Prof. Dr. U. Keller SS 2007

Übungsblatt 7 zur Quantenelektronik I

Bereitgestellt: 07.05.07 Abgabe: 14.05.07 Rückgabe: 22.05.07

Aufgabe 1 Weisslicht-Interferometer

Wir betrachten ein Michelson-Interferometer mit einer breitbandigen Lichtquelle, deren spektrale Leistungsdichte durch

$$P(\nu) = \frac{P_{in}}{\Delta\nu\sqrt{\pi}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu}\right)^2\right]$$

(in Einheiten von W/Hz) gegeben sei. Die Leistung in einem infinitesimalen Frequenzintervall $d\nu$ ist also $P(\nu)\,d\nu$.

a) Begründen Sie, dass das (zeitgemittelte) Detektorsignal proportional zu $\int P(\nu)\cos^2\left(\frac{2\pi\nu}{c}\delta\right)\mathrm{d}\nu$ ist, wenn δ die Differenz der Armlängen ist.

b) Werten Sie obiges Integral für das gegebene Spektrum aus.

Tipp: Verwenden Sie dafür $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, das Additionstheorem für den Kosinus, sowie die Formel $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|}\exp(-b^2/4a^2)$. Das Ergebnis sollte sein: $P_{\mathrm{det}} = \frac{1}{2}P_{\mathrm{in}} \cdot \left(1+\exp\left[-\left(\frac{2\pi\delta\,\Delta\nu}{c}\right)^2\right]\cdot\cos\frac{4\pi\nu_0}{c}\delta\right)$.

Zeigen Sie, dass der Interferenzkontrast mit zunehmendem δ schwächer wird, und zwar umso schneller, je grösser $\Delta\nu$ ist.

c) Ein Arm des Interferometers wird nun ersetzt durch ein zu vermessendes Bauteil, welches mehrere Reflexionen von verschiedenen Orten entlang des Strahls erzeugt. Zeigen Sie, dass diese Reflexionspunkte räumlich aufgelöst werden können, wenn $\Delta\nu$ genügend gross ist. Welche Ortsauflösung ergibt sich grob abgeschätzt für eine Lichtquelle mit 30 nm Bandbreite (volle Halbwertsbreite) um 1560 nm? Liesse sich eine solche Auflösung auch bei einer reinen Laufzeitmessung technisch realisieren?

Aufgabe 2 Matrix-Methode für die Berechnung von Vielschichtsystemen

Wir entwickeln eine Methode ("scattering matrix formalism") zur Berechnung der optischen Eigenschaften von dielektrischen Vielschichtsystemen.

a) Direkt links und rechts von einer Grenzfläche zwischen zwei dielektrischen (und zunächst nicht absorbierenden) Schichten mit Brechungsindizes n_1 bzw. n_2 seien die komplexen elektrischen Feldamplituden E_{1+}, E_{1-}, E_{2+} und E_{2-} für die nach links (–) bzw. rechts (+) laufenden monochromatischen Wellen mit Vakuum-Wellenlänge λ gegeben. Zeigen Sie, dass diese Grössen miteinander verknüpft sind durch eine Beziehung der Form

$$\begin{pmatrix} E_{2+} \\ E_{2-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{1+} \\ E_{1-} \end{pmatrix},$$

und geben Sie die Matrixkomponenten a, b, c, d als Funktion der Brechungsindizes an, wobei wir der Einfachheit halber senkrechten Einfall auf die Grenzfläche annehmen.

b) Ändert sich an den Resultaten etwas, wenn die beiden dielektrischen Medien absorbierend sind (mit Amplituden-Absorptionskoeffizienten α_1 bzw. α_2)?

c) Geben Sie eine entsprechende Matrix für die Propagation durch eine Schicht mit Brechungsindex n, Amplituden-Absorptionskoeffizient α und Dicke L_d an. (Diese Matrix soll die Grenzflächen nicht berücksichtigen, nur die Propagation im Medium.)

d) Zeigen Sie, dass das Verhalten eines Vielschichtsystems durch eine von der Wellenlänge abhängige Matrix beschrieben werden kann, die sich durch Multiplikation von einzelnen Matrizen aus Teil a) und c) ergibt. Berechnen Sie aus den Komponenten der resultierenden Produktmatrix die Reflektivität bzw. die Transmission des Systems. (Sind diese Grössen für von links bzw. rechts einfallende Wellen gleich?) Wie erhielte man die Gruppenlaufzeit, welche ein durch das Schichtsystem reflektierter oder transmittierter Puls erfährt (genaue Formeln nicht notwendig)?