; 0.11 kN

b) $F_{\text{Schulter}} = F_G + F_{\text{Hand}}$; 0.17 kN

156

Mit r werden die verschiedenen Kraftarme bezeichnet, mit m die Massen.
Die Indizes bedeuten S = Susanne, K = Kind, B = Balken:

$$m_K = \frac{m_S r_S + m_B r_B}{r_K}; \quad 33\ \text{kg}$$

157

$$F_1 = \frac{5}{9} F_G; \quad 0.33\ \text{kN}$$

$$F_2 = \frac{4}{9} F_G; \quad 0.27\ \text{kN}$$

158

$\overline{AB}$ = 100 cm, Schwerpunkt S bei $\overline{AS}$ = 150 cm und damit $\overline{BS}$ = 50 cm und $\overline{BC}$ = 180 cm.

Hebelgesetz bezüglich des Punktes B: $F_A \overline{AB} = F_S \overline{BS} + F_C \overline{BC}$

$$F_A = \frac{F_S \overline{BS} + F_C \overline{BC}}{\overline{AB}}; \quad 1.0\ \text{kN zieht am Brett nach unten.}$$

$$F_B = F_A + F_S + F_C; \quad 1.8\ \text{kN drückt am Brett nach oben.}$$

159

a) F_G sei die Gewichtskraft des Fensters, h der Abstand der Angeln, b die Breite des Fensters.
Bei der unteren Angel B wirken F_{By} nach oben und F_{Bx} nach rechts.
Bei der oberen Angel A wirken F_{Ay} nach oben und F_{Ax} nach links.
Gleichungssystem:

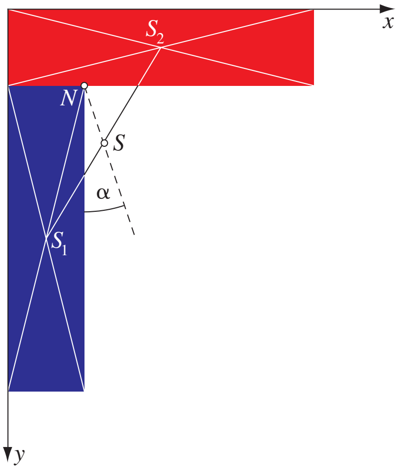
$$F_G = F_{Ay} + F_{By}; \quad \frac{F_{Ay}}{F_{By}} = q; \quad F_G \cdot \frac{b}{2} = F_{Ax} \cdot h; \quad F_G \cdot \frac{b}{2} = F_{Bx} \cdot h$$

Lösung: $F_{Ax} = \frac{b}{2h} F_G$; $F_{Bx} = \frac{b}{2h} F_G$; $F_{Ay} = \frac{q}{1+q} F_G$; $F_{By} = \frac{1}{1+q} F_G$

b)

q	F_{Ax} in N	F_{Bx} in N	F_{Ay} in N	F_{By} in N
1	30	30	100	100
0	30	30	0	200
∞	30	30	200	0

160



Die blaue und die rote Fläche sind identisch. Der gemeinsame Schwerpunkt S liegt in der Mitte zwischen den Schwerpunkten S_1 und S_2 der beiden Teilflächen und hat die Koordinaten $S\left(x_S \middle| y_S\right) =$ (2.5 cm|3.5 cm).

Der Punkt N hat die Koordinaten $N(x_N|y_N)$ = (2 cm|2 cm).

Der Winkel α lässt sich aus $\tan\alpha = \dfrac{x_S - x_N}{y_S - x_N}$; $\dfrac{1}{3}$

berechnen.

$\alpha = 18.4°$

161

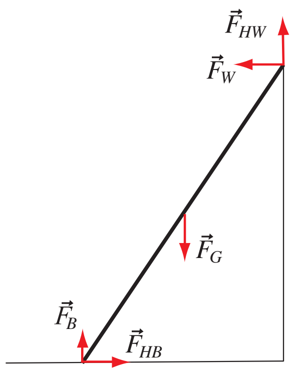
Da der Körper nach vorne kippen würde, wird die vordere Kante als Drehlinie genommen. Der Körper ist homogen und überall gleich tief, also kann die Masse proportional zur Fläche genommen werden.

$\dfrac{b}{2}(5b \cdot b) = \dfrac{a}{4}\left(b\dfrac{a}{2}\right) + \dfrac{a}{2}(ba)$ und daraus $\dfrac{a}{b} = 2$

Antwort: $a : b$ darf nicht grösser als 2 sein.

162

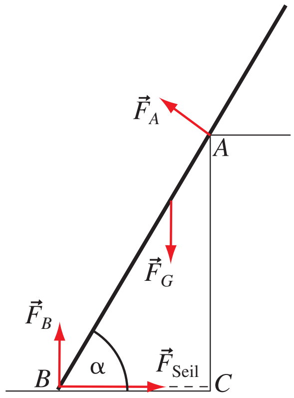
a) Die Gewichtskraft wirkt im Schwerpunkt der Leiter senkrecht nach unten.
Die Haftreibungskraft am Boden wirkt nach rechts (weil die Leiter nach links rutschen würde).
Die Haftreibungskraft an der Wand wirkt nach oben (weil die Leiter nach unten rutschen würde).



b) $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{1 - \mu_{HB}\mu_{HW}}{2\mu_{HB}}\right)$; 49°

c) $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2\mu_{HB}}\right)$; 51°

163



a) Senkrecht zur Leiter, weil keine Reibungskräfte vorhanden sind.

b) Senkrecht nach oben, weil keine Reibungskräfte vorhanden sind.

c) $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \tan\alpha$, $F_A = \dfrac{F_G l \cos^2\alpha}{2\overline{BC}}$; 30 N;

$F_B = F_G - F_A \cos\alpha$; 85 N

d) $F_{\text{Seil}} = F_A \sin\alpha$; 26 N

164

a) Die Leiter rutscht nach links, also zeigt die Reibungskraft nach rechts.

b) F_P: Gewichtskraft der Person (Petra)

F_G: Gewichtskraft der Leiter

F_B: Reaktionskraft des Bodens auf die Leiter

F_W: Reaktionskraft der Wand auf die Leiter

F_{HB}: Haftreibungszahl am Boden (nach rechts gerichtet)

l: Länge der Leiter

μ_{HB}: Haftreibungskoeffizient am Boden

l_P: Position der Person (Petras) auf der Leiter von unten gemessen

α: Neigung der Leiter gegen die Horizontale

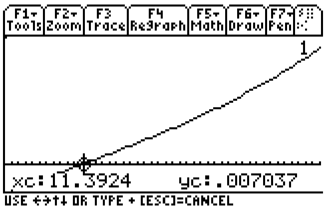
$F_G + F_P = F_B$, $F_{HB} = F_W$, $F_{HB} = \mu_{HB} F_B$,

$\left(F_G \dfrac{l}{2} + F_P l_P\right) \cdot \cos\ \alpha = F_W l \sin\alpha$

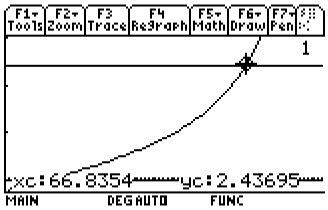
c) $F_{HB} = \mu_{HB}(F_G + F_P)$, $F_B = F_G + F_P$, $F_W = \mu_{HB}(F_G + F_P)$, $\tan\alpha = \dfrac{F_G \dfrac{l}{2} + F_P l_P}{(F_G + F_P) l \mu_{HB}}$

d) $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{F_G \dfrac{l}{2} + F_P}{(F_G + F_P)\mu_{HB}}\right)$; 67°

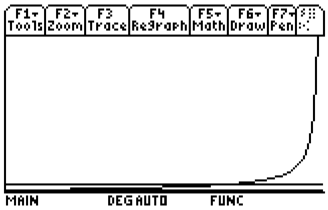
e) $$l_P = \frac{(F_G + F_P)l\,\mu_{HB}\tan\alpha - F_G\dfrac{l}{2}}{F_P}$$



Wenn α kleiner als 11° ist, rutscht die Leiter von ganz alleine weg.



Ab etwa $\alpha = 67°$ kann Petra bis ganz nach oben steigen (siehe auch d)).



Bei $\alpha = 90°$ kann jede beliebige Person bis ganz nach oben steigen.

165

a) Bezeichnungen wie in der vorherigen Aufgabe; neu Haftreibung an der Wand F_{HW} mit der Haftreibungszahl μ_{HW}.
Die Leiter rutscht nach unten, also zeigt die Reibungskraft an der Wand nach oben.

b) $F_G + F_P = F_B + F_{HW}$ $\quad F_{HB} = F_W$ $\quad F_{HB} = \mu_{HB} F_B$ $\quad F_{HW} = \mu_{HW} F_W$

$$\left(F_G\frac{l}{2} + F_P l_P\right)\cos\alpha = F_W l\sin\alpha + F_{HW} l\cos\alpha$$

c) $F_{HB} = \dfrac{\mu_{HB}\left(F_G + F_P\right)}{1+\mu_{HB}\mu_{HW}}$; $\quad F_{HW} = \dfrac{\mu_{HB}\mu_{HW}\left(F_G + F_P\right)}{1+\mu_{HB}\mu_{HW}}$; $\quad F_B = \dfrac{F_G + F_P}{1+\mu_{HB}\mu_{HW}}$,

$F_W = \dfrac{\mu_{HB}\left(F_G + F_P\right)}{1+\mu_{HB}\mu_{HW}}$; $\quad \tan\alpha = \dfrac{F_G(1-\mu_{HB}\mu_{HW})\frac{1}{2} + F_P\left(\frac{l_P}{l} - \mu_{HB}\mu_{HW}\left(1-\frac{l_P}{l}\right)\right)}{\left(F_G + F_P\right)\mu_{HB}}$

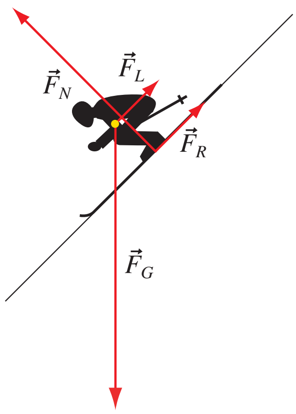
d) $\alpha = \arctan\left(\dfrac{F_G(1-\mu_{HB}\mu_{HW})\frac{1}{2} + F_P}{\left(F_G + F_P\right)\mu_{HB}}\right)$; 66°,

$F_{HB} = 0.23\text{ kN}$ $\quad F_B = 0.58\text{ kN}$ $\quad F_{HW} = 47\text{ N}$ $\quad F_W = 0.23\text{ kN}$

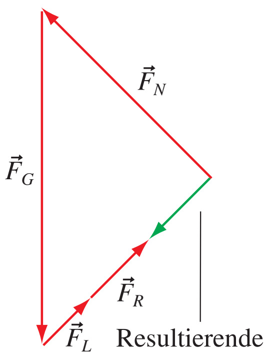
Bemerkung: Die Reibung an der Wand spielt für den maximalen Neigungswinkel kaum eine Rolle. Falls die Reibung an der Wand vernachlässigt wird, ergeben sich folgende Werte: α = 67°,
$F_{HB} = 0.25\text{ kN}$ $\quad F_B = 0.63\text{ kN}$ $\quad F_{HW} = 0\text{ N}$ $\quad F_W = 0.25\text{ kN}$

166

a) Lageplan:

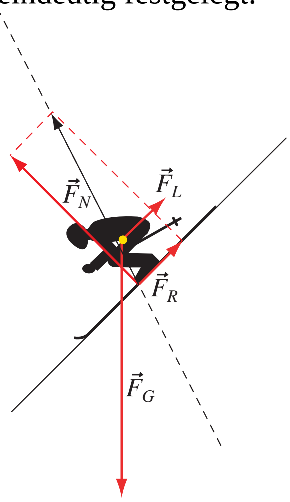


Kräfteplan:



b) Die Luftmoleküle üben Kräfte auf die ganze Querschnittsfläche der Fahrerin aus. Sie kann die Resultierende dieser Kräfte (die Luftreibungskraft) verkleinern, wenn sie sich wie im Bild «klein macht». Die Piste übt Reaktionskräfte auf die ganze Skifläche aus. Ihre Resultierende hebt die zur Piste senkrechte Komponente der Gewichtskraft auf. In der Regel wird diese Kraft «Normalkraft» genannt.
Die Reibungs-kraft ist auch die Resultierende von kleineren Reibungskräften, die entlang der ganzen Skifläche angreifen. Alle Massenpunkte des Körpers werden von der Erde angezogen. Die Resultierende dieser Teil-Gewichtskräfte ist die Gewichtskraft. Sie zeigt in Richtung Erdmittelpunkt und greift am Schwerpunkt der Fahrerin an.

c) Die Kräfte dürfen kein Gesamtdrehmoment auf die Fahrerin ausüben. Die Wirkungslinie der Resultierenden aus Normalkraft und Reibungskraft muss in diesem Fall durch den Schwerpunkt verlaufen. Dadurch sind die Angriffspunkte für diese beiden Kräfte an der Skiunterseite eindeutig festgelegt.



167

a) Die Gewichtskraft der Person wird dort, wo die Person steht, als Kraftpfeil F_G senkrecht nach unten eingezeichnet. Zwei Strecken von der Länge dieses Kraftpfeils sind parallel dazu an den Lagern nach unten gezeichnet. Es werden die beiden Diagonalen von A nach Q und von B nach P gezeichnet. Die Diagonalen schneiden vom Kraftpfeil F_G den zum Lager gehörenden Anteil F_1 bzw. F_2 ab. Die grössere Kraftkomponente gehört zum näheren Lager.

b) x = Abstand der Person vom linken Lager
l = Länge der Brücke zwischen den Lagern
Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke (Strahlensatz) gilt:

$\frac{F_G}{l} = \frac{F_2}{x}$ und $\frac{F_G}{l} = \frac{F_1}{l-x}$

Es folgt: $F_1 + F_2 = \frac{F_G}{l}(l-x) + \frac{F_G}{l}x = F$ (Kräftegleichgewicht)

Und: $F_G x = F_2 l$ (Drehmomentgleichgewicht bzgl. Drehachse durch Lager 1)

168

Hinweis: Aufgrund einer Änderung im Aufgabentext in der 2. Auflage 2006 hat diese Aufgabe zwei unterschiedliche Lösungen.

Lösung für die 2. Auflage 2006:

a) Bei Gleichgewicht liegt in der linken Waagschale (kürzerer Hebelarm) immer eine grössere Masse als in der rechten. Die Verkäuferin verrechnet aber nur die in der rechten Schale liegende Masse, macht also einen Verlust.

b) m_1 = Masse der Ware bei 1. Wägung (Ware links), m_2 = Masse der Ware bei 2. Wägung (Ware rechts), m_W = tatsächliche Masse der Ware.

1. Wägung: $m_W \cdot x = m_1 \cdot y$

2. Wägung: $m_2 \cdot x = m_W \cdot y$

Erste Gleichung nach x auflösen, in die zweite einsetzen und die erhaltene Gleichung nach m_W auflösen:

$m_W = \sqrt{m_1 \cdot m_2}$; 25.0 g

c) Zusätzlich sei m_S die Masse einer Waagschale

1. Wägung: $(m_W + m_S) \cdot x = (m_1 + m_S) \cdot y$ (1)

2. Wägung: $(m_2 + m_S) \cdot x = (m_W + m_S) \cdot y$ (2)

(1) – (2): $(m_W - m_2) \cdot x = (m_1 - m_W) \cdot y$

nach x aufgelöst: $x = \dfrac{m_1 - m_W}{m_W - m_2} y$

in (1) eingesetzt:

$$\frac{(m_W + m_S)(m_1 - m_W)}{m_W - m_2} y = (m_1 + m_S) \cdot y$$

gekürzt:

$$(m_W + m_S)(m_1 - m_W) = (m_1 + m_S)(m_W - m_2) \qquad (3)$$

ausmultipliziert und geordnet:

$$m_W^2 + 2m_S m_W - \left(m_S(m_1 + m_2) + m_1 m_2\right) = 0$$

Die quadratische Gleichung nach m_W aufgelöst (nur positive Lösung sinnvoll):

$m_W = \sqrt{m_S^2 + m_S(m_1 + m_2) + m_1 m_2} - m_S$; 25.1 g

Bemerkung: Der Einfluss der Waagschalen ist unter den gegebenen Umständen gering im Vergleich zu dem Messfehler aufgrund der unterschiedlichen Balkenlänge.

Lösung für die 1. Auflage 2004:

a) Die Verkäuferin bestimmt mit jeder Wägung eine zu kleine Masse, verkauft also zu viel Gewürz für den Preis.

b) m_1 = Masse der Ware bei 1. Wägung, m_2 = Masse der Ware bei 2. Wägung, m = tatsächliche Masse der Ware.

1. Wägung: $m_1 x = my$

2. Wägung: $m_2 y = mx$

Erste Gleichung nach x auflösen, in die zweite einsetzen und die erhaltene Gleichung nach m auflösen:

$m_W = \sqrt{m_1 \cdot m_2}$; 25.1 g

169

a) Sei F die Gewichtskraft der kleinen Masse, dann haben wir mit dem Hebelgesetz:

$$F \cdot a = (xF_G)\, b + \left((1-x)\, F_G \frac{e}{d}\right) c\,.$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von x, falls $b = \frac{e}{d} c$ ist.

In diesem Fall gilt: $Fa = \left(F_G \frac{e}{d}\right) c$

b) $\frac{F_G}{F} = \frac{ad}{ec}$; $10:1$. Es handelt sich hier um eine Dezimalwaage.

170

Sei l die Länge der Brücke (kürzt sich wieder weg!).
Sei α der Neigungswinkel (60°).
Kraft der Wand auf die Kette: $F_{K,W}$
Hebelgesetz bzgl. der Brückenbasis:

$F_G \frac{l}{2} \sin\alpha = F_{K,W}\, l$ und damit $F_{K,W} = \frac{\sin\alpha}{2} F_G$; $\frac{\sqrt{3}}{4} F_G$; 8.5 kN

Kraft der Wand auf die Brückenbasis: $F_{B,W}$
Kraft der Wand auf die Brückenbasis aus dem Kräftegleichgewicht:

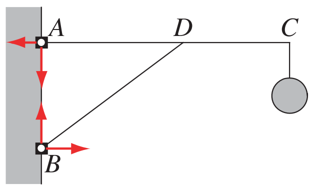
1.) senkrecht: $F_G - F_{K,W} \sin\alpha = F_G \left(\frac{3+\cos 2\alpha}{4}\right)$; $\frac{5}{8} F_G$

2.) waagrecht: $F_{K,W} \cos\alpha$; $\frac{\sqrt{3}}{8} F_G$

Und daraus die Resultierende:

$F_{B,W} = \frac{\sqrt{7}}{4} F_G$; 13 kN

171



a) Bei B wirkt eine Kraft nach rechts und nach oben.
Bei A wirkt eine Kraft nach links und nach unten.

b) Gleichungssystem:

$\overline{AC} \cdot F_G = \overline{AB} \cdot F_{Bx}$, $\overline{AC} \cdot F_G = \overline{AB} \cdot F_{Ax}$, $F_{Ay} + F_{By} = F_G$, $\frac{F_{By}}{F_{Bx}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$

Lösung:

$F_{Ay} = F_G \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} - 1\right)$; 0.15 kN, $F_{Ax} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} F_G$; 0.47 kN

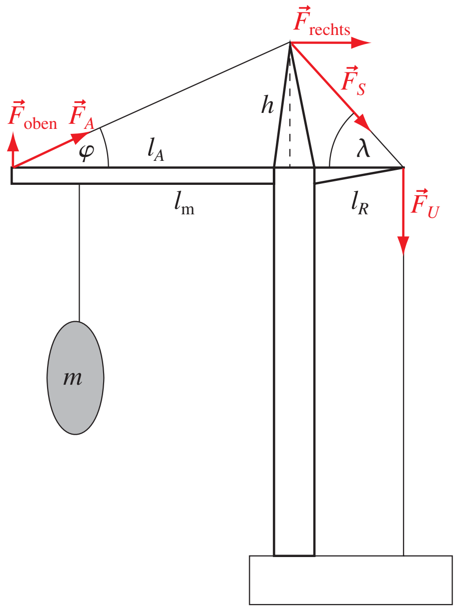
$F_{By} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} F_G$; 0.35 kN, $F_{Bx} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} F_G$; 0.47 kN

$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2}$; 0.49 N und $F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2}$; 0.58 N

172

Das Seil zum Ausleger muss die Kraft F_A halten:

$$F_A = \frac{F_{\text{oben}}}{\sin\varphi} = \frac{mg\,\frac{l_m}{l_A}}{\sin\varphi};\ 65\text{ kN}\text{, wobei }\tan\varphi = \frac{h}{l_A}\text{ ist.}$$



Die Kraft F_{rechts} muss vom Seil zum hinteren Ausleger erzeugt werden und die Seilkraft F_A ausgleichen.

Von der Spitze zum hinteren Ausleger muss das Seil F_S halten:

$$F_{\text{rechts}} = F_A\cos\varphi;\qquad F_S = \frac{F_{\text{rechts}}}{\cos\lambda};1.0\cdot 10^2\text{ kN}\text{, wobei }\tan\lambda = \frac{h}{l_R}$$

Vom hinteren Ausleger nach unten wirkt die Kraft F_U:

$$F_U = F_S\sin\lambda;\ 82\text{ kN}$$

Andere Berechnungsmöglichkeit für F_U mit den Drehmomenten:

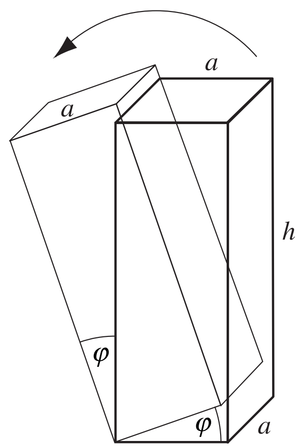
$$l_m mg = F_U l_R \Rightarrow F_U = \frac{l_m mg}{l_R}\ ;\quad 82\text{ kN}$$

173

a) Der Schwerpunkt soll über einer Basiskante (= Drehachse) liegen: $\tan\varphi = \frac{a}{h}$; also für $\varphi > \arctan\left(\frac{a}{h}\right)$

Unwarscheinlicher Fall über die Ecke (= Drehpunkt):

$$\tan\varphi = \sqrt{2}\cdot\frac{a}{h}\text{ also für }\varphi > \arctan\left(\sqrt{2}\,\frac{a}{h}\right)$$



b) Der Grenzfall für das Rutschen ist erreicht, wenn die Hangabtriebskraft F_H gleich der Reibungskraft F_R ist.

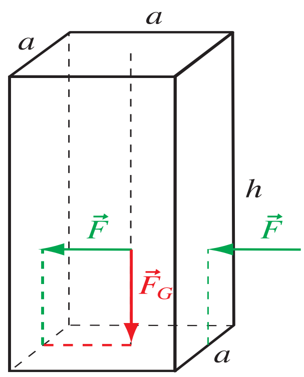
$$F_R = \mu_H F_G\cos\varphi = F_G\sin\varphi \Rightarrow \mu_H = \tan\varphi$$

Also für $\varphi = \arctan\mu_H$.

c) Die Resultierende aus der Gewichtskraft F_G und der stossenden Kraft F geht im Grenzfall genau zur Kante hin.

Die Schubkraft F hat die Reibungskraft F_R als gleich grosse Gegenkraft.

$$\frac{F_R}{F} = \frac{x}{a/2} \Rightarrow \frac{mg}{\mu_H mg} = \frac{2x}{a} \Rightarrow x = \frac{a}{2\mu_H}\quad\text{bzw. } x < \frac{a}{2\mu_H}$$



Trägheitsprinzip (I. Newton'sches Axiom)

174

Nach dem Trägheitsprinzip verharrt die Flasche in ihrem geradlinigen, gleichförmigen Bewegungszustand, solange keine äusseren Kräfte auf sie einwirken.
Die Reibungskraft ist sehr gering und kann die Flasche nicht auf der linkskurvigen Bahn halten. Somit bewegt sich die Flasche relativ zum Zug nach rechts.

175

Der Mond ist träge. Er würde sich geradlinig, gleichförmig bewegen, wenn keine Kräfte auf ihn einwirken würden. Die Anziehungskraft bewirkt ein Ablenkung von der geradlinigen Bahn auf eine kreisförmige Bahn. Wenn die Antriebskraft da wäre, würde der Mond immer schneller werden. Wenn die Fliehkraft da wäre, würde sich der Mond geradlinig bewegen. Somit gibt es nur eine Kraft, die auf den Mond wirkt: die Erdanziehungskraft.

176

a) $F_N = F_G = mg$, weil ein Kräftegleichgewicht herrscht.

b) Nein, beim Anfahren werden Lift und Person beschleunigt, bis beide die konstante Geschwindigkeit erreichen. Die Normalkraft auf die Person ist beim Anfahren leicht grösser als ihre Gewichtskraft. Es ist möglich, diesen Effekt mit einer langen Beschleunigungsphase zu minimieren.

Aktionsprinzip (II. Newton'sches Axiom)

177

a) Konstante Kraft nach rechts
b) Keine Kraft
c) Keine Kraft
d) Konstante Kraft nach links
e) Konstante Kraft nach rechts (ab v = 0 keine Kraft)

178

a) E
b) B bis v = 0, dann E
c) B
d) F

179

$F = m\frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$; 30 kN

180

a) $F = F_{\text{Zug}} \cos\alpha$; 1.6 kN

b) $a = \frac{F}{m}$; $2.4 \cdot 10^{-2}$ m/s^2

181

$m = \dfrac{F}{a}$; 338 kg

182

$a = \dfrac{3F}{m}$; 1.78 m/s^2

183

a) $a = \dfrac{F}{m} - g$; 3.9 m/s^2

b) $a = \dfrac{F}{m}$; 14 m/s^2

c) Beim Abbrennen der Triebladung verringert sich die Masse der Rakete. Bleibt der Schub aber konstant, wird sich die Beschleunigung vergrössern.

184

m ist die Masse im Harass und m_B die Masse des Bodens.
Die Reibungskraft F_R der Nägel ist entscheidend. Bei einer Beschleunigung von a nach oben fällt der Boden ab, falls $F_R < (m + m_B)(g + a)$ ist.

185

a) In Bewegungsrichtung wirkt die Kraft $F_{\text{res}} = F \sin\alpha$. $a = \dfrac{F \sin\alpha}{m}$; 0.30 m/s^2

b) $s = \dfrac{1}{2}at^2$; 1.5 m

186

$m = \dfrac{Ft^2}{2s}$; 14 t

187

$a_{\text{Bremsen}} = -\dfrac{v^2}{2s}$; –13 m/s^2

$F = m\dfrac{v^2}{2s}$; 4.7 kN

188

a) $a_1 = \dfrac{2s_1}{t_1^2}$; 52 m/s^2

b) $v_1 = a_1 t_1$; 10 m/s

c) $F_1 = m(a_1 + g)$; 15 kN

d) $a_2 = \dfrac{F_2}{m} - g$; 126 m/s^2

e) $s_2 = v_1 t_2 + \dfrac{1}{2}a_2 t_2^2$; 14 m

f) $v_2 = v_1 + a_2 t_2$; 61 m/s

189

a) $a = \frac{m_2 g}{m_1}$; 49 m/s^2

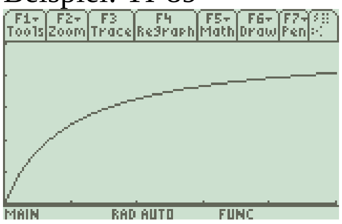
Wagen (m_1) und Antriebsmasse (m_2) erfahren immer die gleiche Beschleunigung. Ohne angehängten Wagen würde die Antriebsmasse wie alle Körper mit der Fallbeschleunigung g = 9.81 m/s^2 fallen. Es ist unsinnig, dass die Beschleunigung der Antriebsmasse mit angehängtem Wagen grösser als beim freien Fall sein soll.

b) Die Gewichtskraft auf den Antriebsklotz beschleunigt den Wagen und den Antriebsklotz.

$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}$; 8.2 m/s^2 $F_{\text{Antrieb}} = m_1 a$; 8.2 N

c) $a = \frac{x}{1+x} g$

d) Beispiel: TI-89



Die Beschleunigung nähert sich dem Wert für die Fallbeschleunigung g = 9.81 m/s^2 asymptotisch.

190

$F = m \frac{v^2}{2s} + F_R$; 88 kN

191

$a > \mu_H g$; 4 m/s^2

192

a) Sie kommt nach $t = \frac{v}{-a}$; 5.0 s zum Stehen, in dieser Zeit legt sie den Weg

$s = \frac{v^2}{-2a}$; 63 m zurück.

b) $\mu = \frac{-a}{g}$; 0.51

c) Literaturwert: Pneu auf Asphalt Haftreibung 1.0, Gleitreibung 0.60.
Ein Vergleich mit dem Literaturwert zeigt, dass die Reibungszahl deutlich kleiner ist als für Haftreibung und in etwa gleich gross wie für Gleitreibung.

Falls ihre Räder blockierten, liegt Gleitreibung vor, und die Frage lässt sich nicht beantworten. Falls die Räder aber nicht blockierten, liegt Haftreibung vor. Dann sind die Bremsen nicht in Ordnung oder sie hat zu zögerlich gebremst, weil sie nicht die maximale Haftreibung erreicht.

193

a) $Ma \le \mu mg$, $a \le \dfrac{\mu mg}{M}$; 1.0 m/s²

b) $s = \dfrac{1}{2}at^2$; 4.5 m, könnte klappen.

194

$ma \le \mu_H mg$ und $a = \dfrac{v^2}{2s}$ ergibt $\mu_H \ge \dfrac{v^2}{2sg}$; 0.25

195

Die Bremskraft bewirkt eine Bremsbeschleunigung. Aus der Anfangsgeschwindigkeit und dem Bremsweg ergibt sich die Bremsbeschleunigung. Überraschenderweise ist die Masse des Velos und der Fahrerin unbedeutend.

$\mu = \dfrac{v^2}{2gs_B}$; 0.63

196

a) $(M+m)a = mg - \mu_G Mg$, $a = \dfrac{(m - \mu_G M)g}{M+m}$; 0.92 m/s²

b) $\mu_G = \dfrac{m}{M}$; 0.13

197

Allgemein gilt für den Bremsweg: $s_B = \dfrac{v^2}{-2a_B}$ mit der Anfangsgeschwindigkeit v und der (konstanten) Bremsbeschleunigung $a_B < 0$.

In der Ebene: $ma_B = -\mu mg \rightarrow s_{B,\,\text{Ebene}} = \dfrac{v^2}{2\mu g}$

Mit Steigung:

$$ma'_B = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \rightarrow s'_B = \frac{v^2}{2g\sin\alpha + 2\mu g\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{2g}{v^2}\sin\alpha + \frac{2\mu g}{v^2}\cos\alpha}$$

$$s'_B = \frac{1}{\left(\frac{\cos\ \alpha}{s_{B,\,\text{Ebene}}} + \frac{2g\sin\ \alpha}{v^2}\right)};\quad 24\text{ m}$$

Mit Gefälle:

$$ma''_B = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$

$$s''_B = \frac{1}{\left(\frac{\cos\ \alpha}{s_{B,\ \text{Ebene}}} - \frac{2g\sin\ \alpha}{v^2}\right)}; \quad 41\text{ m}$$

198

a) Die Pralinenschachtel wird beschleunigt. Die Kraft des Förderbandes auf die Pralinenschachtel lässt sich mit dem 2. Newton´schen Axiom berechnen:

$$F_B = ma = \mu F_N \Rightarrow a = \mu g$$

Nach dem Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz der gleichmässig beschleunigten Bewegung folgt: $v(t) = \mu gt - v_0$

Wenn die Schachtel zu gleiten aufhört, ist ihre Relativgeschwindigkeit zum Förderband null:

$$0 = \mu gt - v_0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{\mu g}; \quad 0.31\text{ s}$$

b) $s = -\frac{v_0^2}{2\mu g}; \quad -15\text{ cm}$

199

a) Beschleunigende Kraft auf die Münze:

$$F_{\text{res}} = ma = F_R = mg\mu_G \Rightarrow a = g\mu_G$$

Idee: In der Zeit bis die Glasöffnung vollständig frei ist, darf die Münze maximal bis zum Glasrand kommen. Die Öffnung ist nach der Strecke:

$s = \frac{d_{\text{Deckel}} + d_{\text{Glas}}}{2}$ vollständig frei. Für die Zeit gilt also:

$$t = \frac{d_{\text{Deckel}} + d_{\text{Glas}}}{2v}$$

In dieser Zeit hat die Münze folgende Strecke zurückgelegt:

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}g\mu_G\frac{\left(d_{\text{Deckel}} + d_{\text{Glas}}\right)^2}{4v^2}$$

Diese Strecke muss kleiner sein als der halbe Glasdurchmesser:

$$s < \frac{d_{\text{Glas}}}{2}$$

also:

$$v > \frac{d_{\text{Deckel}} + d_{\text{Glas}}}{2}\sqrt{\frac{g\mu_G}{d_{\text{Glas}}}}; \quad 0.7\text{ m/s}$$

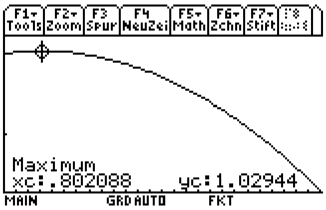
b) Da die Reibungszahl zunimmt, muss bei einem Radiergummi der Deckel schneller weggezogen werden. Dann kann es aber auch gehen.

200

F_Z : Zugkraft

a) $a = \dfrac{F_Z \cos\alpha - \mu(mg - F_Z \sin\alpha)}{m}$; 0.88 m/s^2

b) Optimaler Winkel bei 0.80°.



Sie müssten also fast horizontal ziehen.

c) Die nach oben gerichtete Komponente der Zugkraft verringert die Reibungskraft.

Wechselwirkungsprinzip (III. Newton'schen Axiom)

201

Null; die Badezimmerwaage erzeugt eine zur Gewichtskraft entgegengesetzte Kraft gleicher Grösse. Die Summe der beiden Kräfte ist null (wäre die Summe ungleich null, so müsste eine Beschleunigung auftreten).

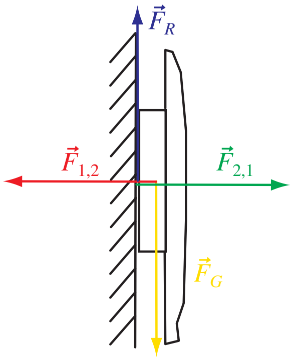
202

Wechselwirkungskräfte heben sich nie auf, da sie nicht wie Gleichgewichtskräfte auf denselben Körper wirken. Auf den Lastwagen wirkt einerseits die Kraft, die der Mann ausübt. Andererseits treten auch Reibungskräfte auf, die in entgegengesetzter Richtung zeigen. Die resultierende Kraft am Lastwagen ist aber nach vorne gerichtet und ungleich null. Deshalb wird er in Bewegung versetzt. Wichtig: Die Kraft, die der Lastwagen als Wechselwirkungskraft ausübt, greift am Mann an und hat somit keinen Einfluss auf die Bewegung des Lastwagens.

203

Beim Absprung drückt Florence das Paddelboot nach hinten weg. Das Boot hingegen erteilt Florence eine Wechselwirkungskraft Richtung Land. Da die Masse des Bootes aber deutlich geringer ist als die von Florence, erfährt das Boot dadurch eine grössere Beschleunigung als Florence (II. Newton'sches Axiom). Deshalb bewegte sich das Boot rascher vom Ufer weg als Florence Richtung Ufer.

204



Damit der Magnet an der senkrechten Kühlschranktür hält, muss eine zur Gewichtskraft F_G entgegengesetzt gerichtete Kraft auf den Magnet wirken: die Haftreibungskraft F_R. Das ist die Kraft, mit der die Oberfläche der Kühlschranktür den Fisch nach oben drückt. Umgekehrt drückt der Magnet die Kühlschranktür nach unten (Wechselwirkungskraft zur Haftreibungskraft, in der Skizze nicht eingezeichnet). Reibungskräfte erfolgen nur, wenn beide Oberflächen aneinander gedrückt werden. Dafür ist die zweite Wechselwirkung notwendig: Der Fisch zieht durch seine Magnetkraft die Kühlschranktür an $\left(F_{2,1}\right)$, und die Kühlschranktür zieht den Magnetfisch an $\left(F_{1,2}\right)$.

Vermischte Aufgaben zu den Newton’schen Axiomen

205

a) $F_{2,1} = 3ma$ b) $F_{2,3} = 2ma$ c) $F_2 = F_{2,1} - F_{2,3} = ma$

206

a) **Eimer 1:**

Gewichtskraft nach unten	$F_{1,G} = m_1 g$; 132 N
Seilkraft nach oben	$F_{1,\text{Seil}} = F_{1,G}$; 132 N

Eimer 2:

Seilkraft nach oben	$F_{2,\text{Seil}} = F_{1,\text{Seil}}$; 132 N
Gewichtskraft nach unten	$F_{2,G} = m_2 g$; 137 N
Kraft der Klappe nach oben	$F_{2,\text{Klappe}} = F_{2,G} - F_{2,\text{Seil}}$; 5 N

b) $a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$; 0.178 m/s^2

c)

Eimer 1:	Gewichtskraft nach unten	$F_{1,G} = m_1 g$; 132 N
	Seilkraft nach oben	$F_{1,\text{Seil}} = F_{1,G} + m_1 a$; 135 N
Eimer 2:	Seilkraft nach oben	$F_{2,\text{Seil}} = F_{1,\text{Seil}}$; 135 N
	Gewichtskraft nach unten	$F_{2,G} = m_2 g$; 137 N

207

a) Die Aussage ist nicht korrekt. Es werden zwei Kräfte verglichen, die auf denselben Gegenstand wirken. Das Wechselwirkungsprinzip würde in diesem Fall eine Aussage über die Kraft machen, mit der Waggon 1 auf die Lok wirkt. Diese Kraft ist immer gleich gross und entgegengesetzt gerichtet zur Kraft, mit der die Lok auf Waggon 1 einwirkt. Die Kraft, die Waggon 2 auf Waggon 1 ausübt, kann im Prinzip beliebige Werte annehmen.

b) Bei den folgenden Kräften $F_{x,y}$ gibt der erste Index x an, auf welchen Gegenstand die Kraft wirkt. Der zweite Index y bezeichnet den Gegenstand, der die Kraft ausübt:
$a = \dfrac{F_{1,\mathrm{Lok}}}{m_1 + m_2}$; 0.16 m/s^2. $F_{\mathrm{Lok},1} = F_{1,\mathrm{Lok}}$; 5.0 kN. $F_{1,2} = F_{2,1} = m_2 a$; 3.1 kN

c) $a = 0$. $F_{\mathrm{Lok},1} = F_{1,\mathrm{Lok}} = F_{1,2} = F_{2,1} = F_{2,\mathrm{Prellbock}}$; 5.0 kN

208

F_Z: Zugkraft des Traktors
F_{WW}: Wechselwirkungskraft (Reaktionskraft) des Betonblocks auf den Traktor
F_R: Reibungskraft des Bodens auf den Betonblock

a) Beim Anfahren gilt: $F_Z > F_R$ (Newton II, $a > 0$)
Bei gleichförmiger Bewegung gilt: $F_Z = F_R$ (Newton II, $a = 0$)
Beides folgt aus: $ma = F_Z - F_R$

b) Sowohl beim Anfahren als auch bei gleichförmiger Bewegung gilt:
$\vec{F}_Z = -\vec{F}_{\mathrm{WW}}$ (Newton III)

209

a) Bei konstanter Geschwindigkeit muss die resultierende Kraft auf jeweils beide Personen null sein. Auf Olga wirkt ihre Gewichtskraft nach unten. Bond muss also auf sie eine gleich grosse Kraft nach oben ausüben. Damit er das tut, muss Olga mit einer entsprechend grossen Kraft an Bonds Füssen ziehen:
$F_{\mathrm{Bond,Olga}} = m_{\mathrm{Olga}} g$; 0.64 kN
An Bond wirken $F_{\mathrm{Bond,Olga}}$ und seine eigene Gewichtskraft nach unten. Damit ihn der Lift mit einer gleich grossen Kraft nach oben zieht, muss er sich am Lift mit der Kraft $F_{\mathrm{Lift,Bond}} = (m_{\mathrm{Olga}} + m_{\mathrm{Bond}})g$ = 1.5 kN halten.

b) Beide Personen müssen eine grössere Kraft ausüben, damit sie durch die jeweilige Wechselwirkungskraft nicht nur gehalten, sondern auch noch beschleunigt werden:
$F_{\mathrm{Bond,Olga}} = m_{\mathrm{Olga}}(g + a)$; 0.74 kN
$F_{\mathrm{Lift,Bond}} = (m_{\mathrm{Olga}} + m_{\mathrm{Bond}}) \cdot (g + a)$; 1.7 kN

210

a) Wegen des Wechselwirkungsprinzips wirkt die Kraft, mit der Anne an der Leine zieht, auch auf sie selbst. Bei vernachlässigbarer Masse der Leine wirkt daher auf beide Boote eine gleich grosse Kraft *F*.

Es gilt: $v_{\text{rel}} = v_1 + v_2 = (a_1 + a_2) \cdot t = \left(\frac{F}{m_1} + \frac{F}{m_2} \right) \cdot t$

Aufgelöst nach *F* gibt das: $F = \frac{v_{\text{rel}}}{t} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1}$; 54 N

b) $s = \frac{1}{2} F \cdot \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cdot t^2 = \frac{1}{2} v_{\text{rel}} t$; 2.5 m

Bildnachweis:

150, 151, 164, 165: KZO-Fotoprojekt mit Schülerinnen und Schüler unter Leitung von Bruno Cappelli